

Cap. 7

Forze inerziali e sistemi di riferimento non inerziali¹⁾**7.1 - Introduzione**

Immaginiamo che siate seduti in una automobile su una strada molto liscia. Avete in mano un pacco pesante. L'automobile si sta muovendo, ma non potete vedere il tachimetro da dove siete seduti. All'improvviso avete la sensazione che il pacchetto, invece di essere solo un peso morto sulle ginocchia, abbia iniziato a spingere indietro anche orizzontalmente su di voi. Nonostante che il pacco non sia in contatto con qualsiasi cosa tranne con voi stessi, l'effetto é come se una forza fosse applicata su di esso e trasmessa a voi mentre lo tenete fermo rispetto a voi stessi e alla macchina. Se non avete trattenuto il pacchetto in questo modo, verrebbe effettivamente spinto all'indietro. Ci si accorge che questo é quello che succede a un pupazzetto appeso alla fine di un filo verticale attaccato al tetto dell'auto.

Come interpretare queste osservazioni? Se avete qualche esperienza precedente di tali fenomeni, non avrete alcuna esitazione nel dire che esse sono associate ad un aumento della velocità della macchina, cioè ad un'accelerazione positiva. Perfino se questa fosse stata la tua prima esperienza di questo tipo, se avessi avuto una conoscenza ben sviluppata delle leggi di Newton, avresti potuto raggiungere le stesse conclusioni. Una accelerazione dell'auto richiede una accelerazione di qualunque cosa é ad essa collegata; l'accelerazione del pacco richiede, attraverso $\vec{F} = m\vec{a}$, una forza dalla grandezza appropriata fornita dalle vostre mani. Nondimeno, sembra proprio che il pacchetto stesso sia in qualche modo sottoposto a una forza extra, una '*forza d'inerzia*', che entra in gioco ogni volta che si fa lo sforzo di cambiare lo stato di moto di un oggetto.

Queste forza extra formano un'importante classe. Esse possono essere ritenute responsabili di fenomeni come il moto di un pendolo di Foucault, gli effetti in una centrifuga ad alta velocità, la cosiddetta forza g su un astronauta durante il lancio e la direzione preferita di rotazione dei cicloni nell'emisfero settentrionale e meridionale. Queste forze sono uniche, tuttavia, nel senso non é possibile rintracciare le loro origini in qualche altro sistema fisico, come era possibile per tutte le forze precedentemente considerate. Forze gravitazionali, elettromagnetiche, e di contatto, per esempio, hanno la loro origine in altre masse, in altre cariche o nel 'contatto' con un altro oggetto. Ma le forze addizionali che fanno la loro comparsa quando un oggetto viene accelerato non hanno oggetti fisici come sorgenti di forze. Queste forze inerziali sono reali o no? Quella domanda, e la risposta ad essa, é legata alla scelta del sistema di riferimento rispetto al quale stiamo analizzando il moto. Facciamo, quindi, iniziare questa analisi con un richiamo alla dinamica dal punto di vista di una sistema di riferimento non accelerata.

7.2 - Moto osservato da sistemi di riferimento non accelerati

Un sistema di riferimento non accelerato appartiene alle classe dei sistemi di riferimento che noi abbiamo chiamato *inerziali*. Abbiamo visto, nello sviluppare le idee di base della dinamica nel capitolo 3, che un'importanza e un interesse unico si attribuiscono a

¹⁾ French A.P.: Newtonian Mechanics - The M.I.T. Introductory Physics Series, W.W. Northon & Company Inc. 1971, Cap.12, pag.493.

questi sistemi di riferimento, in cui vale la legge di inerzia di Galileo. Abbiamo anche visto come, se un tale sistema di riferimento é stato identificato, ogni altro sistema di riferimento avente una velocità costante arbitraria relativa al primo sistema é anche inerziale, e le nostre deduzioni sulle forze che agiscono su un oggetto sono le stesse in entrambi.

Con buona prima approssimazione, come noi sappiamo, la superficie della Terra definisce un sistema di riferimento inerziale. Cosí come, quindi, qualsiasi sistema che si muove a velocità costante rispetto alla Terra. Galileo stesso fu la prima persona a presentare una chiara consapevolezza di questo fatto, e un aspetto di cui ha discusso é utile come punto di partenza per noi ora. Nel suo *Il Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, in cui sosteneva la visione copernicana del sistema solare in preferenza di quella tolemaica, Galileo ha sottolineato che una roccia, caduta dalla cima dell'albero di una nave, atterra sempre proprio ai piedi dell'albero, indipendentemente dal fatto che la nave si stesse muovendo. **Galileo sostenne che il percorso verticale di un oggetto che cade non costringe alla conclusione che la terra é stazionaria.**

Il confronto qui é fra un oggetto che cade da una posizione di quiete rispetto alla Terra e un altro oggetto che cade da una posizione di quiete rispetto alla nave. Se considerassimo soltanto un oggetto che parte dalla posizione di quiete rispetto a una nave in movimento, la sua traiettoria sarebbe verticale nel sistema di riferimento della nave e parabolica nel sistema di riferimento della terra. Più generalmente, se noi consideriamo un oggetto lanciato con la stessa velocità arbitraria relativa alla Terra, la sua traiettoria conseguente avrà forme diverse se osservata da diversi sistemi di riferimento inerziali (vedi figura 7.2-1) ma tutte saranno paraboliche e tutte, una volta analizzate, mostrano che l'oggetto che cade aveva l'accelerazione verticale, g , risultante dall'unica forza $\vec{F}_g = m\vec{g}$ dovuta alla gravità. Cerchiamo ora di confrontare questo con quello che si trova se il sistema di riferimento stesso ha un'accelerazione.

- a) Traiettoria parabolica come osservata da un sistema di riferimento solidale alla Terra. La velocità iniziale v_0 é orizzontale.
- b) Lo stesso moto osservato da un sistema di riferimento con velocità orizzontale piú grande di v_0 .
- c) Lo stesso moto osservato da un sistema di riferimento avente entrambe le componenti di velocità orizzontale e verticale.

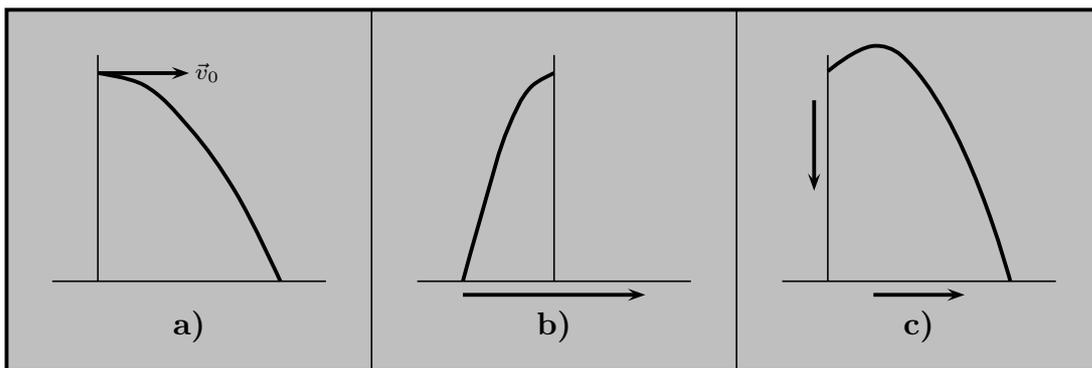


fig.7.2-1

7.3 - Moto osservato da un sistema di riferimento accelerato

Supponiamo che un oggetto venga rilasciato dalla posizione di riposo rispetto ad un sistema di riferimento che ha un'accelerazione costante orizzontale rispetto alla superficie della Terra. Consideriamo il moto successivo come appare rispetto alla Terra e rispetto al sistema di riferimento accelerato. Assumeremo come direzione dell'asse positivo x la direzione dell'accelerazione e configureremo due sistemi di coordinate rettangolari: sistema S , in quiete rispetto alla Terra, e S' solidale al sistema di riferimento accelerato (figura 7.3-1).

Relazione fra le coordinate di una particella nei due sistemi di riferimento che sono in moto relativo accelerato.

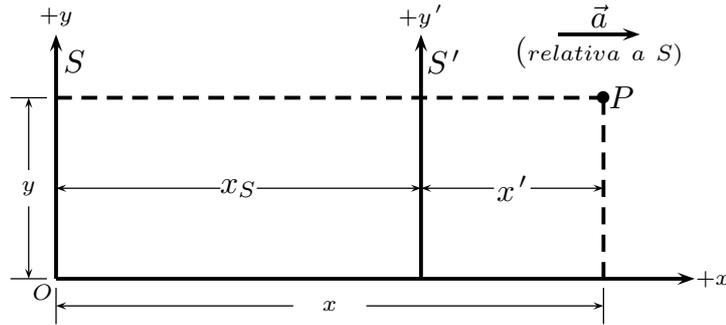


fig.7.3-1

Assumiamo le origini dei sistemi di riferimento coincidere per $t = 0$, e supponiamo che la velocità di S' rispetto a S in questo istante è eguale a v_0 . Gli assi verticali dei due sistemi sono assunti positivi verso l'alto, e la particella è rilasciata all'istante $t = 0$ da un punto di coordinate $x = x' = 0$, $y = y' = h$.

Come saranno le traiettorie in S e S' ? Per un osservatore in S , abbiamo già conosciuta la risposta. Per l'osservatore la particella è in caduta libera con velocità iniziale orizzontale v_0 (figura 7.2-3 a)). Così noi abbiamo:

$$(Come osservato in S) \begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (7.3.1)$$

Queste due equazioni definiscono univocamente la posizione della particella all'istante t , ma per descrivere il moto come osservato in S' dobbiamo esprimere i risultati in termini di coordinate x' e y' come misurati in S' . Per trasformare nel sistema S' , sostituiamo:

$$\begin{cases} x' = x - x_s \\ y' = y \end{cases} \quad (7.3.2)$$

essendo x_s la distanza lungo l'asse x fra l'origine di S e l'origine di S' (vedi figura 7.3-1). Sappiamo che:

$$x_s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (7.3.3)$$

Sostituendo questi valori troviamo:

$$(Come osservato in S') \begin{cases} x' = v_0 t - \left(v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \right) = -\frac{1}{2} a t^2 \\ y' = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (7.3.4)$$

Ricavando t^2 dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, risulta che la traiettoria della particella come osservata in S' é una linea retta data dall'equazione:

$$x' = -\frac{a}{g}(h - y') \tag{7.3.5}$$

- a) **Traiettoria parabolica di una particella sottoposta alla gravitá, come osservata nel sistema di riferimento della Terra S .**
- b) **Stesso moto osservto in un sistema di riferimento S' che ha una accelerazione orizzontale costante.**

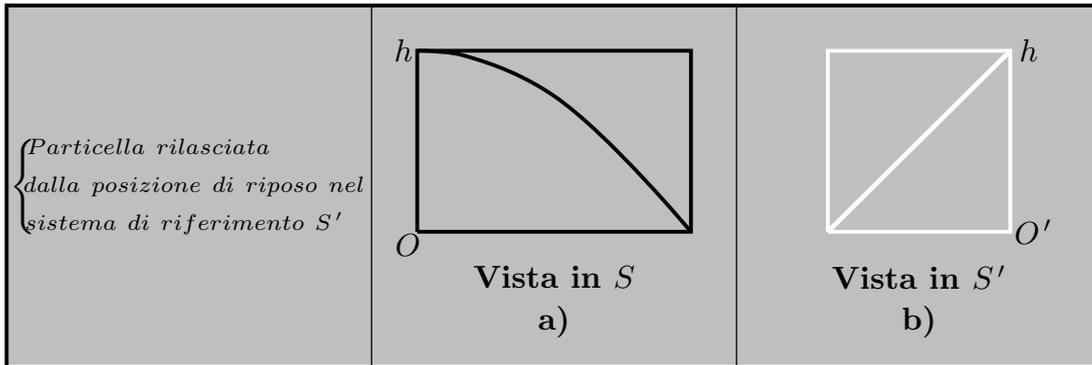


fig.7.3-2

Questa é mostrata in figura 7.3-2 b). Nel sistema di riferimento accelerato, la particella appare non avere soltanto componente costante dell'accelerazione verso il basso dovuta alla gravitá, ma anche una componente costante dell'accelerazione orizzontale nella direzione $-x$ che causa alla particella di seguire una traiettoria in linea retta non verticale. Un simile semplice esempio é il dramma della sparatoria della scimmia.²⁾ Illustriamo, quindi, l'esempio della venerabile dimostrazione del cacciatore e della scimmia.

Il cacciatore punta direttamente sulla scimmia mentre pende da un ramo con un arto (vedi figura 7.3-3). Questo é realmente un errore, perché non tiene conto del fatto che il proiettile segue un percorso parabolico come mostrato in figura. Ma la scimmia commette un errore di compensazione. Vedendo il fucile puntato direttamente su di essa, lascia andare l'arto non appena vede il lampo del fucile. Cosí il proiettile e la scimmia iniziano a cadere nello stesso istante (ignorando eventuali ritardi dovuti al tempo di transito del lampo di luce e, meno giustamente, il tempo di reazione della scimmia). Ne consegue che, qualsiasi sia il tempo impiegato dal proiettile per percorrere la distanza orizzontale dal fucile alla linea verticale della discesa della scimmia, sia il proiettile sia la scimmia ricevono lo stesso contributo, $\frac{1}{2}gt^2$, al loro spostamento verticale come risultato dell'accelerazione gravitazionale soltanto. Cosí la traiettoria del proiettile incrocia la linea verticale di caduta della scimmia in un punto che é destinato ad essere raggiunto nello stesso tempo dalla scimmia, con conseguenze terribili per se stessa. Da notare che questo risultato é indipendente sia dalla velocitá del proiettile e sia dal valore di g ; richiede che solo quel proiettile, in

²⁾ French A.P.: Newtonian Mechanics - The M.I.T. Introductory Physics Series, W.W. Northon & Company Inc. 1971, Cap.3, pag.104.

assenza di gravit , vada dritto alla posizione originale della scimmia. Davvero notevole, a prima vista, ma facilmente comprensibile in termini di analisi di base del moto accelerato. Il risultato diventa quasi evidente se scegliamo di descrivere l'evento nel sistema di riferimento della scimmia che cade. In questo sistema il proiettile segue semplicemente un percorso rettilineo diretto verso la scimmia, mentre il terreno accelera verso l'alto con una accelerazione di 9.8 m/sec^2 .

Non vi   nessun mistero sul moto non familiare rappresentato dalla figura 7.3-2 b). Esso   una diretta conseguenza cinematica di descrivere il normale moto di caduta libera da un sistema di riferimento che   esso stesso accelerato. Potremmo perfettamente utilizzare questo percorso, descritto da misurazioni effettuate interamente in $S' mkern2mu'$, per scoprire l'accelerazione di questo sistema di riferimento, a condizione che la direzione della vera verticale fosse gi  nota. Tuttavia, un maggiore interesse si associa all'apprendimento dell'accelerazione attraverso metodi dinamici. Questo   il contenuto del prossimo paragrafo.

7.4 - Sistemi di riferimento accelerati e Forze inerziali

Da quanto   stato detto,   chiaro che i sistemi di riferimento inerziali hanno uno status molto speciale. **Tutti i sistemi inerziali sono equivalenti nel senso che   impossibile per mezzo di esperimenti dinamici scoprire il loro moto in ogni senso assoluto, solo i loro moti relativi sono significativi.** Da questa equivalenza dinamica deriva quello che viene chiamato "Principio di relativit  Newtoniano":

Non vi   nessuna osservazione dinamica che ci porta a preferire un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Quindi, nessun esperimento dinamico ci dir  se abbiamo una velocit  costante attraverso lo spazio.

Come abbiamo appena visto, tuttavia, una accelerazione relativa fra due sistemi di riferimenti   dinamicamente rivelabile. Come osservato nei sistemi di riferimento accelerati, gli oggetti (particelle) hanno accelerazioni inattese. Segue subito, poich  la legge di Newton stabilisce un collegamento fra la forza e l'accelerazione, che abbiamo una base quantitativa per calcolare la grandezza della forza inerziale associata ad una accelerazione misurata. Al contrario, e ancora pi  importante, abbiamo una base dinamica per dedurre l'entit  di un'accelerazione dalla forza inerziale ad essa associata. Questo   il principio alla base di tutti gli strumenti conosciuti come accelerometri. Essi funzionano a causa della propriet  inerziale di alcune masse fisiche.

Per fare l'analisi esplicita, consideriamo il moto di una particella P rispetto a due sistemi di riferimento quali quelli considerati nell'ultimo paragrafo e mostrati in figura 7.3-1: un sistema inerziale S ed un sistema accelerato S' . Abbiamo quindi, ancora una volta:

$$\begin{cases} x = x' + x_S \\ y = y' \end{cases} \quad (7.4.1)$$

Le componenti della velocit  di P come misurate nei due sistemi di riferimento sono cos  date da:

$$\begin{cases} u_x = u'_x + v_S \\ u_y = u'_y \end{cases} \quad (7.4.2)$$

dove $V_S = dx_S/dt$ in qualsiasi particolare istante. Se S' ha una accelerazione costante a ,

possiamo porre $v_S = v_0 + at$, ma la condizione dell'accelerazione costante non é affatto necessaria per la nostra analisi.

Prendendo le derivate rispetto al tempo delle componenti della velocità istantanea, otteniamo:

$$\begin{cases} a_x = a'_x + a_S \\ a_y = a'_y \end{cases} \quad (7.4.3)$$

dove a_s é l'accelerazione istantanea del sistema di riferimento S' . Sebbene abbiamo scelto di introdurre il calcolo in termini di componenti Cartesiane, é chiaro che una singola relazione vettoriale riguarda l'accelerazione \vec{a} di P , misurata in S , e la sua accelerazione a' come misurata in S' insieme all'accelerazione a_s di S' stessa:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_s \quad (7.4.4)$$

Moltiplicando ciascun membro dell'equazione (7.4.4) per m , riconosciamo che il lato sinistro rappresenta la forza reale (netta), \vec{F} , che agisce sulla particella, poiché questa definisce la causa vera della sua accelerazione come misurata in un sistema inerziale. Cioé, nel sistema S :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (7.4.5)$$

ma, utilizzando l'equazione (7.4.4), si ottiene:

$$\vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{a}_S \quad 7.4.6$$

Ora veniamo alla questione cruciale: Come dobbiamo interpretare l'equazione (7.4.6) dal punto di vista delle osservazioni fatte all'interno del sistema di riferimento S' stesso?

Dal punto di vista di Newton, che la forza netta su un oggetto é la causa del moto accelerato ($\vec{F}_{net} = m\vec{a}$), é cosí profondamente radicata nel nostro pensiero che siamo fortemente motivati a preservare questa relazione in ogni momento. Quando noi osserviamo un oggetto che accelera interpretiamo questo come dovuto all'azione di una forza netta sull'oggetto. Possiamo ottenere una forma matematica che abbia l'aspetto di $\vec{F}_{net} = ma$ per il caso presente in un sistema di riferimento accelerato? Si. Trasferendo tutti i termini tranne ma' a sinistra e trattando questi termini come forze che agiscono su m , e avere un risultato \vec{F}' , che é della grandezza corretta per produrre la giusta accelerazione osservata \vec{a}' :

$$\vec{F}' = \vec{F} - ma_S = m\vec{a}' \quad (7.4.7)$$

La forza netta nel sistema di riferimento S' é cosí composta da due parti: una forza "reale" \vec{F} con componenti F_x e F_y , ed una forza fittizia eguale a $-m\vec{a}_S$, che ha la sua origine nel fatto che il sistema di riferimento stesso ha l'accelerazione $+\vec{a}_S$. Un importante caso speciale dell'equazione (7.4.7) é quello in cui la forza "reale" \vec{F} é zero, in qual caso la particella, come osservata in S' , si muove sotto l'azione della forza inerziale $-m\vec{a}_S$ soltanto.

Il risultato espresso dall'equazione (7.4.7) non é semplicemente un trucco matematico. Dal punto di vista di un osservatore nel sistema accelerato, la forza inerziale é effettivamente presente. Se si prendessero provvedimenti per mantenere un oggetto "a riposo" in

S, legandolo con delle molle, si osserverebbero queste molle allungarsi o contrarsi in modo da fornire una forza contraria per bilanciare la forza inerziale. **Descrivere questa forza come "fittizia" é quindi in qualche modo fuorviante.** Ci vorrebbe un'etichetta conveniente che distingua le forze inerziali dalle forze che derivano dalle vere interazioni fisiche, e il termine "pseudo-forza" é spesso usato. Anche questo, tuttavia, non rende giustizia a forze come quelle provate da qualcuno che si trova effettivamente nel sistema di riferimento accelerato. **Probabilmente il nome originale, strettamente tecnico, "forza inerziale", che privo di qualsiasi sfumatura discutibile, rimane la migliore descrizione.**

Come esempio del modo in cui la stessa situazione dinamica possa essere descritta dai diversi punti di vista di una sistema di riferimento inerziale, da una parte, e un sistema di riferimento accelerato, dall'altra, si consideri un pendolo semplice sospeso dal tetto di un'auto. La massa del pendolo é m . Applicando la formula $\vec{F} = m\vec{a}$ dal punto di vista di un sistema di riferimento S solidale alla Terra (assumendola non ruotante), si possono tracciare diagrammi isolati per i possibili movimenti della macchina come mostrato in fig. 7.4-1.

Forze agenti su una massa sospesa in a) una macchina ferma, b) una macchina in moto con velocità costante, e c) una macchina in fase di accelerazione positiva.

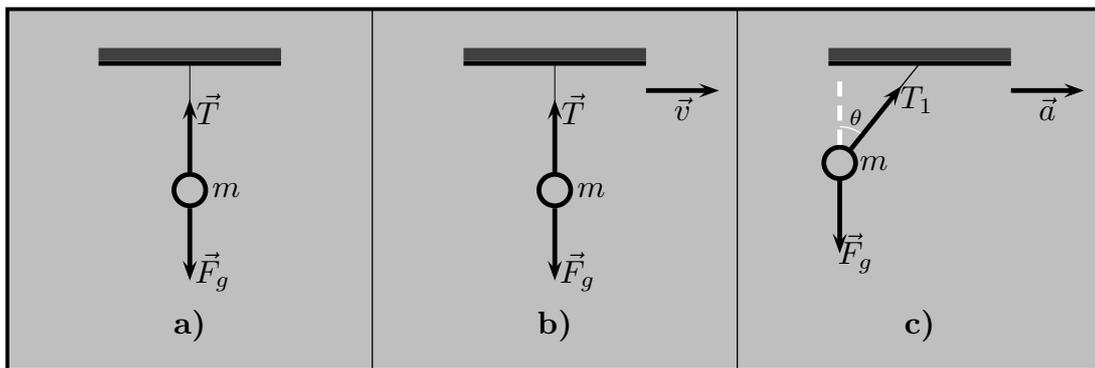


fig.7.4-1

In ciascun caso, vi sono solo due forze (reali) agenti sul pendolino: \vec{F}_g , la forza di gravità, e \vec{T} , la tensione della funicella. I casi a) e b) non coinvolgono l'accelerazione e l'applicazione di $\vec{F} = m\vec{a}$ é banale. In c), il pendolino subisce l'accelerazione verso destra e la corda si blocca ad un certo angolo con un certo aumento della sua tensione (da T a T_1). Il diagramma di corpo libero di figura 7.4-2 a) ci conduce ad applicare $\vec{F} = m\vec{a}$ come segue:

$$\text{Componente orizzontale : } T_1 \sin \theta = ma \quad (7.4.8)$$

$$\text{Componente verticale : } T_1 \cos \theta - mg = 0 \quad (7.4.9)$$

Nel sistema di riferimento S' , tuttavia, a causa dell'accelerazione del sistema di riferimento, vi sarà una forza aggiuntiva di grandezza ma nella direzione opposta alla accelerazione del sistema di riferimento. La figura 7.4-2 b) mostra il diagramma di corpo libero

per un pendolino come visto in S' . Il pendolino é in equilibrio. Qui, l'applicazione di \vec{f}' dá, poiché $\vec{a}' = 0$:

$$T_1 \sin \theta - ma = 0 \tag{7.4.10}$$

$$T_1 \cos \theta - mg = 0 \tag{7.4.11}$$

Cosí, dividendo membro a membro l'equazione (7.4.10) e l'equazione (7.4.11), la inclinazione di equilibrio del pendolino é definita dalla condizione:

$$\tan \theta = \frac{a}{g} \tag{7.4.12}$$

Forze agenti su una massa sospesa che é in quiete rispetto ad una macchina in accelerazione: a) come visto in un sistema di riferimento inerziale e b) come visto in un sistema di riferimento accelerato.

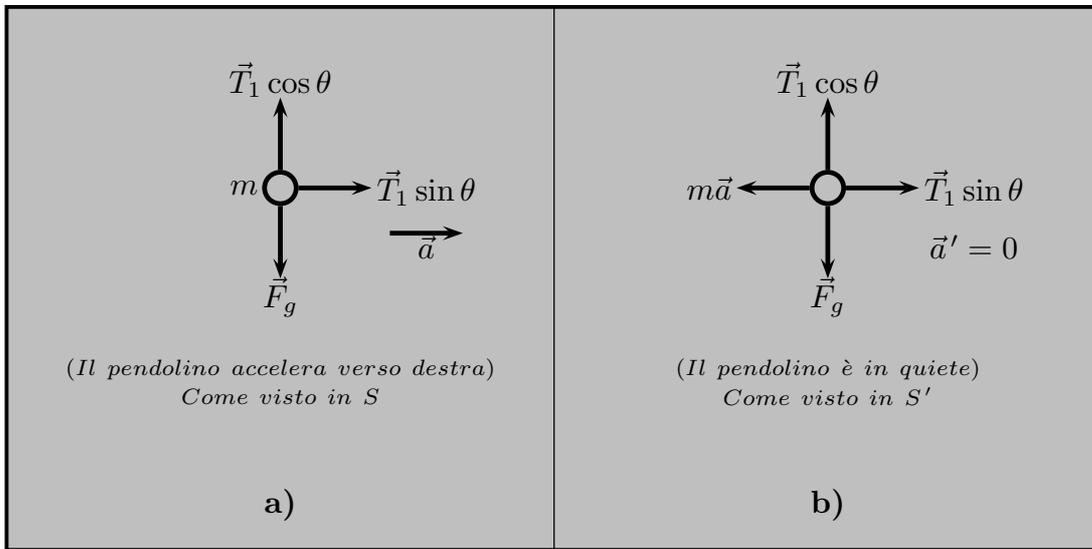


fig.7.4-2

7.5 - Accelerometri

Il risultato espresso dalla equazione (7.4.12) fornisce le basi teoriche per un semplice accelerometro. Se noi abbiamo prima stabilito la direzione verticale vera, rappresentata da $\theta = 0$, l'osservazione dell'angolo di inclinazione di un pendolo in qualsiasi momento successivo ci dice il valore di α attraverso l'equazione:

$$\alpha = g \tan \theta \tag{7.5.1}$$

Per esempio, se un passeggero su un aeroplano lascia che la sua cravatta, o un portachiavi, pendono liberamente dalle sue dita durante la fase di decollo, può fare una stima approssimativa dell'accelerazione, che di solito é quasi costante (figura 7.5-1 a)). Se egli anche registra il tempo dall'inizio della corsa all'istante del decollo, egli può ottenere una stima abbastanza buona della lunghezza della pista e della velocità di decollo. Se egli é piú ambizioso può andare armato di una carta, come in figura 7.5-1 b), già contrassegnato come

goniometro (= misuratore di angolo) o anche calibrato direttamente in termini di accelerazione misurata in unità convenienti (ad esempio, mph al secondo). Un altro semplice accelerometro é ottenuto approntando sotto forma di un livello da falegname costituito da un piccolo galleggiante imperniato completamente immerso in un liquido (figura 7.5-1 c)). Tutti questi dispositivi fanno uso del fatto che la direzione naturale di un impianto idraulico in un telaio accelerato é definita dalla combinazione del vettore di accelerazione gravitazionale \vec{g} e del verso negativo dell'accelerazione \vec{a} del sistema di riferimento stesso.

- a) Cravatta appesa in equilibrio in un veicolo accelerato.
- b) Accelerometro quantitativo basato sulla misurazione dell'angolo di equilibrio di un semplice filo a piombo.
- c) Livella da carpentiere (in questo caso un marker imperniato immerso in un liquido di grande densità) può essere utilizzato come accelerometro.
- d) Una bolla intrappolata in un tubo curvo di liquido dá direttamente letture di accelerazione.

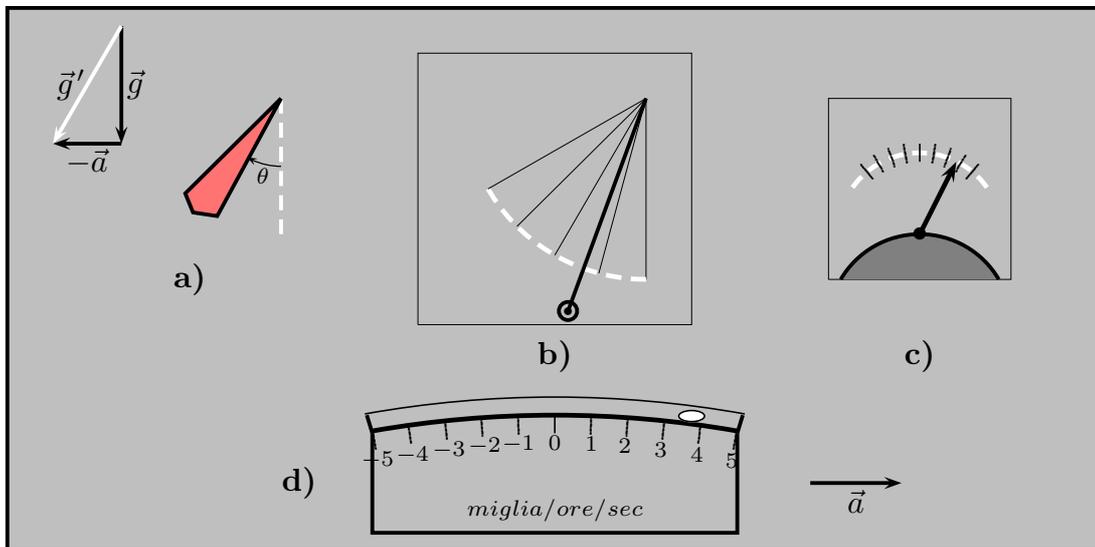
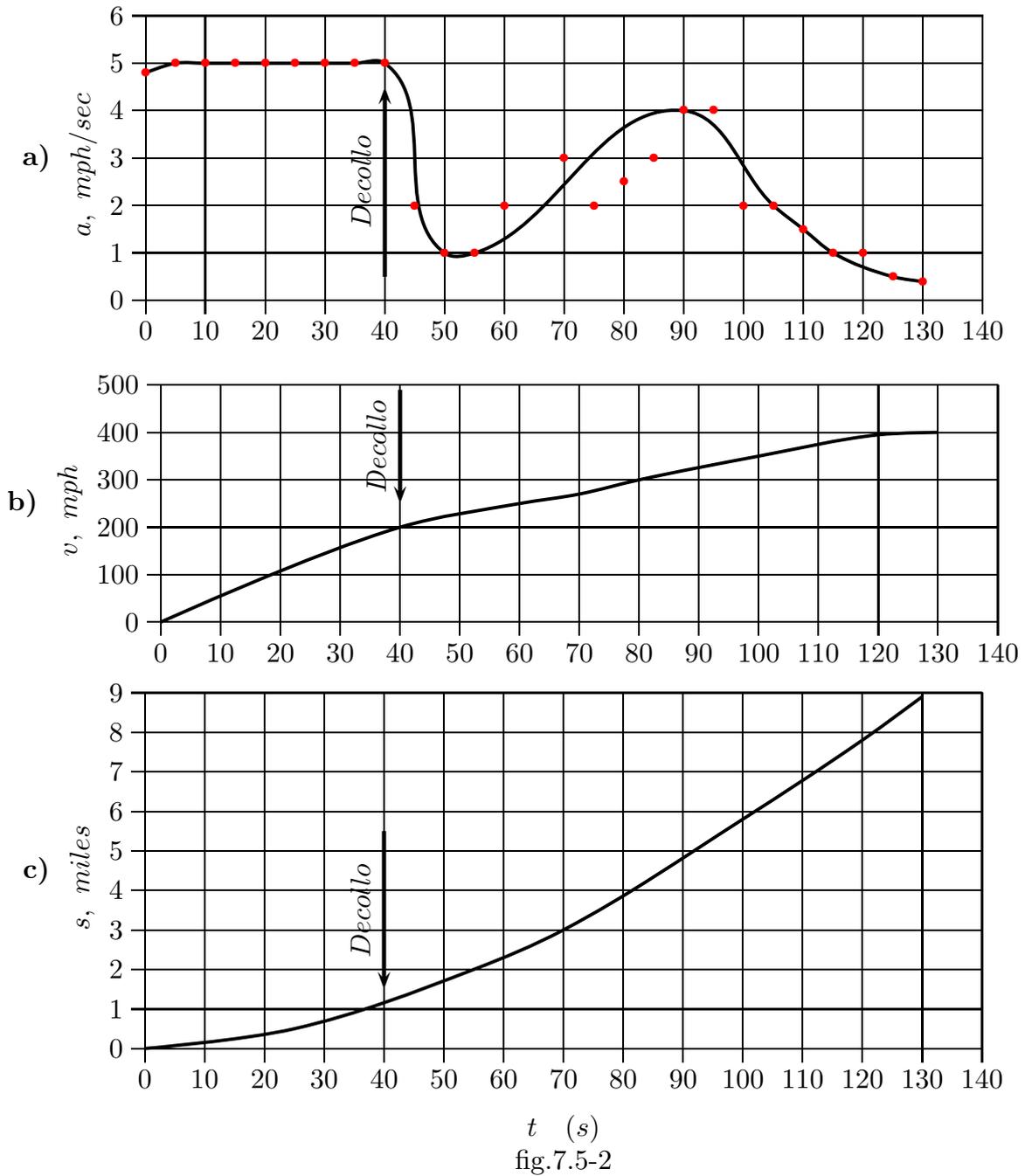


fig.7.5-1

Un accelerometro abbastanza sensibile di questo stesso tipo come base, con l'ulteriore vantaggio di una rapida risposta e un veloce raggiungimento dell'equilibrio (senza overshoot e oscillazioni) può essere fatto curvando un pezzo di tubo di plastica in un arco circolare e riempiendolo di acqua o acetone fino a quando rimane solo una piccola bolla (figura 7.5-1 d)). La figura 7.5-2 a) mostra la registrazione dell'accelerazione in funzione del tempo come ottenuto con tale accelerometro durante il decollo di un aeroplano. La figura 7.5-2 b) e c) mostrano i risultati dell'integrazione numerica di queste registrazioni per ottenere così la velocità e lo spazio percorso.

a) Registrazione ottenuta con l'accelerometro di fig. 7.5-1 d) prima e dopo del decollo di un aereo a reazione commerciale. L'accelerometro) é stato tenuto in modo da registrare soltanto la componente orizzontale dell'accelerazione. Notare la forte diminuzione al decollo. b) Grafico della velocità in funzione del tempo, ottenuto per integrazione grafica di a). c) Grafico della distanza percorsa in funzione del tempo, ottenuto per integrazione grafica di b).



Gli accelerometri di un tipo molto piú sofisticato possono essere realizzati utilizzando estensimetri molto sensibili, con tecniche di misurazione elettrica, per registrare nei minimi dettagli le deformazioni dei sistemi elastici a cui é collegata una massa. La figura 7.5-3 mostra in forma schematica il disegno di tale strumento. Se l'oggetto su cui l'accelerometro é montato subisce un'accelerazione, la forza inerziale sperimentata dal pendolo inizia a defletterlo. Questo, tuttavia, squilibra leggermente un ponte di capacità elettrica in cui il pendolo fa parte di due condensatori, come mostrato. Si ottiene un segnale di errore che viene utilizzato sia per fornire una misura dell'accelerazione sia per pilotare una bobina che applica una forza di ripristino al pendolo. Una tale unità di accelerometro puó avere un intervallo utile da circa $10^{-5}g$ a piú di $10g$.

Sistema accelerometro elettro-meccanico

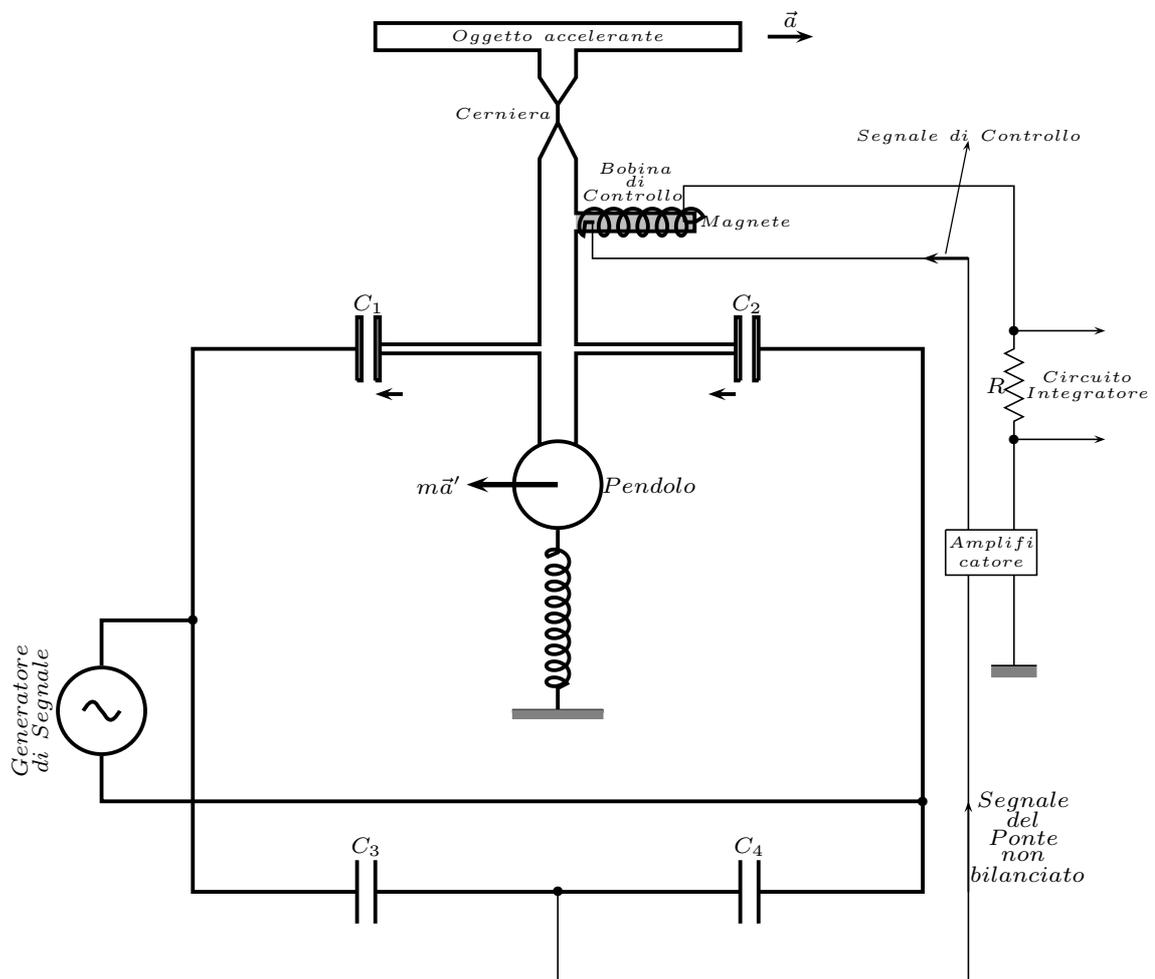


fig.7.5-3

7.6 - Sistemi di riferimenti in accelerazione e Gravità

In tutte le nostre discussioni dei sistemi di riferimento accelerati, abbiamo assunto che gli osservatori sanno "da che parte si trova", cioé conoscono la direzione e l'ampiezza della

forza di gravità e la trattano (come abbiamo fatto) come una vera forza, la cui fonte è la massa gravitazionale della terra. Ma supponiamo che il nostro sistema di riferimento sia una stanza completamente chiusa senza accesso all'ambiente esterno. Cosa si può allora dedurre sulla gravità e sulle forze inerziali attraverso esperimenti dinamiche interamente all'interno della stanza?

Supponiamo ancora una volta che ci sia un osservatore in un sistema di riferimento, S , solidale alla Terra. Questo osservatore non è isolato; egli è in grado di verificare che l'accelerazione verso il basso di una particella che cade dalla posizione di riposo avviene lungo una linea perpendicolare alla superficie terrestre e quindi è diretta verso il centro della terra.¹⁾ Egli è in grado di trarre la conclusione ortodossa che questa accelerazione è dovuta all'attrazione gravitazionale della grande massa della Terra. Il nostro secondo osservatore è rinchiuso in una stanza che definisce il sistema di riferimento S' . Inizialmente si sa che il pavimento della sua stanza è orizzontale e che le pareti sono verticali. Nelle misurazioni successive, tuttavia, l'osservatore in S' trova un filo a piombo sospeso ad un angolo rispetto a quello che aveva precedentemente considerato essere la verticale, e quell'oggetto caduto dalla posizione di riposo viaggia parallelamente al suo filo a piombo. Gli osservatori in S ed S' riportano le loro scoperte l'un l'altro per mezzo della radio. L'osservatore in S' allora conclude che egli ha tre modi alternativi di contabilizzare la componente di forza, parallela al pavimento, che viene ora esercitata su tutte le particelle come osservato nel suo sistema di riferimento:

1. Oltre alla forza gravitazionale, vi è una forza inerziale nella direzione $-x$ dovuta all'accelerazione del suo sistema di riferimento nella direzione $+x$.
2. Il suo sistema di riferimento non è accelerato, ma un oggetto di grande massa è stato posto nella direzione $-x$ fuori dalla sua stanza chiusa, esercitando così un'ulteriore forza gravitazionale su tutte le masse nel suo sistema di riferimento.
3. La sua stanza è stata inclinata di un angolo θ e una massa extra è stata collocata sotto la stanza per aumentare la forza gravitazionale netta. (Questo è vicino ad essere solo una variante dell'alternativa 2).

Supponendo che tutte e tre le ipotesi funzionino egualmente bene per spiegare cosa succede in S' , dobbiamo supporre che l'oggetto voluminoso addizionale, postulato nelle alternative 2 e 3, produca un campo gravitazionale efficacemente uniforme in tutta la stanza.

Da esperimenti dinamiche fatti interamente all'interno della stanza chiusa, non vi è modo di distinguere fra queste ipotesi. L'accelerazione del sistema di riferimento produce effetti che sono identici a quelli dell'attrazione gravitazionale. Forze inerziali e gravitazionali sono entrambe proporzionali alla massa dell'oggetto sotto esame. Le procedure per rivelarle e misurarle sono identiche. Inoltre, esse sono entrambe descrivibile in termini delle proprietà di un *campo* (un campo di accelerazione) che ha una certa intensità e direzione in ogni punto. Un oggetto posto in questo campo sperimenta una certa forza senza bisogno di alcun contatto con corpi vicini. Tutto questo è solo una interessante similitudine o ha un significato più profondo?

¹⁾ Noi ancora ignoriamo la rotazione della Terra, che fa sì che questa affermazione non sia del tutto corretta. Un oggetto che cade non cade esattamente parallelo ad un filo a piombo. Torneremo su questo quando discuteremo di sistemi di riferimento rotanti.

Einstein, dopo aver riflettuto su queste domande, concluse che c'era davvero qualcosa di fondamentale. In particolare, la proporzionalità completamente esatta (per quanto si può determinare tra forza gravitazionale e massa inerziale suggeriva che nessuna distinzione fisica poteva essere tracciata, almeno all'interno di una regione limitata, tra un campo gravitazionale e un'accelerazione generale del sistema di riferimento (vedi fig. 7.6-1).

- a) Mela che cade dentro una scatola che poggia sulla terra.
 b) Moto indistinguibile quando la mela è all'interno della scatola accelerata nello spazio esterno.

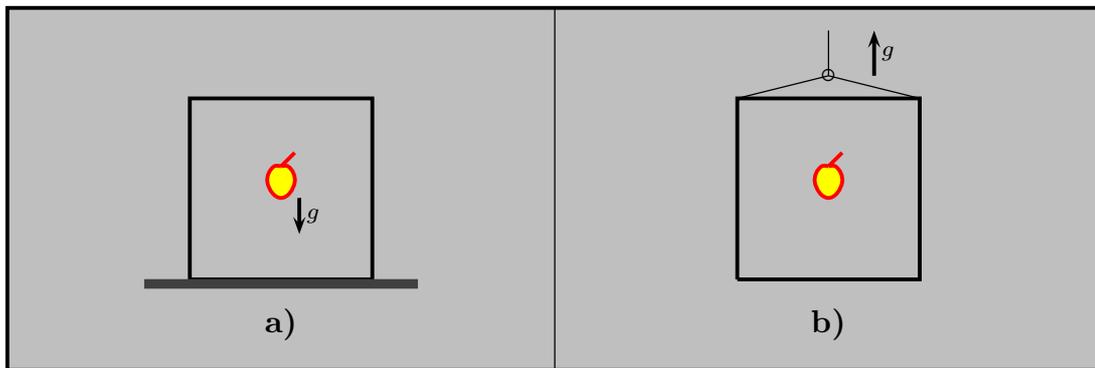


fig.7.6-1

Egli annunciò questo, suo famoso principio di equivalenza, nel 1911.¹⁾ La proporzionalità della forza gravitazionale alla forza inerziale diventa, ora, una esatta necessità, non un risultato empirico e inevitabilmente approssimato. È anche implicito che qualsiasi cosa attraversi un campo gravitazionale debba seguire una traiettoria curva, poiché tale curvatura apparirebbe su basi puramente cinematiche e geometriche se sostituissimo il campo gravitazionale con l'accelerazione equivalente del nostro stesso sistema di riferimento. In particolare, questo dovrebbe accadere con i raggi di luce (fig.7.6-2). Con l'aiuto di queste idee Einstein procedette a costruire la sua teoria generale della Relatività, che primaria-

¹⁾ A. Einstein, Ann. Phys. (4) 35, 898 (1911), tradotto in The Principle of Relativity, Dover Edition, 1958.

mente é una teoria geometrica della gravitazione.

Stadi successivi del percorso di un oggetto che viaggia orizzontalmente come osservato all'interno di un scatola che accelera verticalmente verso l'alto. Questo illustra l'equivalente della gravitá e una accelerazione generale del sistema di riferimento.

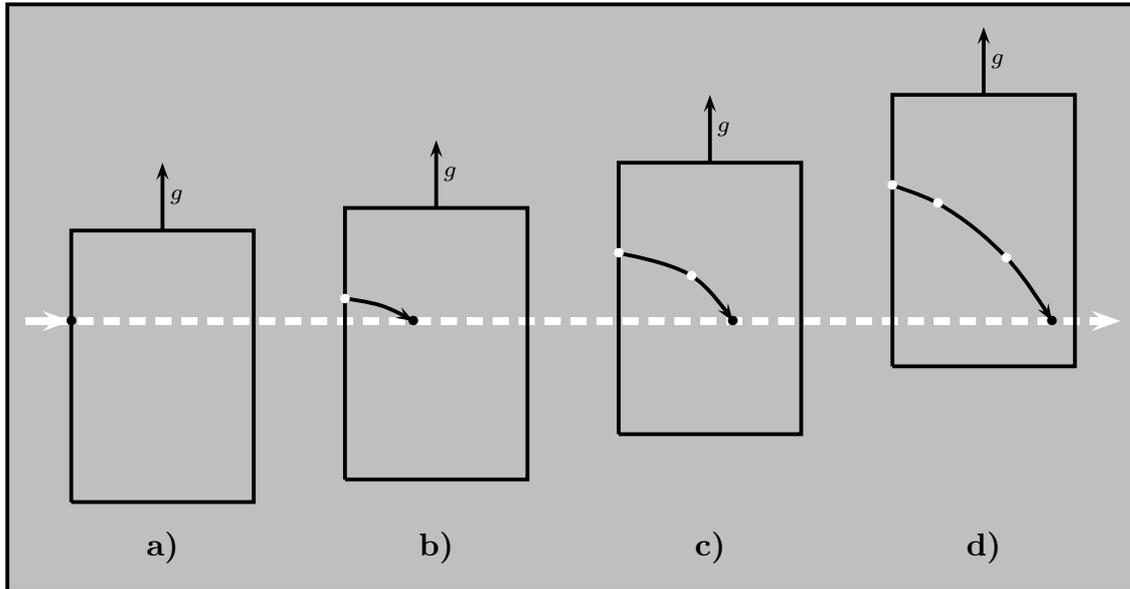


fig.7.6-2

7.7 - Forza Centrifuga

Noi considereremo, ora, un particolare tipo di forza di inerzia che sempre appare se il moto di una particella é descritto e analizzato dal punto di vista di un sistema di riferimento ruotante. Questa forza, *la forza centrifuga* ci é familiare come la forza con cui, per esempio, un oggetto sembra essere tirato verso di noi se lo giriamo intorno alla fine di una corda. Per introdurre tale forza, consideriamo una situazione di tale tipo.

Supponiamo che una 'palla di piombo' viene ruotato su un moto circolare orizzontale a velocità costante (vedi figura 7.7-1). Analizzeremo il moto della palla come visto da due punti di vista: un sistema di riferimento stazionario S , ed un sistema di riferimento ruotante S' che ruota con la stessa velocità angolare costante della palla. Per convenienza, allineeremo i sistemi di coordinate con gli assi z e z' coincidenti (cosí come le origini). La velocità angolare di S' relativa ad S sará indicata con ω (in rad./s). La figura 7.7-1 mostra l'analisi rispetto a questi due sistemi di riferimento. Le conclusioni essenziali sono queste:

1. Dal punto di vista del sistema di riferimento stazionario (inerziale), la palla ha una accelerazione ($-\omega^2 r$) verso l'asse di rotazione. La forza, F_r , che causa questa accelerazione é fornita da una cordicella che la lega, e dobbiamo avere:

$$(In S) \quad F_r = -m\omega^2 r \quad (7.7.1)$$

Moto di una palla sospesa che si muove su una circonferenza orizzontale, e analizzata dal sistema di riferimento solidale alla Terra e da un sistema di riferimento ruotante con la palla.

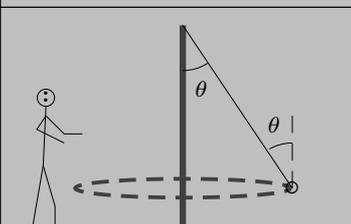
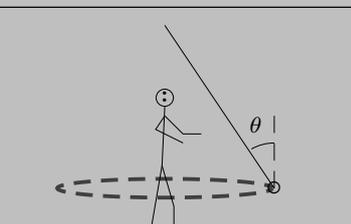
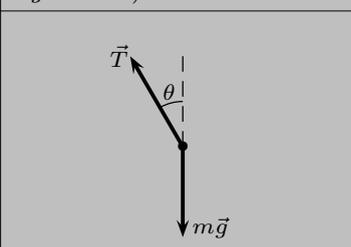
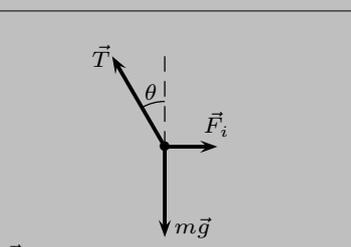
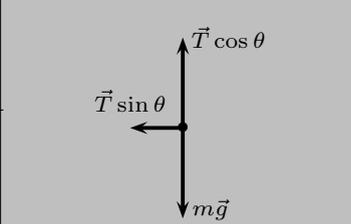
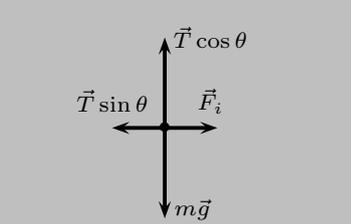
Procedura	Vista dal sistema in quiete S	Vista dal sistema ruotante S'
<p>Descrizione grafica del problema</p>	 <p>La palla è osservata muoversi con velocità v in una circonferenza di raggio r (velocità angolare ω)</p>	 <p>Il ragazzo ruota con la stessa velocità angolare ω; dal suo punto di vista la palla è a riposo.</p>
<p>Diagramma di corpo libero</p>		 <p>\vec{T} = Tensione della corda $m\vec{g}$ = Forza di gravità F_i = Forza d'inerzia dovuta alla visualizzazione del problema da un sistema di riferimento ruotante</p>
<p>Componenti delle forze nelle direzioni mutuamente perpendicolari</p>		
<p>Analisi in termini di $\vec{F} = m\vec{a}$</p>	<p><u>Direzione Verticale</u> La forza verticale netta è 0 Quindi: $T \cos \theta = mg$</p> <p><u>Direzione Orizzontale</u> L'oggetto si muove di moto circolare, quindi accelerato; la forza netta è orizzontale verso il centro del cerchio, e deve essere eguale a $\frac{mv^2}{r}$; quindi: $T \sin \theta = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$ Questa forza è diretta radialmente verso l'interno.</p>	<p><u>Direzione Verticale</u> La forza verticale netta è 0 Quindi: $T \cos \theta = mg$</p> <p><u>Direzione Orizzontale</u> L'oggetto è in quiete, quindi la somma di tutte le forze su di esso deve essere zero; quindi F_i è eguale in grandezza a $T \sin \theta$. Quindi: $F_i = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$ Questa forza è diretta radialmente verso l'esterno. F_i prende il nome di <u>Forza Centrifuga</u>.</p>

fig.7.7-1

2. Dal punto di vista di un sistema di riferimento ruotante, in modo da mantenere il ritmo esatto con la palla, l'accelerazione della palla é zero. Noi possiamo mantenere la validitá della legge di Newton nel sistema ruotante se, in aggiunta della forza F_r , la palla sperimenta una forza inerziale F_i , eguale in intensitá ed opposta in verso a F_r , e cosí diretta radialmente verso l'esterno:

$$(In S') \quad \begin{cases} F' = F_r + F_i = 0 \\ F_i = m\omega^2 r \end{cases} \quad (7.7.2)$$

La forza F_i é allora quella che noi chiamiamo **forza centrifuga**.

La grandezza della forza centrifuga puó essere stabilita sperimentalmente da un osservatore nel sistema ruotante S' . Egli trattiene una massa m stazionaria (come si vede nel suo sistema di riferimento ruotante) attaccandola a una molla a spirale (vedi figura 7.7-2).

Molla a spirale fissata all'asse di rotazione che é perpendicolare al piano del foglio. Misura della forza necessaria per tenere un oggetto in quiete in un sistema di riferimento ruotante.

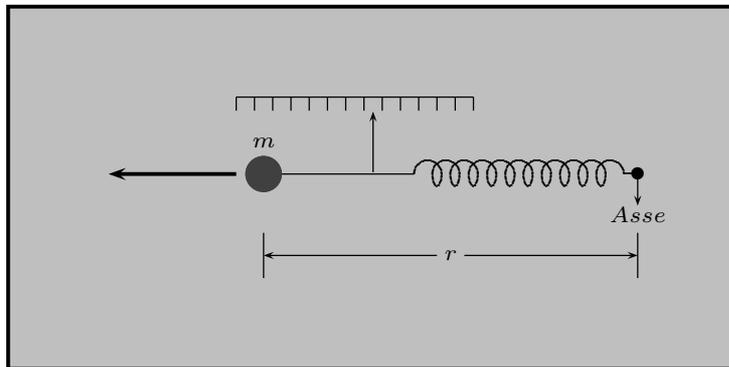


fig.7.7-2

Se la massa é in qualsiasi posizione tranne sull'asse di rotazione, la molla mostrerá che sta esercitando sulla massa una forza interna proporzionale a m ed r . Se l'osservatore in S' é informato che il suo sistema di riferimento é ruotante alla velocitá angolare ω (rad/s), egli puó confermare che questa forza é eguale a $m\omega^2 r$. L'osservatore spiega l'estensione della molla dicendo che sta contrastando la forza centrifuga verso l'esterno su m che é presente nel sistema di riferimento ruotante. Inoltre se la molla si rompe, allora la forza netta sulla massa é solo la forza centrifuga e l'oggetto avrá in quell'istante un'accelerazione verso l'esterno di $\omega^2 r$ in risposta a questa cosí chiamata forza 'fittizia'. Ancora una volta la forza inerziale é "qui" per ogni criterio che possiamo applicare (eccetto la nostra incapacitá di trovare un altro sistema fisico come sorgente).

La grandezza della forza centrifuga é data, come noi abbiamo visto, dall'equazione:

$$F_{centrifuga} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r \quad \text{radialmente verso l'esterno} \quad (7.7.3)$$

Un bell'esempio del nostro uso quasi intuitivo di questa forza, in condizioni in cui non c'é nulla da equilibrare, é fornito da una situazione come la seguente: abbiamo lavato un

pezzo di tubo dritto e vogliamo farlo asciugare all'interno. Come primo passo ci liberiamo dalle grandi gocce d'acqua che stanno attaccate sulle pareti interne. E noi facciamo questo, non scuotendo il tubo longitudinalmente, ma girandolo su un arco circolare (fig.7.7-3 a)). L'analisi di ciò che accade mentre iniziamo questa rotazione fornisce un quadro particolarmente chiaro della differenza tra le descrizioni dei processi nei sistemi di riferimento stazionari e rotanti. Ci fornisce anche un modo diverso di derivare la formula per la forza centrifuga stessa.

- a) **Rimuovere una goccia d'acqua da un tubo.**
 b) **Analisi del moto iniziale in termini di forze centrifughe.**

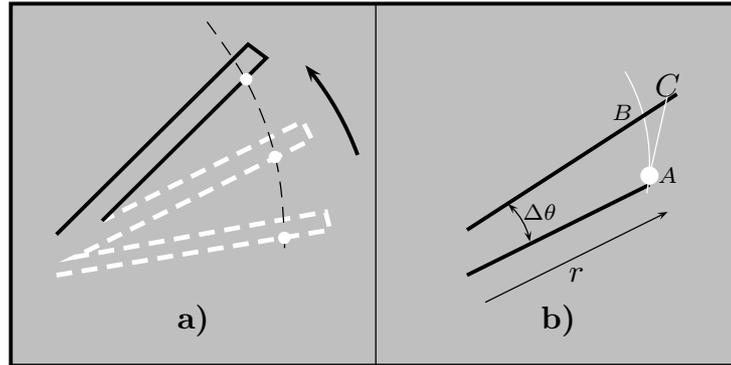


fig.7.7-3

Supponiamo che una goccia, di massa m , è attaccata sulla parete interna del tubo in un punto A (fig.7.7-3 b)), ad una distanza r dall'asse di rotazione. Supponiamo che il tubo sia molto liscio, in modo che la goccia non incontri resistenza se si muove lungo il tubo. La goccia deve, tuttavia, essere trasportata lungo in qualsiasi movimento trasversale del tubo risultante dalla rotazione. Quindi se il tubo viene improvvisamente messo in movimento e ruotato attraverso una piccola angolazione $\Delta\theta$, la goccia, ricevendo un impulso normale alla parete del tubo in A, si sposta lungo la linea retta AC. Questo, tuttavia, significa che ora è più lontano dall'asse di rotazione che se fosse stato fissato al tubo e avesse viaggiato lungo l'arco circolare AB. Noi abbiamo, infatti:

$$BC = r \sec \Delta\theta - r \quad (7.7.4)$$

Ora:

$$\sec \Delta\theta = (\cos \Delta\theta)^{-1} \simeq \left[1 - \frac{1}{2}(\Delta\theta)^2 \right]^{-1} \simeq 1 + \frac{1}{2}(\Delta\theta)^2 \quad (7.7.5)$$

Quindi:

$$BC \simeq \frac{1}{2}r(\Delta\theta)^2 \quad (7.7.6)$$

Noi possiamo, tuttavia, esprimere $\Delta\theta$ in termini della velocità angolare ω e il tempo Δt : $\Delta\theta = \omega\Delta t$. Così noi abbiamo:

$$BC = \frac{1}{2}\omega^2 r(\Delta t)^2 \quad (7.7.7)$$

Questo é allora riconoscibile come lo spostamento radiale che occorre nel tempo Δt sotto una accelerazione $\omega^2 r$. Quindi noi possiamo porre:

$$a_{centrifuga} = \omega^2 r \quad (7.7.8)$$

e cosí:

$$F = m\omega^2 r \quad (7.7.9)$$

Si noti, quindi, che ciò che é, in effetti, un piccolo spostamento trasversale in una linea retta, senza alcuna forza reale nella direzione radiale, appare nel sistema di riferimento del tubo come un piccolo spostamento puramente radiale sotto la forza centrifuga non equilibrata. Il fatto fisico che la goccia si muove verso l'esterno lungo il tubo é facilmente comprensibile in termini di entrambe le descrizioni. (Dovremmo aggiungere, tuttavia, che la nostra analisi cosí com' é si applica solo alla fase iniziale del moto. Una volta che la goccia ha acquisito una velocità radiale apprezzabile, le cose diventano piú complicate).

Il termine 'forza centrifuga' é frequentemente usato in modo non corretto. Per esempio, uno puó leggere tale locuzione come "Il satellite non cade giú come esso si muove attorno alla Terra perché la forza centrifuga é semplicemente contrastata dalla forza di gravità e quindi non vi é una forza netta che lo faccia cadere". Ogni tale affermazione trasgredisce la prima legge di Newton, "Un corpo sul quale non agisce alcuna forza netta viaggia in linea retta....."

Per questo il satellite é descritto muoversi in una traiettoria attorno alla Terra, deve anche avere una forza non bilanciata su di esso. Il solo sistema di riferimento in cui la forza centrifuga bilancia la forza gravitazionale é il sistema di riferimento in cui il satellite sembra non muoversi affatto. Uno puó, naturalmente, considerare la descrizione di tale moto rispetto ad un sistema di riferimento ruotante con una frequenza arbitraria diversa da quella dell'oggetto stesso. In questo caso, tuttavia, il contributo centrifugo alla forza inerziale rappresenta solo una parte della storia, ed il semplice 'bilanciamento' di forze 'reali' e centrifughe non si applica. In particolare, reenfasizziamo che in un sistema di riferimento non ruotante non vi é tale cosa come la forza centrifuga. La longeva confusione che porta il popolo ad usare il termine forza centrifuga incorrettamente ha guidato almeno un autore all'estrema vessazione. In un testo altrimenti sobrio e abbastanza formale l'autore scrive: Non c' é risposta a queste persone. alcuni di loro sono buoni cittadini. Votano il biglietto del partito responsabile della prosperità del paese; appartengono all'unica vera chiesa; si iscrivono alla guida della Croce Rossa, ma non hanno posto nel Tempio della Scienza; lo profanano.¹⁾

7.8 - Centrifughe

Il laboratorio centrifugo rappresenta una applicazione immensamente importante e diretta del principio della dinamica della forza centrifuga. La disposizione di base di un semplice tipo di centrifuga é mostrato in figura 7.8-1 a). Tubi di liquido accuratamente bilanciati sono sospesi su perni lisci da un rotore. Quando il rotore viene fatto girare ad alta velocità, i tubi oscillano verso l'alto e verso l'esterno in posizioni quasi orizzontali e

¹⁾ W. F. Osgood: Mechanics, Macmillan, New York, 1937.

possono essere mantenuti in questo orientamento per molte ore. In qualunque punto P in uno dei tubi (vedi figura 7.8-1 b)), distante r dall'asse di rotazione, vi é un effettivo campo gravitazionale di grandezza $\omega^2 r$, che puó essere reso molto piú grande di g . Per esempio, se $r = 15 \text{ cm}$ e il rotore ruota a 25 rps (giri al secondo) ($\omega = 50\pi \text{ s}^{-1}$), il valore di $\omega^2 r$ é circa 4000 m/s^2 o $400g$. Piccole particelle in sospensione nel liquido saranno guidate verso l'esterno (il fondo) alla fine del tubo molto piú velocemente di quelli che sarebbero stati sotto l'azione della gravitá soltanto.

- a) Sezione verticale attraverso una semplice centrifuga.
 b) Analisi di sedimentazione radiale in termini di forze centrifughe.

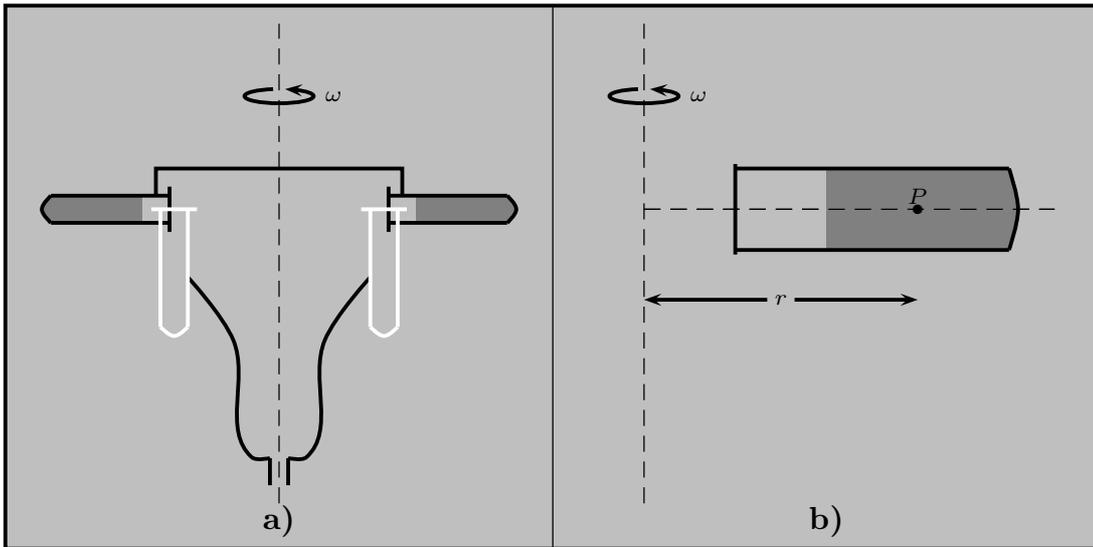


fig.7.8-1

La base per il calcolo della velocità di deriva é la formula per la forza resistiva al moto attraverso un fluido a bassa velocità. Per una particella sferica di raggio r e velocità v , questa forza é proporzionale al prodotto rv . se il mezzo é l'acqua, la grandezza approssimata della forza é data da:

$$R(v) \simeq 0.02rv \quad (7.8.1)$$

dove R é espresso in Newton, r in metri, e v in m/s . Un valore stazionario di v é ottenuto quando questa forza bilancia la forza guidante associata con l'effettiva intensitá del campo gravitazionale, g' . Nel calcolare questa forza guidante é importante consentire effetti di galleggiabilitá, cioé il principio di Archimede. Se la densitá della particella é ρ_p e la densitá del liquido é ρ_l , la forza guidante é data da:

$$F = \frac{4}{3}(\rho_p - \rho_l)r^3 g' \quad (7.8.2)$$

Questo puó essere piú semplicemente espresso se noi introduciamo la massa vera m della particella ($=4\pi\rho_p r^3$), in qual caso noi possiamo porre:

$$F = \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_p}\right) mg' \quad (7.8.3)$$

Per portare un esempio specifico, supponiamo di avere una sospensione acquosa di particelle batteriche di raggio 1μ , ognuna con una massa di circa $5 \cdot 10^{-15} \text{ Kg}$ ed una densità di circa 1.1 volte quella dell'acqua. Se noi prendiamo per g' il valore di $400g$ calcolato prima, noi troviamo:

$$F = 2 \cdot 10^{-12} \text{ N} \quad (7.8.4)$$

Noi così otteniamo una velocità di deriva data da:

$$v = \frac{2 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}} \simeq 10^{-4} \text{ m/s} \quad (7.8.5)$$

Questa rappresenta una velocità di sedimentazione di diversi centimetri all'ora, il che rende la separazione efficace in tempi ragionevoli, mentre sotto la normale forza di gravità si avrebbe solo un millimetro o due al giorno.

L'esempio sopra rappresenta ciò che si può considerare come un tipo più o meno regolare di centrifugazione, ma nel 1925 il chimico svedese T. Svedberg aprì un campo completamente nuovo di ricerca quando, ottenendo campi centrifughi migliaia di volte più forti di g , riuscì a misurare i pesi molecolari delle proteine studiando la loro sedimentazione radiale. Il tipo di macchina che egli ha sviluppato per questo scopo è stato chiamato appropriatamente l'ultracentrifuga, e Svedberg è riuscito a produrre campi centrifughi alti fino a circa $50000g$. Il fisico J. W. Beams ha portato la tecnica ancora più in là attraverso il suo sviluppo della sospensione magnetica, nel vuoto, che elimina del tutto i cuscinetti meccanici. Il rotore semplicemente ruota nello spazio vuoto, con campi magnetici attentamente controllati per tenerlo a un livello verticale costante contro la normale forza di gravità. Con tale metodo Beams ha prodotto campi centrifughi equivalenti a circa 10^6g in una centrifuga utilizzabile e campi alti come 10^9g in piccoli oggetti (sfere di 0.001 pollici di diametro). La limitazione è stabilita dalla velocità di rottura del rotore; questo definisce un valore massimo di ω proporzionale a $1/r$. Poiché il campo centrifugo g' è eguale a $\omega^2 r$, e la velocità limite impone un limite superiore a ωr , si può vedere che il valore ottenibile di g' varia come $1/r$.

La tecnica del metodo ultracentrifugo è stata portata a un passo straordinario di raffinatezza. è diventato possibile determinare i pesi molecolari con una precisione migliore dell'1% su un intervallo da circa 10^8 (particelle di virus) fino a quelli più bassi di circa 50. La possibilità di misurare pesi molecolari molto bassi con questo metodo è particolarmente impressionante. Beams ha sottolineato che in una soluzione di saccarosio in acqua, il tasso calcolato di discesa di una singola molecola di saccarosio, di massa di circa 340 amu (atomic mass unity) e raggio circa 5 \AA , dovrebbe (secondo il tipo di analisi che abbiamo dato in precedenza) essere inferiore a 1 mm in 100 anni in condizioni di gravità normale. (Una velocità tanto lenta che di fatto diventa insignificante perché, come sottolinea Beams, sarebbe completamente sommersa da un movimento termico casuale). Se un campo di 10^5g è disponibile, tuttavia, la costante di tempo del processo di sedimentazione è ridotto all'ordine di un giorno o meno, che porta le misure bene all'interno della gamma di possibilità.¹⁾

¹⁾ Per ulteriori letture su questo soggetto estremamente interessante vedi: Svedberg T. and Pederson K. O.: The Ultracentrifuge, Oxford University Press, New York, 1960; Beams J. W.: High Centrifugal Fields, Physics Teacher 1, 103 (1963).

Questo intero soggetto di centrifughe e centrifugazione é una particolarmente buona applicazione del concetto di forza inerziale, perché i fenomeni sono cosí appropriatamente descritti in termini di equilibrio statico o quasi statico nel sistema di riferimento ruotante.

7.9 - Forze di Coriolis

Abbiamo visto come la forza centrifuga, $m\omega^2 r$, esercitata su una particella di una data massa m in un sistema di riferimento ruotante ad una data velocità angolare ω , dipende soltanto dalla distanza r della particella dall'asse di rotazione. In generale, tuttavia, un'altra forza inerziale appare in un sistema ruotante. Questa é la **forza di Coriolis**,^{2),3)} e dipende soltanto dalla velocità della particella (non dalla sua posizione). Introduremo questa forza in un modo semplice per alcune situazioni specifiche. Dopo, introducendo espressioni vettoriali per il moto rotazionale, svilupperemo una notazione succinta che dá sia le forze centrifughe sia le forze di Coriolis in una forma valida in tre dimensioni utilizzando qualunque tipo di sistema di coordinate.

L'esigenza di introdurre la forza di Coriolis é facilmente mostrata confrontando il moto rettilineo di una particella in un sistema di riferimento inerziale S con il moto della stessa particella come visto in un sistema di riferimento ruotante S' .

Supponiamo che S' sia un sistema di riferimento solidale ad un tavolo circolare orizzontale che ruota con velocità angolare costante ω . L'asse verticale di rotazione definisce l'asse z' e supponiamo che la superficie del tavolo, nel piano $x'y'$, non abbia attrito. Una cordicella fissata all'origine trattiene una particella sull'asse delle coordinate y' ad una distanza radiale r'_0 dall'asse di rotazione. Cosí nel sistema S' , la particella é a riposo in equilibrio sotto le forze combinate della tensione del filo e della forza centrifuga. (La forza verticale di gravità e la forza normale della superficie del tavolo danno risultante nulla e, quindi, non é necessario che ci riguardino ulteriormente).

La stessa particella é vista da un sistema inerziale S che coincide con S' all'istante $t = 0$. In questo sistema di riferimento stazionario, la particella viaggia con velocità uniforme $v_0 = \omega r_0$ descrivendo una circonferenza di raggio costante r_0 ($= r'_0$) sotto la singola forza non bilanciata della tensione nel filo. In questo sistema inerziale non vi é naturalmente alcuna forza centrifuga.

All'istante $t = 0$ la cordicella viene spezzata. Ne sistema S la particella allora viaggia in linea retta con velocità costante $v = \omega r_0$ come mostrato in figura 7.9-1 a). Per trovare il moto in S' , confrontiamo nel sistema di riferimento stazionario le posizioni dell'asse y' e la corrispondenti posizioni della particella nei successivi intervalli di tempo egualmente spaziatati. Scopriamo che la particella, come osservata in S' , non solo si muove radialmente verso l'esterno, ma anche si muove allontanandosi verso la destra della singola linea radiale formata con l'asse ruotante y' . Questo risultato é rappresentato in figura 7.9-1 b). Per spiegare questo moto come osservato nel sistema ruotante, é necessario postulare in aggiunta alla forza centrifuga, una forza deviante lateralmente. Questa forza deflettente é la **forza di Coriolis**. Nel corso della seguente discussione, noi determineremo la sua grandezza e

²⁾ Gaspard-Gustave de Coriolis (Parigi, 21 maggio 1792 - Parigi, 19 settembre 1843); é stato un matematico, fisico e ingegnere meccanico francese.

³⁾ G. Coriolis, J. de l'Ecole Polytechnique, Cahier 24, 142 (1835).

mostriamo che essa agisce sempre ad angoli retti a qualunque velocità \vec{v}' nel sistema di riferimento S' .

Due differenti descrizioni del moto di un oggetto che è inizialmente legato su un disco ruotante e comincia il moto con nessuna forza agente su di esso all'istante $t=0$

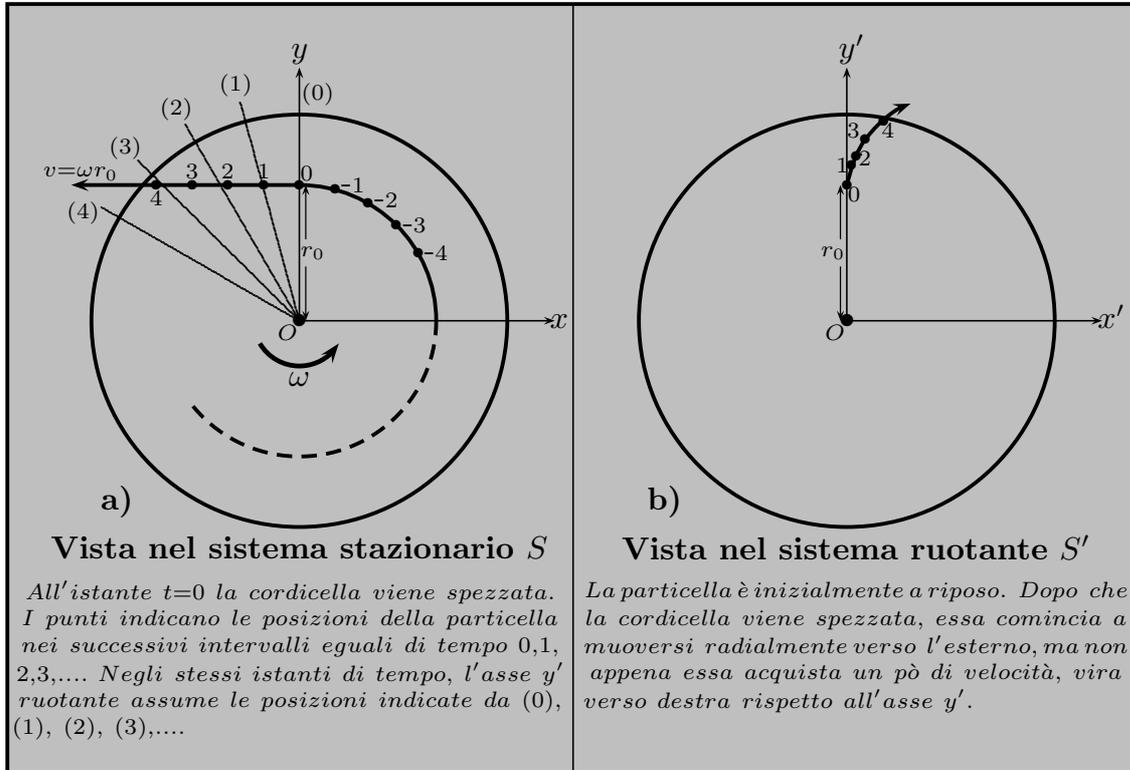


fig.7.9-1

Possiamo trovare la grandezza della forza di Coriolis investigando un altro semplice moto in questi due sistemi di riferimento. Supponiamo che, invece della situazione appena descritta, facciamo seguire ad una particella un percorso radialmente verso l'esterno, nel sistema di riferimento ruotante, a velocità costante \vec{v}'_r . In questo sistema non vi è nessuna forza netta sulla particella. Quindi dovremo fornire una forza reale (verso l'interno) per contrastare la forza centrifuga (verso l'esterno) variabile man mano che la particella si muove. Non ci occuperemo di queste componenti radiali, ma concentreremo la nostra attenzione solo sulle componenti trasversali della forza. In questo modo possiamo rimuovere dalle considerazioni la distorsione della traiettoria dalla forza centrifuga che è puramente radiale.

Come appare il moto nei due sistemi? La figura 7.9-2 b) mostra la traiettoria in linea retta dell'oggetto nel sistema ruotante. Ma il percorso dell'oggetto nel sistema stazionario è una linea curva AB come mostrato in figura 7.9-2 a). In S la velocità trasversale $v_\theta(\omega r)$ è più grande in B di A, perché la distanza radiale dall'asse è più grande in B. Quindi vi deve essere una forza reale trasversale per produrre questo aumento di velocità visto nel sistema di riferimento stazionario. Questa forza reale può essere fornita, per esempio, da una molla a spirale.

Come appare questo moto nel sistema di riferimento ruotante? In S' l'oggetto si muove verso l'esterno con velocità costante e quindi non ha alcuna accelerazione (vedi figura 7.1-2 b). Questo significa, come noi abbiamo detto, che non vi può essere forza netta sull'oggetto nel sistema di riferimento ruotante. Ma poiché un osservatore in S' vede la molla a spirale esercitare una forza reale laterale sull'oggetto nella direzione $+\theta$, egli deduce che vi è una forza inerziale contrastante nella direzione $-\theta$ per bilanciarla. Questa è la forza di Coriolis.

a) Vista nel sistema del Laboratorio della traiettoria di una particella che si muove radialmente verso l'esterno su un tavolo ruotante. b) Il moto come appare nel sistema ruotante stesso.

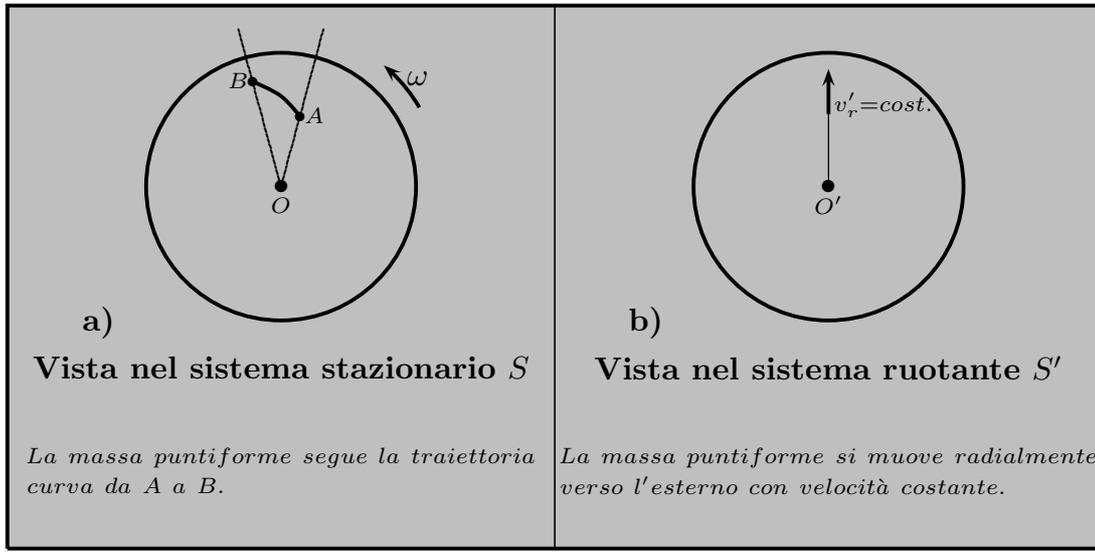


fig.7.9-2

Per determinare la sua grandezza, siano OA e OB in figura 7.1-3 le posizioni successive della stessa linea radiale in due istanti separati da Δt . Sia OC la bisettrice dell'angolo $\delta\theta$.

Base di calcolo della forza di Coriolis per una particella che si muove radialmente a velocità costante rispetto ad un tavolo ruotante.

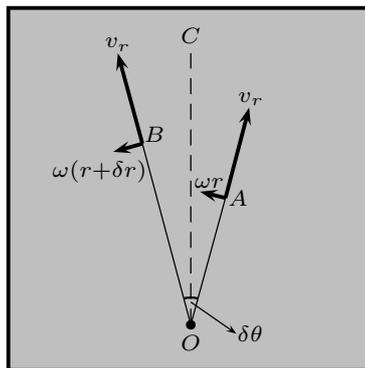


fig.7.9-3

La velocità perpendicolare a OC varia di una quantità Δv_θ durante Δt , dove

$$\Delta v_\theta = [\omega(r + \Delta r) \cos(\Delta\theta/2) + v_r \sin(\Delta\theta/2)] - [\omega r \cos(\Delta\theta/2) - v_r \sin(\Delta\theta/2)] \quad (7.9.1)$$

Per piccoli angoli possiamo porre il coseno eguale a uno ed il seno eguale all'angolo, il che conduce alla seguente molto semplice espressione per Δv_θ :

$$\Delta v_\theta \simeq [\omega(r + \Delta r) + v_r \Delta\theta/2] - [\omega r - v_r \Delta\theta/2] \quad (7.9.2)$$

$$\Delta v_\theta \simeq \cancel{\omega r} + \omega \Delta r + v_r \Delta\theta/2 - \cancel{\omega r} + v_r \Delta\theta/2 \quad (7.9.3)$$

$$\Delta v_\theta \simeq \omega \Delta r + v_r \Delta\theta \quad (7.9.4)$$

L'accelerazione trasversale a_θ é così data da:

$$a_\theta = \omega (\Delta r / \Delta t) + v_r (\Delta\theta / \Delta t) \quad (7.9.5)$$

Ma:

$$\Delta r / \Delta t = v_r \quad e \quad \Delta\theta / \Delta t = \omega \quad (7.9.6)$$

Quindi:

$$a_\theta = 2\omega v_r \quad \implies \quad F_\theta = 2m\omega v_r \quad (7.9.7)$$

Questa ci dá la forza reale necessaria a causare l'accelerazione come giudicato in S . Ma come osservato nel sistema ruotante S' , non vi é accelerazione e nessuna forza netta. Quindi l'esistenza della forza di Coriolis, eguale a $-2m\omega v'_r$, é dedotta. (Notare che $v_r = v'_r$). Questa forza inerziale é nella direzione negativa θ' , opposta alla forza della molla, ed é ad angoli retti alla direzione del moto della particella:

$$F'_\theta(\text{Coriolis}) = -2m\omega v'_r \quad (7.9.8)$$

Una importante caratteristica, che dovresti verificare per te, é che se avessimo considerato un movimento radialmente verso l'interno (v'_r negativo), avremmo inferito l'esistenza di una forza di Coriolis che agisce nella direzione positiva θ' . In entrambi i casi, quindi, la forza di Coriolis agisce nel deflettere l'oggetto nello stesso modo rispetto alla direzione della velocità \vec{v}' stessa - verso destra se il sistema di riferimento ruotante S' ruota in senso antiorario, come noi abbiamo assunto, o a sinistra se S' ruota in senso orario. Risulta, infatti, come dimostreremo in seguito, che anche nel caso del movimento in una direzione arbitraria la forza di Coriolis é sempre una forza deflettitrice, esercitata perpendicolarmente alla direzione del movimento osservata nel sistema di riferimento rotante.

La forza di Coriolis é molto reale dal punto di vista del sistema di riferimento ruotante. Se desiderate convincervi della realtá di questa forza 'fittizia', cavalcate una giostra ruotante e provate a percorrere una linea radiale verso l'esterno o verso l'interno. (Procedi con cautela, la forza di Coriolis é cosí inaspettata e sorprendente che é facile perdere l'equilibrio!)

7.10 - Dinamica su una giostra

Come abbiamo appena menzionato, il comportamento degli oggetti in movimento all'interno di un sistema di riferimento ruotante puó avvenire in modo molto contrario alle intuizioni. Non é troppo difficile abituarsi all'esistenza della forza centrifuga che agisce

su un oggetto a riposo rispetto al sistema di riferimento ruotante, ma la combinazione di effetti centrifughi e di Coriolis che appaiono quando l'oggetto é messo in moto puó essere piuttosto sconcertante, e qualche volta divertente. Supponiamo, per esempio, che un uomo stia in piedi in un punto A su una giostra come in figura 7.2-1 a) e cerca di lanciare una palla a qualcuno in B (o forse di lanciare una freccetta nel centro di un bersaglio posto lí). Allora l'oggetto lanciato gira misteriosamente a destra e manca il bersaglio ogni volta. Si puó dar colpa ad una parte di questo, ovviamente, alla forza centrifuga stessa. Tuttavia, é da notare che poiché la grandezza della forza centrifuga é $m\omega^2 r$ e quella della forza di Coriolis é $2m\omega v'$, il rapporto di queste due forze é proporzionale a $v'/\omega r$. **Cosí se v' é molto piú grande della velocità periferica della giostra, le peculiaritá del moto sono governate quasi interamente dagli effetti di Coriolis.** Se questa condizione é valida, la deflessione netta di un oggetto in moto sará sempre verso destra rispetto a \vec{v}' su una giostra ruotante in senso antiorario. Cosí se le posizioni A e B in figura 7.2-1 b) sono occupate da due persone che cercano di lanciare una palla avanti e indietro, ognuno dovr mirare a sinistra per fare un buon tiro.

Un caso estremo di questo genere di comportamento puó causare un oggetto seguire una traiettoria continuamente curvata che lo riporta al suo punto di partenza, sebbene non sia affatto soggetto a forze reali.

a) Traiettorie di oggetti come appaioni ad osservatori su un tavolo ruotante. b) Un oggetto proiettato su un tavolo ruotante senza attrito puó ritornare al suo punto di partenza.

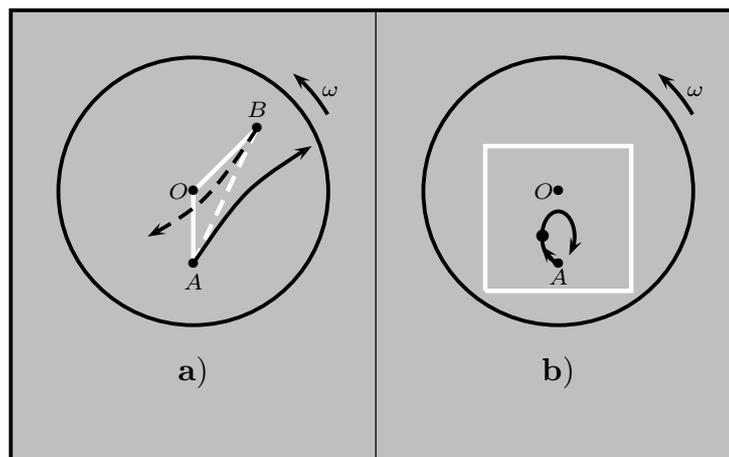


fig.7.10-1

7.11 - Equazione generale del moto in un sistema di riferimento ruotante

L'obiettivo di questa discussione é quello di correlare la derivata rispetto al tempo dello spazio percorso da un oggetto come osservato in un sistema di riferimento stazionario S alla derivata rispetto al tempo dello spazio percorso da un oggetto come osservato in un sistema di riferimento ruotante S' . Per cominciare introduciamo l'idea che la velocità angolare puó essere rappresentata come un vettore.

Consideriamo inizialmente un punto P su un disco ruotante come in figura 7.11-1 a). Esso ha una velocità puramente tangenziale, v_θ , in una direzione ad angolo retto con il raggio OP . Possiamo descrivere questa velocità, sia in grandezza che in direzione, se noi

definiamo un vettore $\vec{\omega}$ secondo la seguente convenzione. Si prenda la mano destra e si ponga con il pollice nella direzione dell'asse di rotazione z e con il verso del pollice secondo la rotazione delle dita della mano in comune con il verso di rotazione del disco. Quindi la velocità angolare ω è rappresentata da un vettore di lunghezza proporzionale alla velocità angolare, nella direzione in cui punta il pollice. Così con il vettore ω che punta lungo la direzione positiva dell'asse z si definisce una rotazione che trasporta ciascun punto come P dalla direzione x positiva verso la direzione y positiva. La rotazione del disco in questo caso è antioraria.

Da questa definizione di $\vec{\omega}$ segue che la velocità del punto P è data dal prodotto vettoriale di $\vec{\omega}$ per il vettore posizione \vec{r} :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{7.11.1}$$

Questa espressione del prodotto vettoriale è valida anche in tre dimensioni, se il vettore posizione \vec{r} del punto P è misurato da qualunque punto sull'asse di rotazione, come mostrato in figura 7.3-1 b). Il raggio del circonferenza su cui P si muove è $R = r \sin \theta$. Così noi abbiamo $v = v_\theta = \omega r \sin \theta$, in una direzione perpendicolare al piano definito da $\vec{\omega}$ e da \vec{r} . Precisamente quello che ci fornisce l'equazione (7.11.1).

Uso della velocità angolare come un vettore per definire la velocità lineare di una particella su un tavolo ruotante: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

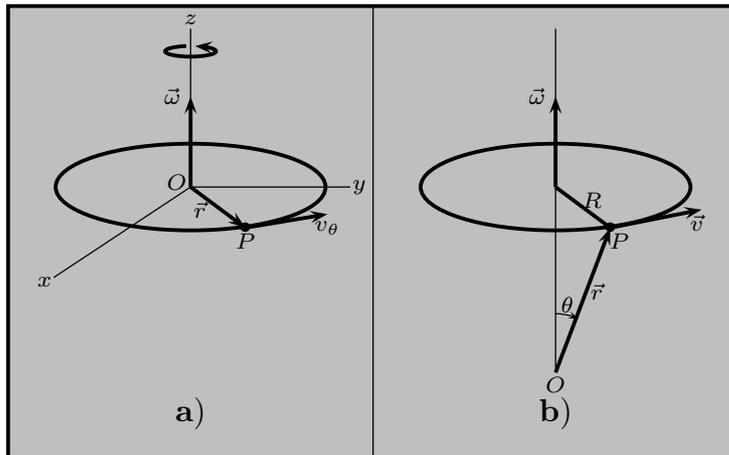


fig.7.11-1

Successivamente, consideriamo come la variazione di qualsiasi vettore durante un intervallo di tempo Δt può essere espressa come somma vettoriale di due contributi:

1. Il cambiamento che si verificherebbe se fosse semplicemente un vettore di lunghezza costante incorporato nel sistema di riferimento ruotante S' .
2. L'ulteriore cambiamento descritto dalla sua variazione di lunghezza e direzione come osservato in S' .

In figura 7.11-2 a) mostriamo questa analisi per un moto confinato su un piano. Il vettore \vec{A} all'istante t è rappresentato dalla linea CD . Se esso rimane fisso rispetto alla tavola ruotante, la sua direzione all'istante $t + \Delta t$ è data dalla linea CE , dove $\Delta\theta = \omega\Delta t$. Così la sua variazione dovuta alla sola rotazione sarebbe rappresentata da DE , dove $DE =$

$A\Delta\theta = \Delta\omega\Delta t$. Dal punto di vista del sistema S' questa variazione non sarebbe osservata. Vi può, tuttavia, essere una variazione rappresentata dalla linea EF ; denoteremo questo come $\Delta\vec{A}_{S'}$, la variazione di \vec{A} come osservato in S' . Il vettore somma di DE e EF , cioè, la linea DF , allora rappresenta la variazione vera di \vec{A} come osservato in S . Noi quindi denotiamo questo come $\Delta\vec{A}_S$.

- a) **Variazione di un vettore , analizzata in termini della sua variazione misurata su una tavola ruotante, insieme alla variazione dovuta alla rotazione del tavolo stesso.**
- b) **Simile analisi per un vettore arbitrario riferito a qualunque origine sull'asse di rotazione.**

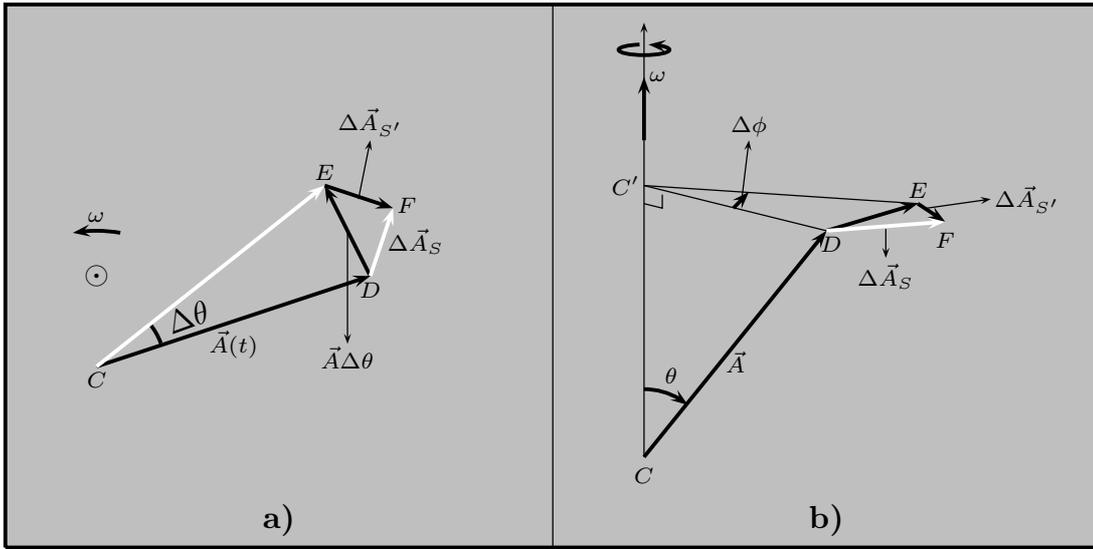


fig.7.11-2

In figura 7.11-2 b) mostriamo la corrispondente analisi per tre dimensioni. La lunghezza di DE è ora eguale ad $A \sin \theta \Delta\phi$; la sua direzione è perpendicolare al piano definito da ω e \vec{A} . Poiché $\Delta\phi = \omega\Delta t$, possiamo porre:

$$\text{vettore spostamento } DE = (\vec{\omega} \times \vec{A})\Delta t \tag{7.11.2}$$

Lo spostamento $\Delta\vec{A}_{S'}$ può essere in qualunque direzione rispetto a DE , ma i due di nuovo si combinano per dare uno spostamento netto DF che è da essere identificato con $\Delta\vec{A}_S$. Così noi abbiamo:

$$\Delta\vec{A}_S = \Delta\vec{A}_{S'} + (\vec{\omega} \times \vec{A})\Delta t \tag{7.11.3}$$

Possiamo subito procedere da questo ad una relazione fra i tassi di variazione di \vec{A} come osservato in S e in S' , rispettivamente:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{A} \tag{7.11.4}$$

Questa è una relazione molto potente perché \vec{A} può essere qualunque vettore.

Inizialmente, noi sceglieremo \vec{A} essere il vettore posizione \vec{r} . Allora $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_S$ é la vera velocità, \vec{v} , come osservato in S , e $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'}$ é la velocità apparente, \vec{v}' , come osservato in S' . Cosí noi immediatamente abbiamo:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \omega \times \vec{r} \quad (7.11.5)$$

Dopo, sceglieremo \vec{A} essere la velocità \vec{v} :

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{S'} + \omega \times \vec{v} \quad (7.11.6)$$

Ora, $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_S$ é l'accelerazione vera, \vec{a} , come osservato in S . La quantità $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{S'}$ é, tuttavia, una sorte di ibrido, é il tasso di variazione in S' della velocità come osservato in S . Possiamo dare piú senso a questo se sostituiamo per \vec{v} l'equazione 7.11.5; abbiamo, allora:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{S'} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S'} \quad (7.11.7)$$

I due termini del secondo membro di questa equazione sono ora molto riconoscibili; $\left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{S'}$, é l'accelerazione, \vec{a}' , come osservata in S' , e $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S'}$ é la velocità \vec{v}' . Cosí abbiamo:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{S'} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (7.11.8)$$

Sostituendo la (7.11.8) nella (7.11.6), si ha:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \omega \times \vec{v} \quad (7.11.9)$$

Non abbiamo bisogno di avere entrambe \vec{v} e \vec{v}' al secondo membro della (7.11.9) e, quindi, sostituiamo per \vec{v} l'espressione (7.11.5). Avremo cosí finalmente:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (7.11.10)$$

La prima osservazione é che il secondo termine al secondo membro é nullo se l'angolo formato fra $\vec{\omega}$ ed \vec{r} é 0^0 o 180^0 .

Moltiplicando ciascun termine dell'equazione (7.11.10) per la massa della particella, il primo membro é la forza esterna netta che agisce sulla massa come visto nel sistema di riferimento stazionario S .

$$m\vec{a} = \vec{F}_{net} = m\vec{a}' + 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') + m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \quad (7.11.11)$$

Nel sistema di riferimento ruotante, la particella m ha l'accelerazione \vec{a}' . Possiamo mantenere la forma della seconda legge di Newton in questo sistema di riferimento accelerato riorganizzando l'equazione di cui sopra, in modo da essere in grado di scrivere:

$$\vec{F}'_{net} = m\vec{a}' \quad (7.11.12)$$

dove:

$$\vec{F}'_{net} = \vec{F}_{net} - \underbrace{2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')}_{\text{Forza di Coriolis}} - \underbrace{m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]}_{\text{Forza centrifuga}} \quad (7.11.13)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Forze d'inerzia}}$

La forma matematica dell'equazione (7.11.13) mostra che entrambe le forze di Coriolis e centrifuga sono in direzione ad angolo retto all'asse di rotazione definito da $\vec{\omega}$. La forza centrifuga, in particolare, é sempre radialmente verso l'esterno dall'asse, com é chiaro se si considera le relazioni geometriche dei vettori coinvolti nel prodotto $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, come mostrato in figura 7.11-3. L'equazione mostra anche che la forza di Coriolis si invertirebbe se la direzione di $\vec{\omega}$ venisse invertita, ma la direzione della forza centrifuga rimarrebbe invariata.

La specificazione di \vec{F}' nell'equazione (7.11.11) puó essere fatta interamente sulla base delle misure di posizione, velocità, e accelerazione come osservato all'interno del sistema ruotante stesso. Il termine centrifugo, coinvolgente il vettore \vec{r} , puó sembrare contraddire questo, ma potremmo anche mettere \vec{r}' invece di \vec{r} , perché gli osservatori nei due sistemi si accordano sul vettore posizione di un oggetto in moto ad un dato istante, concesso che essi usano la stessa scelta dell'origine.

Relazione fra i vettori coinvolti nel formare l'accelerazione centrifuga $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

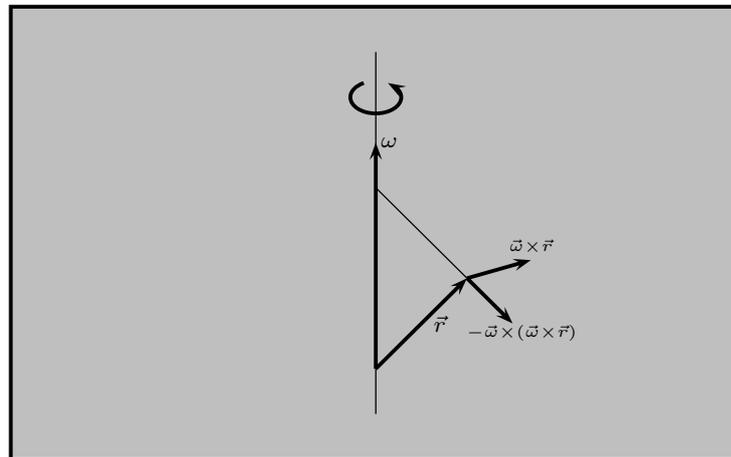


fig.7.11-3

Per riassumere, noi abbiamo stabilito dai calcoli sopra effettuati che la dinamica del moto come osservato in un sistema di riferimento ruotante uniformemente puó essere analizzato in termini delle seguenti tre categorie di

forze:

"Reale" : \vec{F}_{net} { Questa é la somma di tutte le forze "reali" sulla particella quale la forza di contatto, tensione nelle corde, la forza di gravità, forze elettriche, forze magnetiche e così via. Solo queste forze sono viste in un sistema di riferimento stazionario.

Coriolis : $-2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')$ { La forza di Coriolis é una forza deflettente sempre ad angolo retto alla velocità \vec{v}' della massa m .
Se la particella non ha velocità nel sistema di riferimento ruotante, non vi é forza di Coriolis. É una forza inerziale *non* vista in un sistema di riferimento stazionario. Notare il segno meno.

Centrifuga : $-m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')]$ { La forza centrifuga dipende dalla posizione soltanto ed é sempre rivolta radialmente verso l'esterno.
É una forza inerziale *non* vista in un sistema di riferimento stazionario. Possiamo egualmente ben scrivere essa come $-m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')]$. Notare il segno meno.

7.12 - La Terra come sistema di riferimento ruotante

In questo paragrafo consideriamo qualche esempio di come la rotazione della Terra influenzi i processi dinamici che si verificano su di essa. Riportiamo la figura 7.12-1 che guiderà nella spiegazione di alcune dinamiche.

- a) Forze su un oggetto a riposo sulla Terra, come interpretato in un sistema di riferimento che ruota con la Terra. b) Un oggetto che cade dalla posizione di riposo relativa alla Terra subisce uno spostamento verso est. c) Il moto in caduta di b), come visto da un sistema di riferimento che non ruota con la Terra.

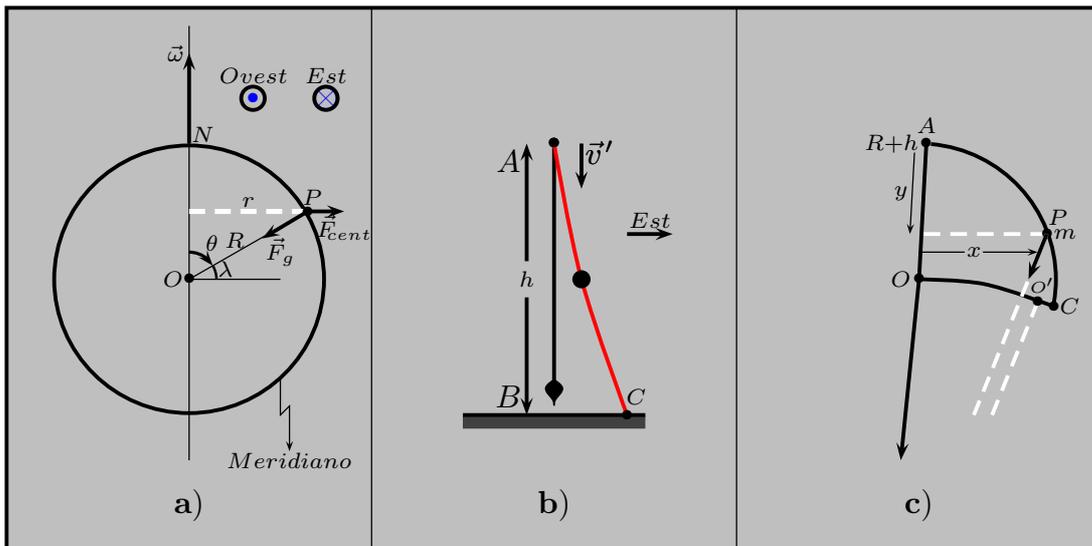


fig.7.12-1

Il valore locale di g

Se una particella di massa m é a riposo nel punto P in latitudine λ vicino alla superficie della Terra, allora nel sistema di riferimento della Terra essa é soggetta alla forza gravitazionale \vec{F}_g e alla forza centrifuga \vec{F}_{cent} mostrate in figura 7.4-1 a). La grandezza della forza centrifuga é data dal terzo termina del secondo membro della (7.11.13):

$$\vec{F}_{cent} = -m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \quad (7.12.1)$$

che si puó scrivere, in modulo:

$$F_{cent} = m\omega^2 R \sin \theta = m\omega^2 R \cos \lambda \quad (7.12.2)$$

dove R é il raggio della Terra.

Il termine della forza centrifuga riduce la locale grandezza di g e modifica anche la locale direzione della verticale come definito da un filo a piombo. L'analisi é infatti molto piú semplice e piú chiara dal punto du vista del nostro naturale sistema di riferimento come definito dalla Terra stessa. Noi abbiamo, dalla figura 7.12-1 a), le seguenti relazioni:

$$F'_r = F_g - F_{cent} \cos \lambda = F_g - m\omega^2 R \cos^2 \lambda \quad (7.12.3)$$

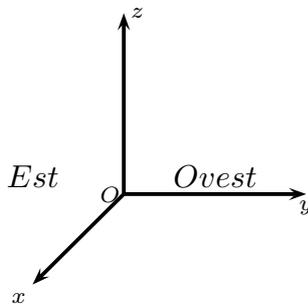
$$F'_\theta = F_{cent} \sin \lambda = m\omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda \quad (7.12.4)$$

Deviazione degli oggetti in caduta libera

Se una particella viene rilasciata dalla posizione di riposo in un punto P di figura 7.12-1 a), essa comincia ad accelerare verso il basso sotto l'azione di una forza netta \vec{F}' le cui componenti sono date dalle equazioni (7.12.3) e (7.12.4). Non appena esso acquista qualche velocitá apprezzabile, tuttavia, sperimenta una forza di Coriolis data dall'equazione:

$$\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (7.12.5)$$

Ora la velocitá \vec{v}' é nel piano PON contenente l'asse della Terra. La forza di Coriolis deve essere perpendicolare a questo piano, ed una considerazione sulle direzioni di $\vec{\omega}$ e \vec{v}' mostra che essa é in direzioni Est. Infatti, consideriamo un sistema di riferimento con origine nel punto P . Sia l'asse z positivo la direzione ed il verso di $\vec{\omega}$, l'asse x positivo la direzione della componente ortogonale all'asse z della velocitá lungo la verticale, in quanto la componente lungo z non partecipa al prodotto vettoriale.



$$\begin{aligned} \hat{z} \times \hat{x} &= \hat{y} \text{ (Ovest)} \\ -\hat{z} \times \hat{x} &= -\hat{y} \text{ (Est)} \end{aligned}$$

Quindi, se impostiamo un sistema di coordinate locale definito dalla verticale a piombo locale e dalla direzione locale di est, come in fig.7.4-1 b), l'oggetto in caduta devia verso est rispetto a un filo a piombo AB e colpisce il terreno in un punto C. L'effetto é molto piccolo ma é stato rivelato e misurato in accurati esperimenti. (vedi problema 12.24).

Per calcolare quale dovrebbe essere la deflessione per un oggetto che cade da una determinata altezza h , usiamo il fatto che il valore di \vec{v}' da inserire nell'equazione (7.12.5) é estremamente ben approssimato dalla semplice equazione della caduta libera verticale:

$$\vec{v}' = gt \quad (7.12.6)$$

dove \vec{v}' é positivo verso il basso. Cosí se noi indichiamo la direzione est come x' , abbiamo:

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = (2m\omega \cos \lambda)gt \quad (7.12.7)$$

Integrando questa due volte rispetto a t , abbiamo:

$$x' = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \lambda \quad (7.12.8)$$

Per una distanza totale di caduta verticale eguale a h , abbiamo:

$$t = (2h/g)^{1/2} \quad (7.12.9)$$

che, cosí, ci fornisce:

$$x' = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\omega \cos \lambda}{g^{1/2}} h^{3/2} \quad (7.12.10)$$

Inserendo valori numerici approssimati ($\omega = 2\pi \text{ giorno}^{-1} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \simeq 7.2722 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$), si ha:

$$x' = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \left(\frac{7.2722 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{9.8}} \right) h^{3/2} \cos \lambda = 2.19 \cdot 10^{-5} h^{3/2} \cos \lambda \quad (x' \text{ e } h \text{ in } m) \quad (7.12.11)$$

Cosí, per esempio, per $h = 50 \text{ m}$ ad una latitudine di 45^0 , si ha: $x' \simeq 0.0055 \text{ m} \simeq 5.5 \text{ mm}$

Forse vale la pena di ricordare che gli effetti delle forze inerziali possono sempre essere calcolati, se lo si desidera, dal punto di vista di una struttura inerziale in cui queste forze semplicemente non esistono. Nel presente caso, si puó iniziare riconoscendo che una particella tenuta ad una distanza h sopra il suolo ha una velocità piú alta verso est rispetto a un punto sul terreno sottostante. Per semplicitá consideriamo come funziona all'equatore ($\lambda = 0$). La figura 7.4-1 c) mostra la traiettoria dell'oggetto che cade come visto in un sistema di riferimento non ruotante. L'oggetto ha una iniziale velocità orizzontale data da:

$$v_{ox} = \omega(R + h) \quad (7.12.12)$$

Dopo un tempo t essa ha percorso una distanza orizzontale x , molto vicino a ωRt . Con l'oggetto ora in P (vedi figura) la forza gravitazionale agente su di esso ha una componente molto piccola nella direzione negativa dell'asse x . Noi abbiamo, infatti:

$$F_x \simeq -\frac{x}{R}F_g \simeq -mg\omega t \quad (7.12.13)$$

Quindi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \simeq -g\omega t \quad (7.12.14)$$

Integrando una volta, abbiamo:

$$\frac{dx}{dt} \simeq v_{0_x} - \frac{1}{2}g\omega t^2 \quad (7.12.15)$$

Sostituendo il valore $v_{0_x} = \omega(R + h)$, questo dá, con molta buona approssimazione:

$$\frac{dx}{dt} \simeq \omega(R + h) - \frac{1}{2}g\omega t^2 \quad (7.12.16)$$

Integrando una seconda volta, abbiamo:

$$x = \omega(R + h)t - \frac{1}{6}g\omega t^3 \quad (7.12.17)$$

Tuttavia, il punto O sulla superficie della Terra é anche in movimento, con una velocità costante di ωR . Cosí, quando l'oggetto in caduta colpisce il suolo nel punto C , il punto O ha raggiunto O' , dove $OO' = \omega Rt$. Quindi, noi abbiamo:

$$x' = O'C \simeq \omega h t - \frac{1}{6}g\omega t^3 \quad (7.12.18)$$

Se noi sostituiamo $h = \frac{1}{2}gt^2$, noi subito otteniamo il risultato dato dall'equazione (7.12.8) per $\lambda = 0$. Naturalmente noi possiamo sostituire $t = \sqrt{2h/g}$ e arrivare alla equazione (7.12.10).

Andamento della circolazione atmosferica

A causa dell'effetto Coriolis, le masse d'aria che vengono spinte radialmente verso l'interno di una regione di bassa pressione, o verso l'esterno da una regione di alta pressione, sono anche soggette a forze di deflessione. Ciò fa sí che la maggior parte dei cicloni si muove in senso antiorario nell'emisfero settentrionale e orario in quello meridionale. L'origine di queste direzioni di rotazione preferite può essere vista in fig. 7.4-3, che mostra i movimenti

dell'aria nell'emisfero nord che si muove verso una regione di bassa pressione.

**Formazione di un ciclone nell'emisfero settentrionale,
sotto l'azione delle forze di Coriolis sulle masse di
area in moto.**

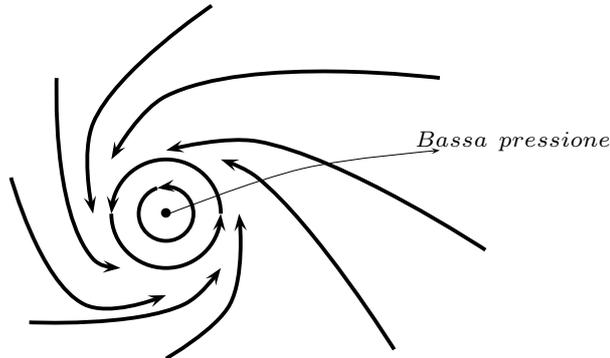


fig.7.12-3

Le componenti orizzontali della forza di Coriolis deflette questi moti verso destra. Così come le masse d'aria convergono al centro della regione di bassa pressione, esse producono una netta rotazione antioraria. Per l'aria che si muove nell'emisfero nord o sud sulla superficie della Terra la forza di Coriolis è verso est o ovest, parallela alla superficie terrestre. Se noi consideriamo 1 kg di massa d'aria alla velocità di un vento di 10 m/s a 45° di latitudine nord, una diretta applicazione dell'equazione (7.12.5) fornisce:

$$F_{Coriolis} = 2m\omega v' \sin \lambda \simeq (2)(1)(2\pi \cdot 10^{-5}) \cdot (10)(0.707) \simeq 10^{-3} \text{ N} \quad (7.12.19)$$

Se avessimo considerato l'aria che fluiva da est o da ovest, le forze di Coriolis non sarebbero parallele alla superficie terrestre, ma le loro componenti parallele alla superficie sarebbero date dalla stessa equazione usata sopra. (Verificare questo.)

Il raggio approssimato di curvatura del moto risultante può essere ottenuto da:

$$F = m \frac{v^2}{R} \quad (7.12.20)$$

o

$$R = m \frac{v^2}{F_{Coriolis}} \simeq 1 \cdot \frac{100}{10^{-3}} = 10^5 \text{ m (circa 60 miglia)} \quad (7.12.21)$$

Masse d'aria si muovono per centinaia di miglia sulla superficie terrestre, esse spesso formano enormi vortici, come è drammaticamente mostrato nelle fotografie satellitari.

Occasionalmente si legge che anche l'acqua che defluisce nello scarico di un lavabo circola in una direzione preferenziale a causa della forza di Coriolis. Nella maggior parte dei casi, la forza di Coriolis sull'acqua corrente è trascurabile rispetto ad altre forze più grandi che sono presenti; tuttavia, se vengono eseguiti esperimenti estremamente precisi e accurati, l'effetto può essere dimostrato.

IL pendolo di Foucault

Nessuna illustrazione delle forze di Coriolis sarebbe completa senza menzione del famoso esperimento del pendolo denominato con il nome del fisico francese J.B.L. Foucault, che per primo dimostró nel 1851 la lenta rotazione del piano di vibrazione di un pendolo che é utilizzato come l'evidenza della rotazione terrestre.

É facile, ma piuttosto troppo disinvolto, dire che ovviamente stiamo semplicemente vedendo l'effetto della Terra che gira sotto il pendolo. Questa descrizione puó correttamente essere usata per un pendolo sospeso al polo nord o al polo sud. Si pu anche spingere un po 'di pi le cose e dirlo ad una data latitudine λ (vedi figura 7.4-4) il vettore velocità angolare della Terra ha una componente $\omega \sin \lambda$ lungo la locale verticale. Questo porterebbe infatti al risultato corretto che il piano del pendolo ruota ad una velocità corrispondente ad una rotazione completa in un tempo $T(\lambda)$ data da:

$$T(\lambda) = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{24}{\sin \lambda} \text{ ore} \quad (7.12.22)$$

Ma il pendolo é, dopo tutto, connesso alla Terra via il suo filo di sospensione, ed entrambe la tensione del filo e la forza gravitazionale sul pendolo giacciono sul piano verticale in cui il pendolo viene inizialmente impostato oscillante. (Quindi, anche la resistenza dell'aria, se questo deve essere considerato). É la forza di Coriolis che puó essere invocata per dare una piú esplicita base per la rotazione. Per un pendolo oscillante nell'emisfero nord, la forza di Coriolis agisce sempre per curvare il percorso del pendolo oscillante verso destra, come indicato in forma esagerata in figura 7.4-4 b). Come con la forza di Coriolis sull'aria in movimento, l'effetto non dipende dalla direzione dell' oscillazione, contrariamente all'intuizione che la maggior parte di noi probabilmente ha che la rotazione saá probabilmente piú marcata quando il pendolo oscilla lungo una linea nord-sud rispetto a quando oscilla ad est-ovest.

- a) Un pendolo oscillante lungo una linea nord - sud ad una latitudine λ .
 b) Traiettoria del pendolo, come visto da sopra. (La variazione della direzione per oscillazione é, tuttavia, grossolanamente esagerata.)

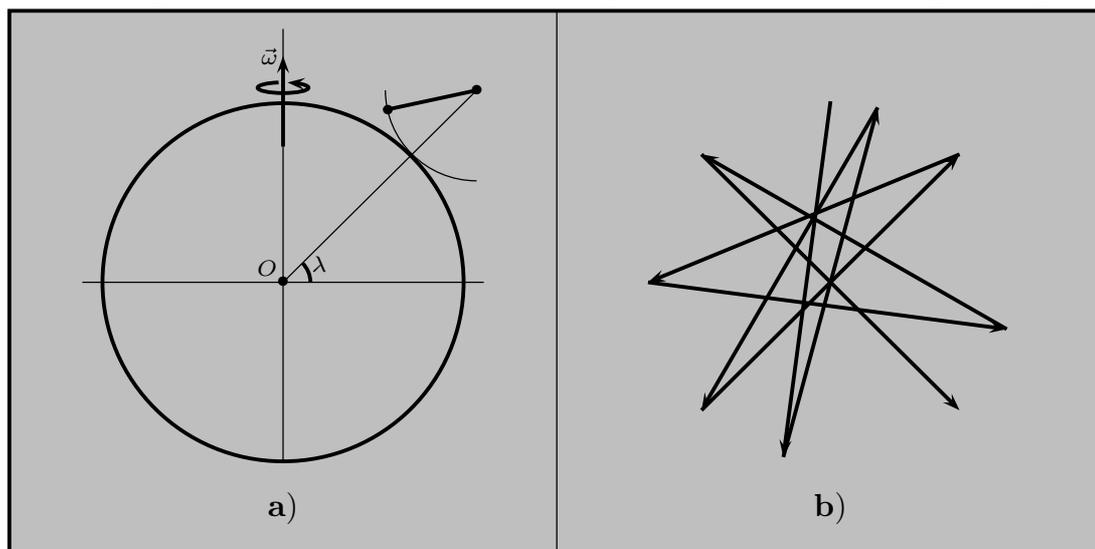


fig.7.12-4

7.13 - Le Maree

Come tutti sanno, le maree sono conseguenza dell'azione gravitazionale della Luna e, in misura minore, del Sole. Così ne avremmo potuto discutere come un esempio della gravitazione universale nel capitolo 4. L'analisi del fenomeno é, tuttavia, considerevolmente aiutato dall'introduzione del concetto di forze inerziali come sviluppato nel presente capitolo.

La caratteristica che probabilmente causa la maggior parte delle perplessità quando si studiano per la prima volta le maree é il fatto che ci sono, nella maggior parte dei luoghi sulla superficie terrestre, due alte maree ogni giorno piuttosto che una sola. Questo corrisponde al fatto che in ogni istante, la distribuzione generale dei livelli dell'oceano attorno alla Terra ha due rigonfiamenti. Sul modello semplice di cui discuteremo, questi rigonfiamenti sarebbero piú alti nei luoghi sulla superficie terrestre piú vicini e lontani dalla luna (vedi figura 7.13-1 a)). Mentre la Terra esegue la sua rotazione durante le 24 ore, le posizioni dei rigonfiamenti rimarrebbero quasi stazionarie, essendo definite dalla posizione quasi costante della luna. Così, se possiamo immaginare la Terra completamente circondata dall'acqua, la profondità dell'acqua come misurata da un punto fisso della superficie della Terra solida passerebbe attraverso due massimi e due minimi in ciascuna rivoluzione. Una migliore approssimazione dei fatti osservati é ottenuta considerando i rigonfiamenti essere trascinati verso est per attrito con la terra e con il fondo dell'oceano, in modo che le loro posizioni di equilibrio rispetto alla luna siano piú vicine a quelle indicate in fig. 7.13.1 b).

- a) Doppio rigonfiamento di marea come sarebbe se la rotazione della Terra non lo spostasse. La dimensione del rigonfiamento é enormemente esagerata.
 b) Approssimazione del vero orientamento dei rigonfiamenti di marea, trasportati verso est dalla rotazione terrestre.

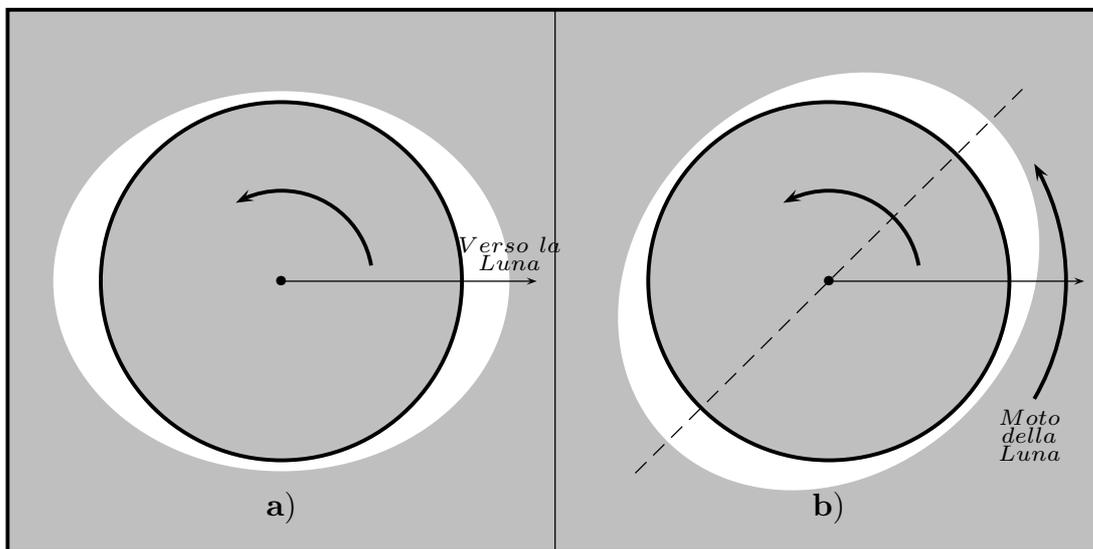


fig.7.13-1

Per concludere queste note preliminari, potremmo indicare che i rigonfiamenti sono, infatti, anche trasportati lentamente verso est per tutto il tempo del movimento della luna intorno alla Terra. Questo mot (un'orbita completa relativa alle stelle fisse ogni 27.3 giorni) ha la conseguenza che essa prende piú di 24 ore per un dato punto sulla Terra per fare

successivi passaggi oltre un particolare rigonfiamento di marea. Specificamente, questo causa l'intervallo di tempo teorico fra successive alte maree in un dato posto essere vicini a 12 ore e 25 minuti invece delle precise 12 or (vedi problema 2.15). Per esempio, se un'alta marea si osserva verificarsi alle 4 p.m. di un giorno, la sua controparte il giorno successivo dovrebbe verificarsi a circa 4.50 pm.

Consideriamo la situazione dinamica. Il primo punto da comprendere é il modo in cui la terra nel suo complesso viene accelerata verso la luna in virtù dell'attrazione gravitazionale tra di esse Rispetto al centro di massa del sistema Terra-Luna (all'interno della Terra a circa 300 miglia dal centro della Terra), il centro di massa della Terra ha una accelerazione di grandezza a_C data dalla legge di Newton:

$$M_E a_C = \frac{GM_E M_m}{r_m^2} \quad \text{ossia} \quad a_C = \frac{GM_m}{r_m^2} \quad (7.13.1)$$

essendo M_m e r_m la massa della Luna e la distanza rispettivamente. Ciò che potrebbe non essere immediatamente evidente é che ogni punto della Terra riceve questa stessa accelerazione dall'attrazione della luna. Se si disegna uno schizzo, come mostrato in fig.7.13-2, degli archi lungo i quali il centro della Terra e la luna viaggiano in un certo lasso di tempo, si é tentati di pensare al sistema Terra-Luna come a una sorta di manubrio rigido che ruota come un'unitá attorno al centro di massa, O. É vero che la luna, per parte sua, si muove in modo che presenti sempre la stessa faccia verso la Terra, ma con la stessa Terra le cose sono diverse. Se la Terra non ruotasse attorno suo asse, ogni punto su di essa seguirebbe un arco circolare identico per dimensione e direzione all'arco C_1C_2 tracciato dal centro della Terra. La linea A_1B_1 sarebbe traslata nella linea parallel A_2B_2 . La rotazione intrinseca della Terra attorno al suo asse é semplicemente sovrapposta a questo spostamento generale e all'accelerazione associata.

Il moto orbitale della Terra intorno alla luna non implica di per sé alcuna rotazione della Terra; la linea A_1B_1 viene portata nella configurazione parallela A_2B_2 .

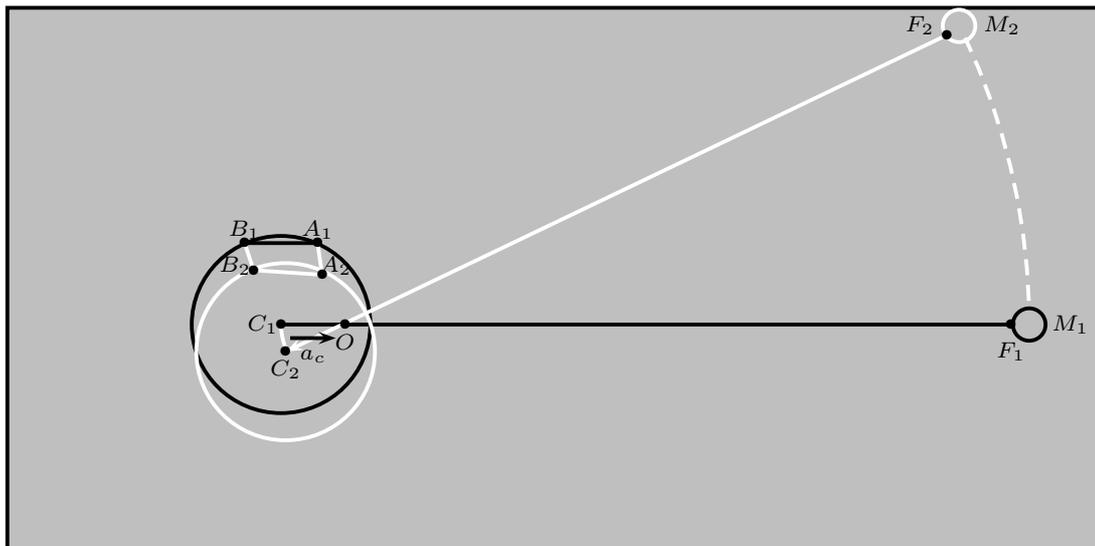


fig.7.13-2

É qui che entrano in scena i sistemi di riferimento non inerziali. Le conseguenze dinamiche del moto orbitale della Terra attorno al centro di massa del sistema Terra - Luna puó essere correttamente descritto in termine di una forza inerziale, $-ma_c$, sperimentata da una particella di massa m dovunque essa possa essere, in o sulla Terra. Questa forza si aggiunge allora a tutte le altre forze che possono essere agenti sulla particella.

Nel modello che noi stiamo usando, corrispondente a quello che é chiamato *teoria dell'equilibrio delle maree*, l'acqua attorno alla Terra semplicemente si muove fino a quando non raggiunge una configurazione di equilibrio che rimane stazionaria dal punto di vista di un osservatore sulla luna. Ora noi sappiamo che per una particella al centro della Terra la forza centrifuga e l'attrazione gravitazionale della luna sono eguali in grandezza ed opposte in verso. Se, tuttavia, consideriamo una particella sulla superficie della Terra nel punto piú vicino alla luna (punto 4 in figura 7.13-3), la forza gravitazionale su esso é piú grande della forza centrifuga di una quantità che noi chiameremo f_0 :

$$f_0 = \frac{GM_m m}{(r_m - R_E)^2} - \frac{GM_m m}{r_m^2} \quad (7.13.2)$$

Poiché $R_E \ll r_m$ ($R_E \simeq r_m/60$), possiamo approssimare questa espressione come segue:

$$f_0 = \frac{GM_m m}{r_m^2} \left[\left(1 - \frac{R_E}{r_m} \right)^{-2} - 1 \right] \quad (7.13.3)$$

cioé:

$$f_0 \simeq \frac{2GM_m m}{r_m^3} R_E \quad (7.13.4)$$

Con un calcolo esattamente simile, troviamo che la forza di produzione della marea su una particella di massa m nel punto piú lontano dalla luna (punto B in figura 7.13-3) é eguale a $-f_0$; quindi riconosciamo la tendenza per l'acqua a essere tirata o spinta via da un midplane disegnato attraverso il centro della terra (vedi figura).

- a) **Differenza fra forza centrifuga e la gravità della Terra nei punti piú vicini e piú lontani dalla luna.**
- b) **Forza producente marea in un punto arbitrario P, mostrando l'esistenza di una componente trasversale.**

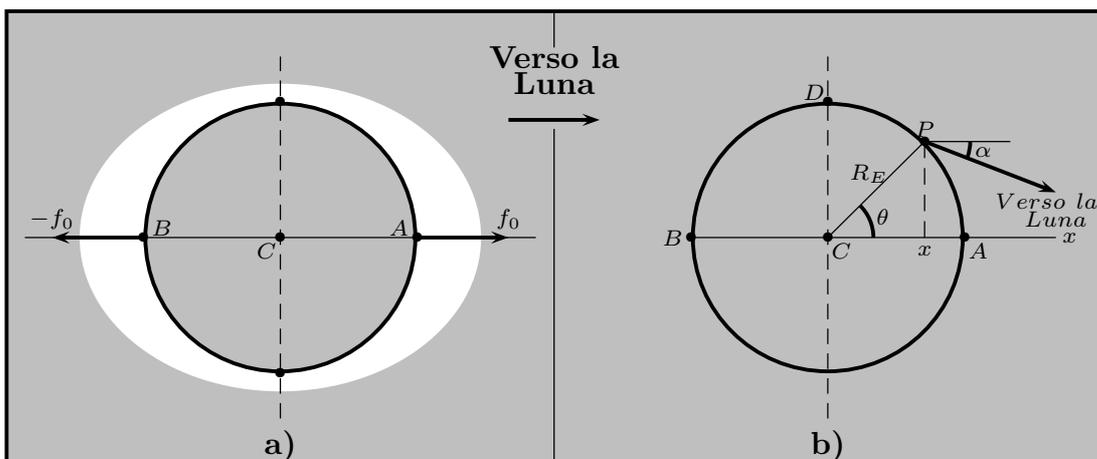


fig.7.13-3

Facendo un passo avanti possiamo ottenere una visione molto migliore del problema. Consideriamo ora una particella d'acqua di un punto arbitrario P (figura 7.5-3). Rispetto al centro della Terra, C , esso ha coordinate (x, y) , con $x = R_E \cos \theta$, $y = R_E \sin \theta$. La forza di marea su esso nella direzione x é data da un calcolo proprio come quello sopra:

$$f_x \simeq \frac{2GM_m m}{r_m^3} x = \frac{2GM_m m}{r_m^3} R_E \cos \theta \quad (7.13.5)$$

Questo produce i risultati già ottenuti per i punti A e B se noi poniamo $\theta = 0$ o π . In aggiunta, a questa forza parallela alla linea congiungente i centri della Terra e della Luna vi é anche, tuttavia, una forza trasversale, perché la linea da P al centro della luna forma un piccolo angolo, α , con l'asse x , e la netta forza gravitazionale, $\frac{GM_m m}{r^2}$, ha una piccola componente perpendicolare a x , data da:

$$f_y = -\frac{GM_m m}{r^2} \sin \alpha \quad (\text{con } r \simeq r_m) \quad (7.13.6)$$

Ora noi abbiamo:

$$\tan \alpha = \frac{y}{r_m - x} \quad (7.13.7)$$

Poiché α é un angolo molto piccolo [$\leq \tan^{-1}(R_E/r_m)$, che è circa 1°] possiamo tranquillamente approssimare l'espressione sopra:

$$\alpha \simeq \frac{y}{r_m} = \frac{R_E \sin \theta}{r_m} \quad (7.13.8)$$

La componente f_y della forza mareale é allora data da:

$$f_y \simeq \frac{GM_m m}{r_m^3} y = -\frac{GM_m m}{r_m^3} R_E \sin \theta \quad (7.13.9)$$

Noi vediamo che questa forza trasversale é piú grande per $\theta = \pi/2$, a quel punto essa é uguale alla metà del valore massimo (f_0) di f_x . Usando l'equazione (7.13.5) e (7.13.9) insieme, possiamo sviluppare un quadro generale delle forze che producono maree, come mostrato in figura 7.13-4.

Ciò dimostra in modo molto piú convincente come le forze agiscono in tali direzioni

da far fluire l'acqua e ridistribuire se stessa nel modo già descritto qualitativamente.

Schema delle forze che producono marea attorno alla Terra. La linea tratteggiata circolare mostra dove sarebbe la superficie dell'acqua indisturbata.

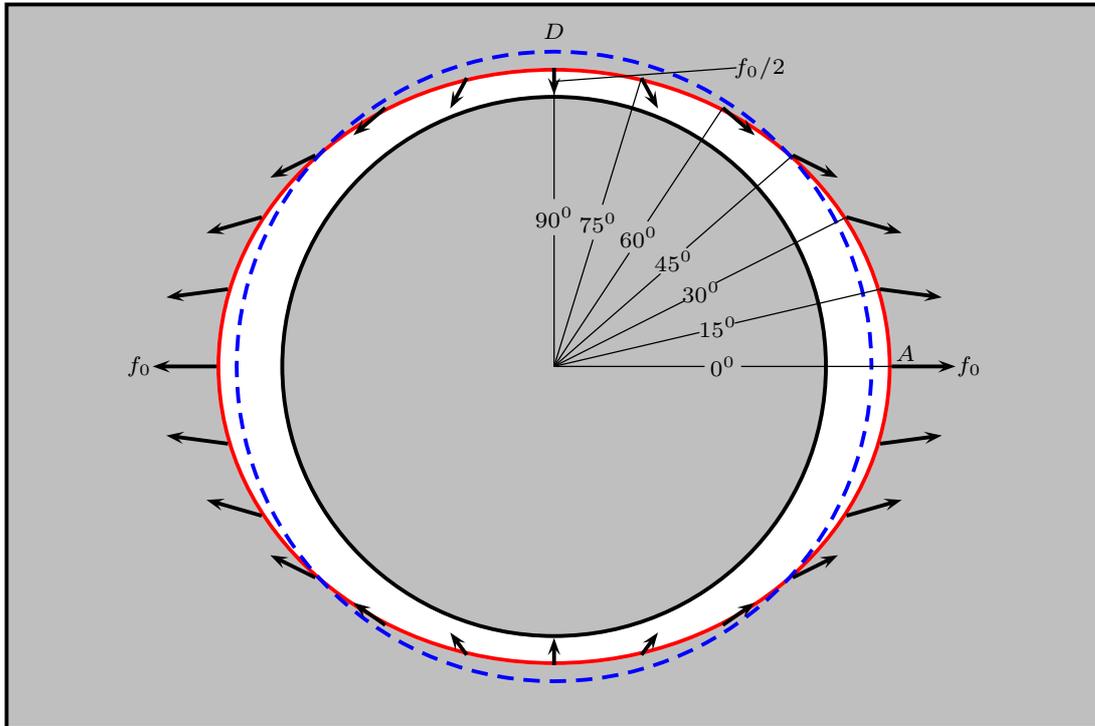


fig.7.13-4

7.14 - Altezze della marea; Effetto del Sole

Quanto dovrebbe essere alto l'equilibrio delle maree? Se conosci le variazioni delle maree, potresti essere sorpreso dal risultato. L'onda di equilibrio sarebbe un aumento e una caduta di meno di 2 piedi. Noi possiamo calcolare questo considerando che il lavoro fatto dalla forza mareale nel muovere una particella d'acqua da D ad A (fig.7.13-4) é equivalente all'aumento dell'energia potenziale gravitazionale necessaria per sollevare l'acqua di un'altezza h contro la normale attrazione gravitazionale della Terra. la distanza h é la differenza dei livelli dell'acqua fra A e D. Ora usando le equazioni (7.13.5) e (7.13.9) noi abbiamo:

$$dW = f_x dx + f_y dy = \frac{GM_m m}{r_m^3} (2x dx - y dy) \quad (7.14.1)$$

$$W_{DA} = \frac{GM_m m}{r_m^3} \left[\int_0^{R_E} 2x dx - \int_{R_E}^0 y dy \right] = \frac{3GM_m m}{2r_m^3} R_E^2 \quad (7.14.2)$$

Ponendo questa quantità di lavoro eguale al guadagno dell'energia potenziale gravitazionale, mgh , abbiamo:

$$h = \frac{3GM_m R_E^2}{2gr_m^3} \quad (7.14.3)$$

I valori numerici delle quantità rilevanti sono i seguenti:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$$

$$M_m = 7.34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$r_m = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$R_E = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$g = 9.80 \text{ m/s}^2$$

Sostituendo queste quantità nell'equazione (7.14.3) troviamo:

$$h \simeq 0.54 \text{ m} \simeq 21 \text{ pollici.} \quad (7.14.4)$$

Il grande eccesso su questo valore calcolato in molti luoghi (per fattore di 10 o anche più può essere solo spiegato considerando il problema in termini dinamici dettagliati, in cui l'accumulazione dell'acqua in estuari stretti, ed effetti di risonanza, possono completamente alterare la scala del fenomeno. Il valore che noi abbiamo calcolato dovrebbe essere approssimato in mare aperto.

L'ultimo punto che noi considereremo qui è l'effetto del Sole. La sua massa e la sua distanza sono i seguenti:

$$M_S = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$r_s = 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Se noi direttamente compariamo le forze gravitazionali esercitate dal Sole e dalla Luna su una particella sulla Terra, scopriamo che il Sole vince per un grande fattore:

$$\frac{F_s}{F_m} = \frac{M_s/r_s^2}{M_m/r_m^2} = \frac{M_s}{M_m} \left(\frac{r_m}{r_s} \right)^2 \simeq 180 \quad (7.14.5)$$

Ciò che conta, tuttavia, per la produzione di marea è la quantità con cui queste forze cambiano da punto a punto sulla terra. Questo è espresso in termini di gradiente della forza gravitazionale:

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2} \quad (7.14.6)$$

$$f = \Delta F = -\frac{2GMm}{r^3} \Delta r \quad (7.14.7)$$

Ponendo $M = M_m$, $r = r_m$ e $\Delta r = \pm R_E$, otteniamo le forze $\pm f_o$ corrispondenti all'equazione (7.13.4).

Noi ora vediamo che le forze comparative producenti marea dovute al Sole e alla Luna sono date, secondo l'equazione (7.14.7), dal seguente rapporto:

$$\frac{f_s}{f_m} = \frac{M_s/r_s^3}{M_m/r_m^3} = \frac{M_s}{M_m} \left(\frac{r_m}{r_s} \right)^3 \quad (7.14.8)$$

Sostituendo i valori numerici, troviamo:

$$\frac{f_s}{f_m} \simeq 0.465 \quad (7.14.9)$$

Ciò significa che la capacità di innalzamento della marea dovuta alla luna supera quella del sole di un fattore di circa 2.15. Gli effetti dei due si combinano linearmente e, naturalmente, in modo vettoriale, a seconda delle posizioni angolari relative della luna e del sole. Quando sono sulla stessa linea attraverso la terra (sia dalla stessa parte o da lati opposti) ci dovrebbe essere una marea massima pari a 1.465 volte quella dovuta alla luna da sola. Questo dovrebbe accadere una volta ogni 2 settimane, approssimativamente, quando la luna é nuova o piena. Nei periodi intermedi (mezzaluna) quando le posizioni angolari di sole e luna sono separate di 90^0 , l'ampiezza di marea dovrebbe scendere ad un valore minimo pari a 0.535 volte quello della luna. Il rapporto tra valori massimi e minimi é quindi circa 2.7.

7.15 - Ricerca per un sistema di riferimento inerziale fondamentale

I fenomeni che noi abbiamo discusso in questo capitolo sembrano non lasciarci dubbi sul fatto che l'accelerazione del proprio sistema di riferimento puó essere rilevata con mezzi dinamici. Essi suggeriscono che uno status molto speciale si collega effettivamente ai sistemi di riferimento inerziali. Ma come possiamo noi essere sicuri che abbiamo identificato un vero sistema di riferimento inerziale in cui la legge d'inerzia di Galileo vale esattamente?

Noi abbiamo visto all'inizio della nostra discussione sulla dinamica che la Terra stessa rappresenta una buona approssimazione di tale sistema per molti scopi, specialmente per fenomeni dinamici la cui scala in distanza e tempo é piccola. Ma noi abbiamo ora visto abbondante evidenza che un laboratorio sulla superficie della Terra é accelerato, se il laboratorio si trova in latitudine λ (vedi figura 7.15-1), ogni punto in esso é accelerato verso l'asse di rotazione terrestre con una accelerazione data da:

$$a_\lambda = \omega^2 R \cos \lambda \quad (7.15.1)$$

con:

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} \text{ rad/s} \quad R = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m} \quad (7.15.2)$$

Questo dá:

$$a_\lambda = 3.4 \cdot 10^{-2} \cos \lambda \text{ m/s}^2 \quad (7.15.3)$$

Questa accelerazione di un sistema di riferimento legata alla Terra é, come noi sappiamo, non il caso piú semplice di un sistema di riferimento. I sistemi linearmente accelerati

con cui noi abbiamo cominciato questo capitolo sono molto piú prontamente analizzati.

**Accelerazione verso l'asse della Terra
in virtú della sua rotazione.**

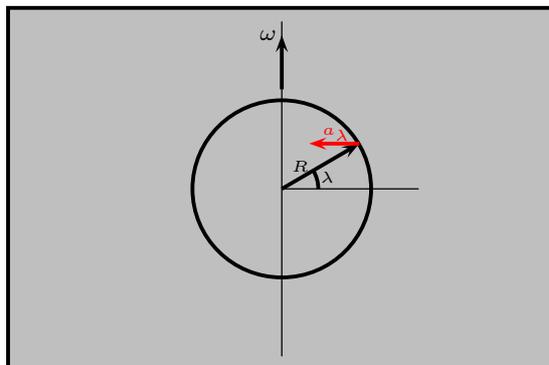


fig.7.15-1

Fu, tuttavia, il fenomeno associato ai sistemi ruotanti che portó **Newton** alla sua convinzione nello spazio assoluto e nel carattere assoluto delle accelerazioni. All'inizio dei *Principia* Egli descrive un celebre esperimento che Egli fece con un secchio di acqua. É un esperimento che ognuno puó prontamente ripetere da se stesso. Il secchio appeso a una corda fortemente attorcigliata e viene quindi rilasciato. Ci sono tre osservazioni chiave, rappresentate in fig. 7.15.2.

**Caratteristiche principali dell'esperimento che Newton
ha citato come evidenza del carattere assoluto della
rotazione e della accelerazione associata.**

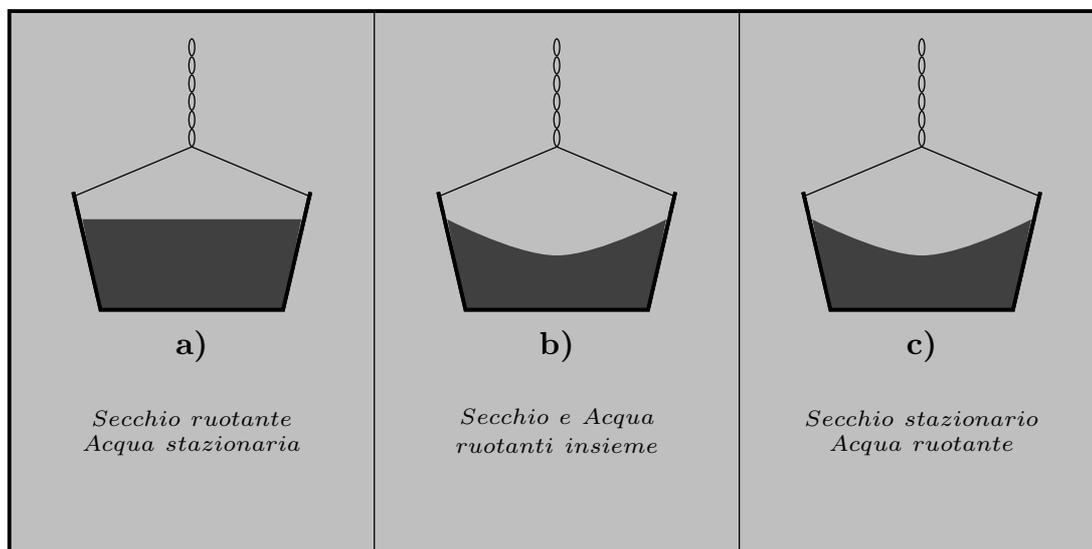


fig.7.15-2

1. Inizialmente il secchio ruota rapidamente, ma l'acqua rimane quasi a riposo, prima che le forze viscosive abbiano avuto il tempo di farla ruotare. La superficie dell'acqua é piatta, proprio com'era prima che il secchio venisse rilasciato.

2. L'acqua ed il secchio stanno ruotando insieme; la superficie dell'acqua é diventata concava (vedi Problema 12-18).

3. Il secchio viene improvvisamente fermato, ma il corpo dell'acqua continua a ruotare, e la sua superficie rimane curva.¹⁾

Chiaramente, disse Newton, il moto relativo del secchio e dell'acqua non é il fattore che determina la curvatura della superficie dell'acqua. Deve essere la rotazione assoluta dell'acqua nello spazio, e la sua accelerazione costante, che é alla base del fenomeno. E con l'aiuto di $F = ma$ possiamo spiegarlo quantitativamente.

L'argomento di Newton é potente. Poteva indicare ulteriori prove a sostegno delle sue opinioni sul rigonfiamento della terra stessa in virt della sua rotazione. Il diametro equatoriale della Terra é piú grande del diametro polare di circa 1 parte su 300. Sembra quasi ovvio, anche senza calcoli dettagliati, che questo é strettamente legato al fatto che a_{λ}/g é circa 1/300 all'equatore ed é zero ai poli (anche se il calcolo dettagliato é, in effetti, un po' disordinato).

Newton non si é fermato qui, naturalmente. Egli Ha tenuto la chiave della gravitazione universale. Anche una terra non rotante non sarebbe una struttura inerziale, perché l'intera terra sta accelerando verso il sole.

Per questo sistema noi abbiamo:

$$\omega = 2\pi/(3.16 \cdot 10^7) s^{-1}; \quad R = 1.40 \cdot 1.49 \cdot 10^{11} m; \quad a_2 = \omega^2 R = 5.9 \cdot 10^{-3} m/s^2. \quad (7.15.4)$$

Se potessimo concepire un oggetto che fosse immune all'attrazione gravitazionale del sole, non obbedirebbe alla legge di inerzia osservata da una sistema di riferimento attaccato alla terra. Dal punto di vista di Newton l'accelerazione é reale e assoluta ed é connessa all'esistenza di una ben definita forza gravitazionale fornita dal Sole.

Era circa la fine della strada per quanto riguardava Newton. Per lui il sistema delle stelle forniva l'arena in cui si svolgevano i moti che analizzava cosí brillantemente. Un sistema di riferimento solidale a queste stelle fisse potrebbe essere preso per costituire un vero sistema inerziale, anche se potrebbe non coincidere con lo spazio assoluto in cui credeva.

Oggi, grazie al lavoro di Astronomi, conosciamo molto dei movimenti di alcune di quelle stelle fisse. Siamo diventati consapevoli del nostro coinvolgimento in una rotazione generale della nostra Galassia. Il sole sembrerebbe fare un giro completo della Galassia in circa $2.5 \cdot 10^8$ anni ad una distanza radiale di circa $2.5 \cdot 10^4$ anni luce dal centro. Per questo moto noi avremo:

$$\omega \simeq 2\pi/(8 \cdot 10^{15}) rad/s; \quad R \simeq 2.4 \cdot 10^{20} m; \quad a_3 \simeq 10^{-10} m/s^2 \quad (7.15.5)$$

Sembra che questa accelerazione possa essere ragionevolmente spiegata per mezzo della legge di Newton sulla gravitazione universale, se consideriamo il sistema solare come avere un'accelerazione centripeta sotto l'attrazione di tutte le stelle che si trovano all'interno della sua orbita. Ma nessuno degli esperimenti dinamici che noi facciamo sulla Terra ci richiede di tener conto di questo effetto estremamente minuto, o, anche per la maggior

¹⁾ Newton non suggerisce di aver effettivamente eseguito questo terzo passo, ma rappresenta un completamento naturale dell'esperimento come se fosse possibile eseguirlo autonomamente.

parte degli scopi, della rivoluzione della Terra attorno al Sole. (La rotazione della Terra attorno al proprio asse é, tuttavia, una considerazione importante, e in effetti un aiuto importante in questioni come la navigazione giroscopica). La figura 7.15-3 schematizza i tre sistemi di riferimento ruotanti in cui ci troviamo (ignoriamo qui l'accelerazione causata dalla Luna).

Accelerazioni di qualsiasi sistema di riferimento di laboratorio collegato alla superficie terrestre.

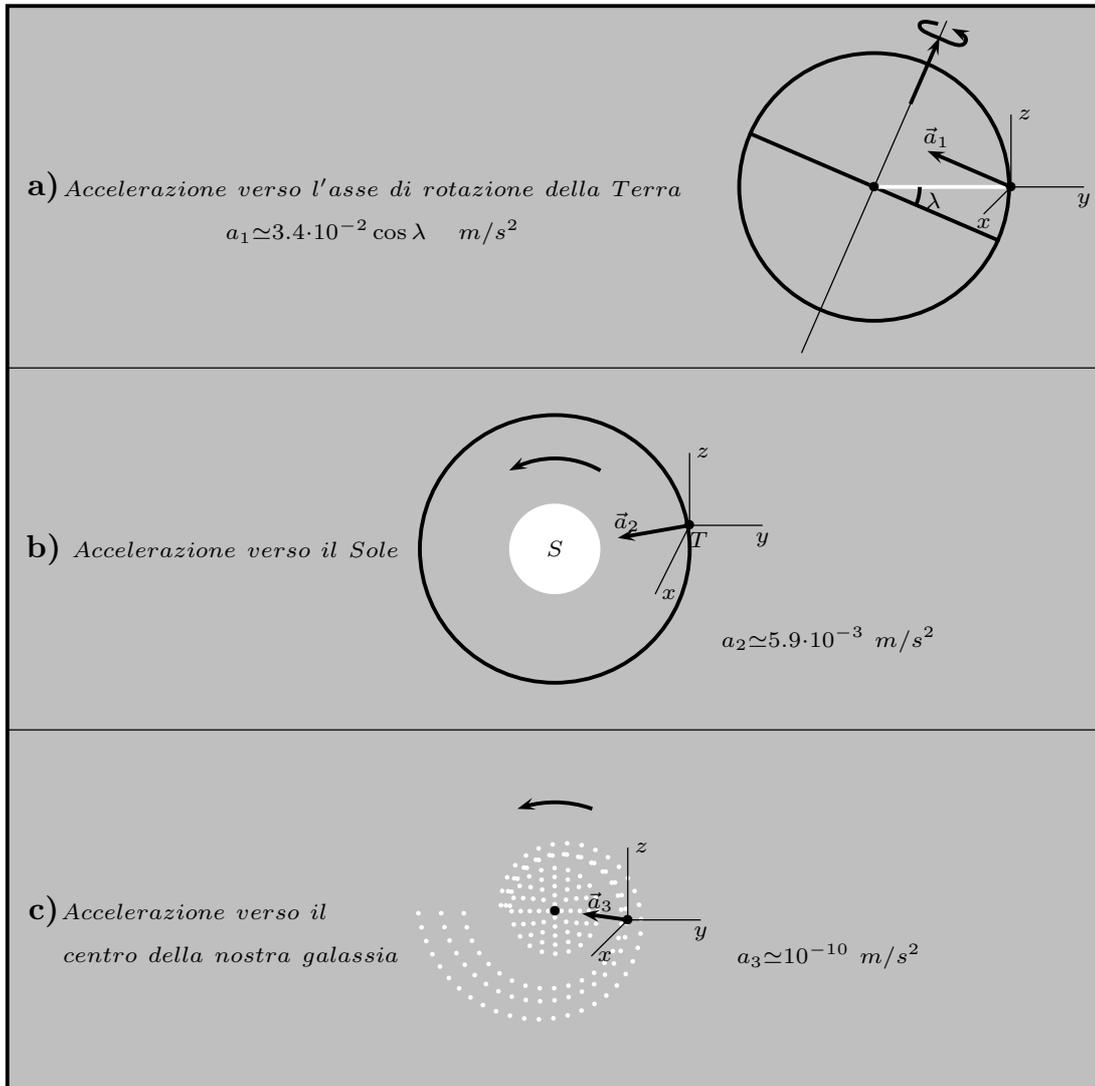


fig.7.15-3

Ma non abbiamo ancora trovato un oggetto non accelerato a cui possiamo collegare il nostro sistema di riferimento inerziale. In effetti, potremmo estendere ulteriormente questa ricerca allettante. Vi é qualche evidenza che le galassie stesse tendono a raggrupparsi in gruppi contenenti alcune galassie o forse migliaia. Il nostro gruppo locale consiste di circa 10 galassie. Sebbene galassie individuali possano avere moti piuttosto complessi l'una rispetto all'altra, questo gruppo si ritiene che abbia un movimento piú o meno comune attraverso lo spazio.

Allora, dove sono le stelle fisse o altri oggetti astronomici a cui possiamo collegare il nostro sistema di riferimento inerziale? Sembra che il riferimento alle stelle fisse non sia una soluzione e contenga un elemento scomodo della metafisica (sebbene usiamo frequentemente questa frase come una designazione stenografica per l'istituzione di un sistema inerziale). Questo non significa che la ricerca astronomica per un sistema di riferimento inerziale é stata senza valore. Infatti, almeno fino al livello galattico, sembrerebbe che gli apparenti distacchi dalla legge di inerzia possano essere ricondotte ad accelerazioni identificabili del sistema di riferimento in cui vengono osservati i movimenti. Tuttavia, la ricerca é incompleta e quindi sembra probabile che rimanga. In definitiva, quindi, ci basiamo su una definizione operativa basata su esperimenti e osservazioni dinamiche locali. Noi definiamo un sistema di riferimento inerziale essere uno in cui, sperimentalmente, vale la legge di inerzia di Galileo. La vera esistenza della proprietá inerziale rimane, tuttavia, un profondo e affascinante problema, e noi finiremo il capitolo con qualche nota su questa molta caratteristica fondamentale della dinamica.

7.16 - Speculazioni sull'origine dell'inerzia

Non tutti hanno accettato la visione di Newton secondo cui i fenomeni associati agli oggetti rotanti hanno dimostrato il carattere assoluto dell'accelerazione. Il filosofo vescovo, George Berkeley, fu forse la prima persona ad argomentare¹⁾ che tutti i movimenti, compresi quelli rotazionali, hanno solo significato come movimenti relativi ad altri oggetti. La rotazione di due sfere attorno al loro centro di massa non poteva, si disse, essere immaginato in uno spazio altrimenti vuoto. Solo quando introduciamo lo sfondo rappresentato dalle stelle abbiamo una base per riconoscere l'esistenza di tale moto.

Circa 150 anni dopo (nel 1872) il filosofo tedesco Ernst Mach presentó la stessa idea in forma molto piú convincente. Egli scrisse:

Per me, solo i moti relativi esistono...ed io posso vedere, a questo proposito, nessuna distinzione fra rotazione e traslazione. Ovviamente non importa se pensiamo che la terra gira attorno al suo asse, o a riposo mentre le stelle fisse ruotano attorno ad essa, non c'è appiattimento della terra, nessun esperimento di Foucault e cosí via, almeno secondo la nostra solita concezione della legge di inerzia. Ora si può risolvere la difficoltà in due modi. O tutto il movimento é assoluto, o la nostra legge di inerzia é espressa in modo errato ... Preferisco la seconda strada. La legge di inerzia deve essere concepita in modo tale che la stessa cosa esista dalla seconda supposizione come dalla prima. Con ciò sará evidente che nella sua espressione, il rispetto deve essere pagato alle masse dell'universo.²⁾

Cosí nacque la profonda e nuova idea, successivamente per diventare famosa come *Principio di Mach*, che la proprietá inerziale di ogni dato oggetto dipende dalla presenza e dalla distribuzione di altre masse. Einstein stesso accettó questa idea e lo assunse come principio fondamentale della Cosmologia.

¹⁾ Nel suo trattato *De Motu*, scritto nel 1717, 30 anni dopo la pubblicazione dei Principia di Newton.

²⁾ E. Mach, *Hystory and Root of the Principle of the Conservation of Energy*, (2nd ed.), Barth, Leipzig (1909). English translation of the 2nd edition by P. Jourdain, Open Court Publishing Co., Lomdon, 1911. Attualmente la prima sentenza della quotazione é presa dal classico libro di Mach, *The Science of Mechanics*, first published in 1883.

Se uno ammette la validità di questo punto di vista, si vede che l'intera base della dinamica é coinvolta. Per considerare il metodo che noi descrivemmo nel capitolo 9 per trovare il rapporto fra le masse inerziali di due oggetti. Questo rapporto é dato come il rapporto inverso negativo delle accelerazioni che essi producono dalla loro mutua interazione:

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{a_2}{a_1} \quad (7.16.1)$$

Questo sembra molto semplice e diretto, ma é chiaro che la nostra capacità di associare valori specifici alle singole accelerazioni, distinte dall'accelerazione relativa totale, dipende completamente dall'identificazione di un sistema di riferimento in cui queste accelerazioni possono essere misurate. A tale scopo, lo sfondo fisico fornito da altri oggetti é essenziale.

Guardando criticamente al fenomeno del moto rotazionale, Mach allegava alcune nozioni intuitive che sono molto piú profonde di quelle che abbiamo in relazione al movimento rettilineo. Egli considerava l'esperimento del secchio fornito da Newton che abbiamo discusso nel paragrafo precedente. É molto chiaro che la curvatura della superficie dell'acqua é collegata in modo schiacciante all'esistenza della rotazione relativa alla grande quantità di materia distante dell'universo. Quando la rotazione relativa viene interrotta, la superficie dell'acqua diventa piatta. Quando il secchio ruota e l'acqua rimane ferma (entrambi relativi alle stelle fisse), la forma della superficie d'acqua rimane non influenzata. Ma, disse Mach, quello può essere solo una questione di grado. 'No, uno', ha scritto, é competente a dire come sarebbe andato a finire l'esperimento se i lati del secchio fossero aumentati di spessore e di massa fino a che non fossero stati parecchie leghe di spessore." La sua stessa convinzione era che questa rotazione di un secchio avrebbe effettivamente generato l'equivalente di forze centrifughe sull'acqua al suo interno, anche se quest'acqua non aveva movimento rotatorio nel senso accettato.

Questa é davvero un'idea di partenza. Presentiamola in un contesto leggermente diverso. Sappiamo che l'azione di dare ad un oggetto una accelerazione \vec{a} , rispetto ad un sistema di riferimento inerziale definito dalle stelle fisse, chiama in gioco una forza inerziale, eguale a $-m\vec{a}$ che esprime la resistenza dell'oggetto ad essere accelerato. Nella visione di Mach abbiamo ugualmente diritto (anzi, obbligo) di accettare una descrizione del fenomeno in un sistema di riferimento sempre legato all'oggetto stesso. In questo sistema di riferimento il resto dell'Universo ha l'accelerazione $\vec{a}' = -\vec{a}$ e la forza inerziale $m\vec{a}'$ che l'oggetto sperimenta deve essere attribuibile all'accelerazione delle altre masse.

Questo allora ci porta alla questione quantitativa: se a una massa M , a distanza r , viene data l'accelerazione relativa ad un dato oggetto, quale contributo apporta alla forza inerziale totale ma che l'oggetto sperimenta? Poiché noi sappiamo che la forza é proporzionale a m , noi possiamo discutere sulla base della simmetria e della relatività che deve essere proporzionale anche a M . Ma a questo punto entriamo in una realtà piú speculativa. Un'analogia molto suggestiva é fornita dalle interazioni elettromagnetiche. Se due cariche elettriche q_1 e q_2 , sono separate da una distanza r , sappiamo che la forza elettrostatica esercitata da q_1 su q_2 é data, in modulo, da:

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (7.16.2)$$

dove k é una costante che dipende dalla particolare scelta delle unità di misura. Se, tuttavia, alla carica q_1 é data una accelerazione a vi é una forza addizionale che entra in

gioco, direttamente proporzionale ad a e inversamente proporzionale alla distanza:

$$F'_{12} = k \frac{q_1 q_2 a}{c^2 r} \quad (7.16.3)$$

dove c é la velocità della luce. Poiché questa forza decresce piú lentamente con la distanza rispetto all'interazione elettrostatica, può sopravvivere in misura apprezzabile a distanze alle quali la forza statica di $1/r^2$ é diventata trascurabile. Questa é, infatti, la base del campo di radiazione elettromagnetica per mezzo del quale segnali possono essere trasmessi su larghe distanze.

Supponiamo ora che noi assumiamo una situazione analoga per le interazioni gravitazionali. La legge di base statica della forza é:

$$F_{12} = G \frac{Mm}{r^2} \quad (7.16.4)$$

La forza su m associata con una accelerazione di M dovrebbe essere data da:

$$F'_{12} = G \frac{Mma}{c^2 r} \quad (7.16.5)$$

Su questa base possiamo stimare la relativa grandezza del contributo dalle varie masse di interesse, la Terra, il Sole, la nostra Galassia, e il resto dell'Universo. Tutto ciò che dobbiamo fare é calcolare i valori di M/r per questi oggetti. I risultati sono mostrati nella Tabella 16-1 utilizzando i numeri alla potenza piú vicina di soli 10.

Tabella 16-1: Contributi relativi all'inerzia

Source	M (kg)	r (m)	M/r (kg/m)	M/r (relativo)
Terra	10^{25}	10^7	10^{18}	10^{-8}
Sole	10^{30}	10^{11}	10^{19}	10^{-7}
Nostra Galassia	10^{41}	10^{21}	10^{20}	10^{-6}
Universo	10^{52}	10^{26}	10^{26}	1

Noi vediamo che, in accordo con questa teoria, l'effetto di un oggetto vicino, anche se massiccio come la Terra stessa, sarebbe trascurabile rispetto all'effetto dell'universo in generale.

La forza inerziale totale chiamata in esistenza se tutto nell'universo acquisisce una accelerazione a rispetto ad un dato oggetto si ottiene sommando le forze F'_{12} dell'equazione (7.16.5) su tutte le masse diverse dalla m stessa:

$$F_{inerziale} = ma \sum \frac{GM}{c^2 r} \quad (7.16.6)$$

Questa, tuttavia, dovrebbe essere identica a quella che noi sappiamo essere la grandezza della forza inerziale come direttamente data dal valore di ma . Cosí la teoria richiederebbe la seguente identitá:

$$\sum_{Universe} \frac{GM}{c^2 r} = 1 \quad (7.16.7)$$

É chiaro dalla Tabella 16-1 che anche una massa locale cosí grande come la nostra Galassia rappresenta solo un piccolo contributo; ciò in cui siamo coinvolti é una sommatoria della distribuzione approssimativamente uniforme della materia rappresentata dall'universo nel suo insieme. Se noi consideriamo esso come una sfera, centrata su noi stessi, di densità media ρ e raggio $R_U (\simeq 10^{10} \text{anni luce} = 10^{26} \text{ m})$, noi possiamo avere:

$$\sum_{\text{Universe}} \frac{M}{r} \implies \int_0^{R_U} \frac{4\pi\rho r^2}{r} dr = 2\pi\rho R_U^2 \quad (7.16.8)$$

La massa totale é, comunque, data da:

$$M_U = \frac{4\pi}{3}\rho R_U^3 \quad (7.16.9)$$

Cosí noi abbiamo, su questa semplice rappresentazione (basata sulla geometria Euclidea):

$$\sum_{\text{Universe}} \frac{M}{r} = \frac{3}{2} \frac{M_U}{R_U} \simeq 10^{26} \text{ kg/m} \quad (7.16.10)$$

Usando il valore $G \simeq 10^{-10} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ e $c^2 \simeq 10^{17} \text{ m}^2/\text{s}^2$, noi avremmo allora:

$$\sum_{\text{Universe}} \frac{GM}{c^2 r} \simeq 10^{-1} \quad (7.16.11)$$

Tenendo conto delle incertezze nella nostra conoscenza della distribuzione della materia per tutto lo spazio, molti direbbero che il fattore di circa 10 che separa il valore empirico di sopra dal valore teorico (unitá) richiesto dall'equazione (7.16.7) é non significativo. Il risultato é intrigante, per non dire altro, e molti cosmologi hanno accettato come fondamentalmente corretto questo sviluppo dalle idee principali esposte da Mach e Einstein.³⁾

³⁾ Per ulteriori letture su questo affascinante argomento, vedere, per esempio:

1) R. H. Dicke, 'The Many Faces of Mach', in *Gravitation and Relativity* (ed. H.-Y. Chin and W. F. Hoffmann, eds.), W. A. Benjamin, New York, 1964;

2) N. R. Hanson, 'Newton's First Law', and P. Morrison, 'The Physics of the Large,' entrambi in *Beyond the Edge of Certainty* (R.G. Colodny, ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.,1965;

3) D.W. Sciama, *The unity of the Universe*, Doubleday, New York, 1961, and *The Physical Foundations of General Relativity*, Doubleday, New York, 1969.

Fine del Cap.7