Cap. 6

Dinamica degli urti

6.1 - Introduzione

Si ha **urto** tutte le volte che due corpi vengono a contatto ed hanno, nei punti della superficie di contatto, componenti delle velocitá, perpendicolari alla superficie di contatto, fra loro diverse.

Ci limiteremo all'urto fra due sfere omogenee di massa m_1 ed m_2 o fra una sfera e un piano, quest'ultimo essendo equiparabile ad una sfera di raggio infinito. Cosí l'urto é sempre **centrale**, cioé la normale comune alla superficie delle sfere urtanti nel punto di contatto passa per i barficentri delle due sfere, e quindi i due corpi, in seguito all'urto, **non acquistano una rotazione attorno al proprio baricentro**.

L'urto é **normale** se il moto dei centri delle due sfere avviene lungo una stessa retta, che é quindi la normale comune alle due sfere nel punnto di contatto; altrimento l'urto é **obliquo**.

L'urto é **anelastico**, quando avviene fra corpi anelastici, nei quali, cioé, **ogni deformazione é permanente** e non sviluppa nei corpi delle reazioni elastiche che tendono a distruggere o, almeno, sminuirne la deformazione subita. L'urto e la deformazione proseguono allora fino a quando le componenti delle velocitá, normali alla superficie di contatto, si sono uguagliate.

L'urto é **elastico**, quando avviene fra corpi elastici; la deformazione subita dalle sfere aumenta finché le velocitá normali si sono eguagliate, ma poi la forza elastica generata dalla deformazione respinge l'una sfera dall'altra. Le sfere, dopo l'urto, rimbalzano e non resta nelle sfere nessuna traccia dell'urto subito; l'energia elastica immagazzinata nelle sfere in conseguenza della deformazione dovuta alla prima fase dell'urto come si immagazzina in una molla compressa, si trova successivamente e integralmente restituita al termine dell'urto. Se durante il fenomeno, i corpi elastici urtanti non sono soggetti a nessuna forza esterna ma solo alle forza mutue generate dall'urto, l'unica energia presente prima e dopo l'urto é l'energia cinetica, e **deve restare in totale immutata**.

Nei casi ordinari la durata τ dell'urto é molto breve. Esperienze hanno dato risultati in buon accordo con una teoria di Hertz, dalla quale si calcola, in particolare, la durata di τ. Ad es., per una sfera di acciaio di 0.026 m (26 mm), velocitá $0.3 m/s$, che urta contro una sfera uguale ferma, é $\tau = 0.00014\ s$. Per due sfere d'acciaio grandi come la Terra, velocitá relativa 0.01 m/s risulta $\tau = 27\ ore$!

Nell'intervallo di tempo τ, costituente la durata dell'urto fra i due corpi l'un corpo esercita sull'altro una forza $\vec{F}$ e da ció una pressione d'urto che varia da 0 (inizio dell'urto, t=0) a un massimo, indi torna a 0 (termine dell'urto, $t = \tau$).

L'integrale:

$$\int_0^\tau \vec{F} \cdot dt \tag{6.1.1}$$

é l'impulso che l'una particella esercita sull'altra.

6.2 - Urto normale anelastico

Due sfere anelastiche, di massa m_1, m_2, si muovono lungo l'asse x con velocitá $u_1 = \dfrac{dx_1}{dt}$, $u_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$, costanti; non si hanno forze applicate su entrambe le particelle. Non occorrono notazioni vettoriali.

In valore e segno, supporremo sempre: $x_1 < x_2$; allora l'urto avviene se, in valore e segno, é $u_1 > u_2$.

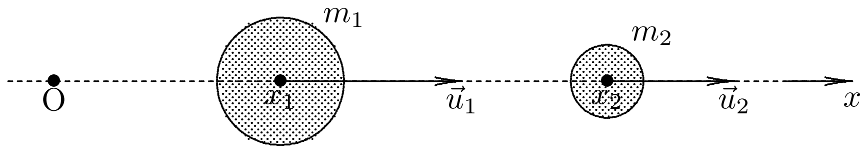

fig.6.2.1

Si cerca la velocitá finale U, dopo l'urto, la quale é comune alle due sfere.

Al sistema costituito dalle due sfere urtantisi non é applicata alcunaforza esterna, quindi per il teorema di conservazione della quantitá di moto si ha:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = U(m_1 + m_2) \tag{6.2.1}$$

da cui:

$$U = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \tag{6.2.2}$$

A titolo di esempio consideriamo l'urto di un corpo molle contro un muro fermo; per questo bisogna porre nella (6.2.2) $m_2 = \infty$ ottenendo $U = 0$. Ossia la sfera urtante si schiaccia contro la parete che resta praticamente immobile.

Valutiamo ora la variazione dell'energia cinetica nell'urto anelastico:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)U^2 - \left(\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\right) \tag{6.2.3}$$

Quindi, per la (6.2.2):

$$\begin{aligned}
\Delta\mathscr{E} =& \frac{1}{2}\frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{m_1 + m_2} - \left(\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\right) = \\
=& \frac{\cancel{m_1^2 u_1^2} + \cancel{m_2^2 u_2^2} + 2m_1 m_2 u_1 u_2 - \cancel{m_1^2 u_1^2} - m_1 m_2 u_1^2 - m_2 m_1 u_2^2 - \cancel{m_2^2 u_2^2}}{2(m_1 + m_2)} = \\
=& -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{(u_1 - u_2)^2}{2} < 0
\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Si ha dunque perdita di energia cinetica, che si trasforma in una equivalente quantitá di calore per attrito interno, nella deformazione dei corpi elastici.

6.3 - Pendolo balistico

Un proiettile di fucile di massa nota m_1 é sparato orizzontalmente contro un corpo (per es. un blocco di piombo o un sacchettodi sabbia) di massa m_2 nota ed inizialmente fermo, sospeso in C (*pendolo balistico*).

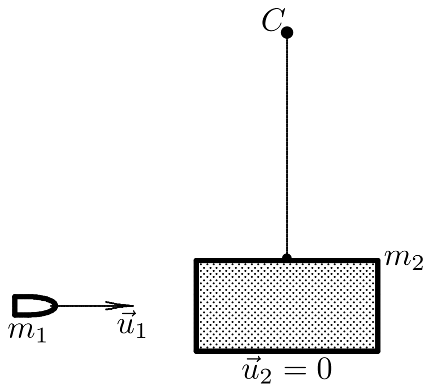

fig.6.3-1

In seguito all'urto ricevuto, il pendolo si pone ad oscillare di moto armonico, con una piccola ampiezza a misurabile. É anche noto il periodo T del pendolo. Dalla teoria del pendolo sappiamo che l'ampiezza a, il periodo T e la velocitá u_0 con cui il pendolo passa per la posiszione di riposo sono legati dalla:

$$u_0 = a\omega = a\frac{2\pi}{T} \tag{6.3.1}$$

La velocitá u_0 é, quindi, una quantitá misurabile e, dunque, nota.

Il proiettile resta conficcato nel blocco di massa m_2.

Per il teorema di conservazione della quantitá di moto, si ha:

$$m_1 u_1 = U(m_1 + m_2) = u_0(m_1 + m_2) \tag{6.3.2}$$

da cui:

$$u_1 = \frac{u_0(m_1 + m_2)}{m_1} \tag{6.3.3}$$

L'apparecchio permette la determinazione rapida (ma non molto precisa) della velocitá dei proiettili.

6.4 - Urto normale elastico

Si consideri ancora la figura 6.2-1. Siano U_1 e U_2 le velocitá delle sfere dopo l'urto. Per il teorema di conservazione della quantitá di moto, si ha:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2 \tag{6.4.1}$$

Poiché l'urto é elastico si ha la conservazione dell'energia cinetica che, eliminando il fattore $\frac{1}{2}$, si scrive:

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 U_1^2 + m_2 U_2^2 \tag{6.4.2}$$

Le equazioni (6.4.1) e (6.4.2) costituiscono un sistema di equazioni nelle incognite U_1 e U_2.

Queste si scrivono:

$$m_1(u_1 - U_1) = m_2(U_2 - u_2) \tag{6.4.3}$$

$$m_1(u_1 + U_1)(u_1 - U_1) = m_2(u_2 + U_2)(U_2 - u_2) \tag{6.4.4}$$

Dividendo membro a membro:

$$u_1 + U_1 = u_2 + U_2 \tag{6.4.5}$$

da cui:

$$U_2 = u_1 - u_2 + U_1 \tag{6.4.6}$$

che sostituita nella (6.4.1), comporta:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 U_1 + m_2 u_1 - m_2 u_2 + m_2 U_1 \tag{6.4.7}$$

ossia:

$$(m_1 - m_2)u_1 + 2m_2 u_2 = (m_1 + m_2)U_1 \tag{6.4.8}$$

da cui:

$$\boxed{U_1 = \frac{(m_1 - m_2)u_1 + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2}} \tag{6.4.9}$$

Analogamente calcolando U_1 dalla (6.4.5) e sostituendola nella (6.4.1), si ottiene:

$$\boxed{U_2 = \frac{(m_2 - m_1)u_2 + 2m_1 u_1}{m_1 + m_2}} \tag{6.4.10}$$

Casi particolari:

a) Per $m_1 = m_2$ si ha:

$$U_1 = u_2 \qquad e \qquad U_2 = u_1 \tag{6.4.11}$$

ossia le velocitá delle due sfere, in seguito all'urto, si scambiano.

b) Per $u_2 = 0$ si ha:

$$U_1 = \frac{(m_1 - m_2)u_1}{m_1 + m_2} \qquad U_2 = \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2} \tag{6.4.12}$$

se é anche $m_1 = m_2$, é:

$$U_1 = 0 \qquad U_2 = u_1 \tag{6.4.13}$$

la palla urtante si ferma, quella urtata procede con la velocitá della palla urtante.

Se é $m_1 > m_2$, U_1 e u_1 hanno ugual segno, ma é $U_1 < u_1$ cioé se la palla urtante ha maggior massa, prosegue anche dopo l'urto nel verso primitivo, ma con velocitá minore.

Se é $m_1 < m_2$, U_1 e u_1 hanno segno opposto, ma é $|U_1| < |u_1|$; cioé la palla urtante di minor massa, rimbalza, ma con velocitá ridotta.

Se infine é $m_2 = \infty$, é $U_1 = -u_1$, $U_2 = 0$. L'ostacolo resta fermo, la palla urtante rimbalza perfettamente.

Le esperienze di conferma si fanno con sfere di avorio o di acciaio, costituenti altrettanti pendoli.

6.5 - Pendolo di Newton[1)]

Il pendolo di Newton è un interessante esempio di pendoli accoppiati ed è anche un giocattolo divertente. Può fornire molti momenti di studio affascinante. In breve, il pendolo di Newton è composto da diversi, di solito cinque, pendoli uguali ciascuno sospeso da una fibra a forma di V posta perpendicolarmente alla linea dei pesi del pendolo. Così il moto delle palline è unidimensionale lungo la loro linea di sospensione. Le palline sono in genere sfere di acciaio temprato e i pendoli sono disposti in modo tale che le sfere si toccano. La configurazione confina le traiettorie delle palline a una dimensione, (vedi figura 6.5-1).

Il movimento è piuttosto interessante. Se, ad esempio, la palla più a destra viene spostata (fig.6.5-1a) e poi rilasciata per scontrarsi con la linea delle palline rimanenti, uno osserva che la collisione, per la maggior parte, provoca la palla all'estrema sinistra (fig.6.5-1b) ad allontanarsi dal gruppo con una velocità simile alla velocità originale della palla più a sinistra. Allo stesso modo, se le due palline più a destra vengono inizialmente spostate e rilasciate, le due palline più a sinistra saranno spostate dalle collisioni delle palline più a destra con la linea delle palline rimanenti. Anche in questo caso le velocità sembrano avere la stessa grandezza.

La spiegazione più primitiva di questi fenomeni è che le osservazioni sono il risultato della conservazione della quantità di moto e della conservazione dell'energia cinetica, che noi abbiamo utilizzato per spiegare gli urti elastici. Consideriamo la situazione dove si muovono solo due palline. Supponiamo che la quantità di moto e l'energia cinetica iniziali della palla più a sinistra sono:

$$p_i = mv_0 \quad e \quad E_i = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{3.14.1}$$

[1)] Gregory L. Baker, James A. Blackburn: The Pendulum a case study in physics - Oxford University Press, 2009, Appendice D, pag.270. (The cradle pendulum).

Dopo la collisione la quantità di moto e della energia cinetica della palla più a destra sono:

$$p_f = mv_0 \quad e \quad E_f = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{3.14.2}$$

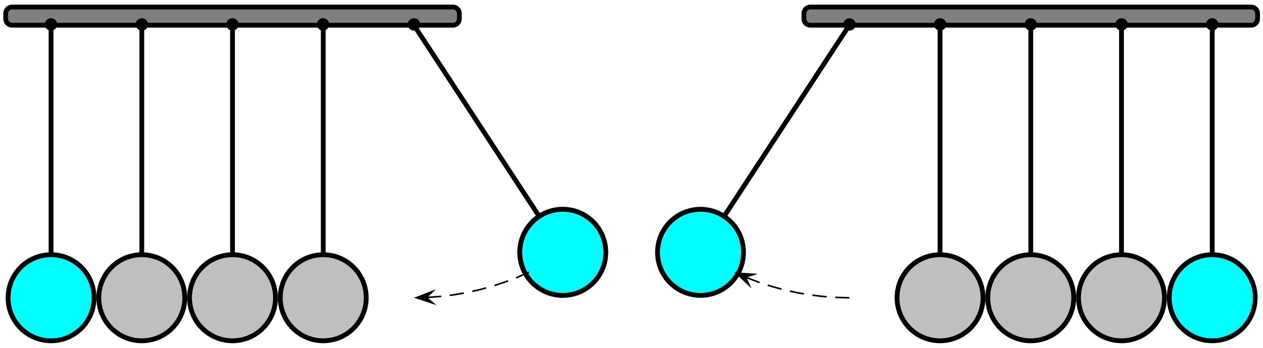

fig.6.5-1a fig.6.5-1b

Se si ha una serie di sfere uguali, l'urto di una sfera estrema si comunica successivamente alla fila di sfere; **rimbalza l'ultima**.

Contrariamente alla credenza popolare e alla sua denominazione, la configurazione delle palline oscillanti non è stata effettivamente inventata da Newton, nè è stato il primo a scrivere le leggi che il dispositivo dimostra.

I principi dimostrati da una tale dispositivo furono menzionati per la prima volta in un documento presentato da John Wallis,[2)] Christopher Wren[3)] e Christiaan Huygens[4)] alla Royal Society nell'anno 1662. Christiaan Huygens, in particolare, contribuì maggiormente all'invenzione del pendolo. Il lavoro di Huygens, ″*De Motu Corporum ex Percussione*″ pubblicato postumo nel 1703,[5)] discute la collisione di corpi sospesi e il trasferimento del moto da un corpo in movimento a quello in quiete. **Fu anche il primo a riferire che spiegare la meccanica sulla base di un sistema simile a un pendolo richiedeva l'uso della conservazione della quantità di moto e di una quantità proporzionale alla massa per la velocità al quadrato. La quantità di massa per la velocità al quadrato è, ovviamente, l'energia cinetica di un corpo in movimento; tuttavia, il termine fu coniato quasi un secolo dopo la scoperta di Huygens**.

D'altra parte, la legge di conservazione della quantità di moto è stata suggerita per la prima volta da Renè Descartes.[6)] La formula di Renè, quantità di moto = massa ×

[2)] John Wallis:Ashford, Regno Unito, 3 dicembre 1616 - Oxford, Regno Unito, 28 ottobre 1703, Doctor of Sacred Theology (S.T.D.).

[3)] Sir Christopher Wren: East Knoyle, Regno Unito, 20 ottobre 1632 - Londra, Regno Unito, 25 febbraio 1723.

[4)] Christiaan Huygens: L'Aia, Paesi Bassi, 14 aprile 1629 - L'Aia, Paesi Bassi, 8 luglio 1695.

[5)] Traduzione dal latino in lingua inglese dovuta a Michael S. Mahomey: Christiaan Huygens, On the motion of bodies resulting from impact, 1977, http://www.princeton.edu.

[6)] René Descartes (in latino Renatus Cartesius): La Haye en Touraine (oggi Descartes), Francia, 31 marzo 1596 - Stoccolma, Svezia, 11 febbraio 1650.

velocità, funzionava in alcuni scenari, ma non poteva spiegare la collisione di oggetti e le conseguenti quantità di moto.

Tuttavia, l'abate Mariotte,[7] **fisico e sacerdote francese, è stato il primo a condurre e registrare correttamente gli esperimenti sulle sfere a pendolo**.

Dal libro del 1676, in particolare, a pag. 22 e 23 si legge:

Proposizione XVI

Se due corpi elastici sono uguali, uno colpisce direttamente l'altro a riposo, questo ultimo prenderà tutta la velocità del primo dopo l'urto, mentre il primo rimarrà immobile.

Proposizione XVII

Se due sfere elastiche uguali si scontrano con velocità disuguali, si scambieranno le loro velocità.

Seguono le dimostrazioni.

Newton ha menzionato il lavoro di Wallis, Wren, Huygens e Mariotte nel suo libro, i Principia, e questo è l'intero contributo alla configurazione che ora porta il suo nome.

Nella edizione di Colonia del 1760 della terza edizione del *Philosophiae naturalis principia mathematica.*[8] nello ″Scholium″ del Corollario VI a pagina 129 e segg. si legge:″**Fin qui ho riferito i principi accolti dai matematici e confermati da numerosi esperimenti. Per mezzo delle prime due leggi e dei primi due corollari Galileo trovò che la caduta dei gravi è proporzionale al quadrato del tempo, e che il moto dei proiettili avviene secondo una parabola........Dalle stesse leggi e corollari dipendono le dimostrazioni circa i tempi dei pendoli oscillanti, provate dall'esperienza quotidiana degli orologi. Da queste medesime e dalla terza legge Christopher Wren, cavaliere dallo speron d'oro (Eques auratus), John Wallis S.T.D. e Christiaan Huygens, i massimi geometri del nostro tempo, ricavarono, ciascuno per proprio conto, le regole dell'urto e della riflessione dei corpi duri, e quasi nello stesso tempo le comunicarono alla ″Royale Society″, interamente d'accordo (per quanto riguarda queste leggi) fra di loro: e per primo il Wallis, in séguito il Wren e l' Huygens esposero la scoperta. Ma la verità fu provata da Wren con l'esperimento sui pendoli: il che anche il chiarissimo Mariotte, di recente, giudicò degno di venire esposto in un intero libro. In verità, affinchè questo esperimento concordi perfettamente con la teoria, occorre tenere conto tanto della resistenza dell'aria, quanto della forza elastica dei corpi che si urtano.″ ......**

Si ritiene che il pendolo prenda il nome da Newton per due motivi. In primo luogo, si può derivare la legge di conservazione della quantità di moto dalla seconda legge del moto di Newton (Forza = massa $\times$ accelerazione) e, in secondo luogo, come un'ode al contributo

[7] Edme Mariotte: Dijon, Francia, 1620 (circa) - Parigi, Francia, 12 maggio 1684; Traité de la percussion on choq des corps, dans lequel les principales regles du mouvement sont expliquées, & démontrées par leurs veritables causes, Paris, Imprimerie Royale (1676). Si può trovare anche nella più moderna riproduzione delle sue opere: Oeuvres de M. Mariotte, de l'Academie Royale Des Siences..., Editore Nabu Press, 11 novembre 2011.

[8] Edizione italiana: Classici della Scienza, Collezione diretta da Ludovico Geymonat, *Principi Matematici della Filosofia Naturale* di Isaac Newton, UTET, 1989.

molto maggiore di Newton al campo della fisica rispetto a Huygens o Mariotte.

6.6 - Urto obliquo elastico

L'urto avvenga su di una parete piana, ferma, di massa $m_2 = \infty$. Si ha dunque $u_2 = U_2 = 0$. Sia $\widehat{n}$ il versore normale al piano.

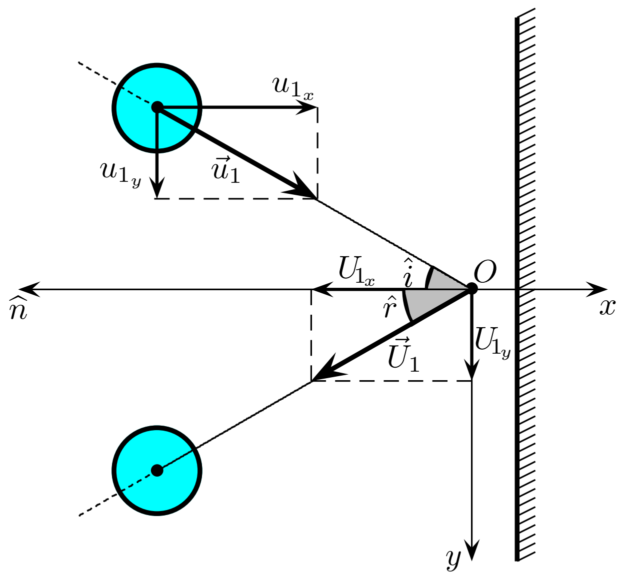

fig.6.6-1

Si scomponga la velocitá $\vec{u}_1$ della sfera urtante nelle due componenti, u_{1_y} parallela al piano urtato e u_{1_x} normale (fig.6.6-1).

Dopo l'urto u_{1_y} resta inalterata (trascurando gli attriti), u_{1_x} si muta in $-u_{1_x}$. Cioé:

$$U_{1_y} = u_{1_y} \qquad\qquad U_{1_x} = -u_{1_x} \tag{6.6.1}$$

Se indichiamo con $\hat{i}$ l'angolo di incidenza ossia l'angolo che la traiettoria della particella urtante forma con la normale al piano e con $\hat{r}$ l'angolo di riflessione ossia l'angolo che la traiettoria della particella dopo l'urto forma con la normale al piano, si ha:

$$\tan\hat{i} = \frac{|u_{1_y}|}{|u_{1_x}|} \qquad e \qquad \tan\hat{r} = \frac{|U_{1_y}|}{|U_{1_x}|} = \frac{|u_{1_y}|}{|-u_{1_x}|} = \tan\hat{i} \tag{6.6.2}$$

Ne segue:

$$\hat{i} = \hat{r} \tag{6.6.3}$$

ossia **l'angolo di incidenza é uguale all'angolo di riflessione**.

Fine del Cap.6