

Cap. 5

Dinamica delle oscillazioni

5.1 - Particella sottoposta a forze elastiche

Si abbia una massa m legata ad una molla vincolata in V . Sia tutto il sistema a riposo e giacente in un piano orizzontale. Assumiamo come origine O del sistema di riferimento la posizione della massa a riposo.

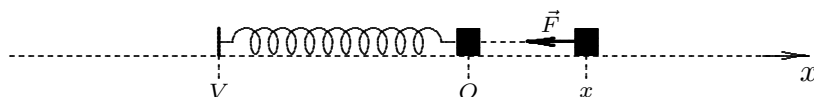


fig.5.1-1

Supponiamo di spostare la massa m dalla sua posizione di riposo O ad una posizione generica x . La massa m é sottoposta alla forza di richiamo della molla che per la **legge di Hooke**¹⁾ é:

$$F = -kx \quad (5.1.1)$$

essendo k (N/m) la costante elastica della molla.

Per il secondo principio della dinamica si ha:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (5.1.2)$$

ossia:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (5.1.3)$$

la cui soluzione é:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (5.1.4)$$

La velocità della massa m durante la il moto é:

$$\dot{x}(t) = -\omega C_1 \sin \omega_0 t + \omega C_2 \cos \omega_0 t \quad (5.1.5)$$

essendo:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.1.6)$$

la pulsazione del sistema massa-molla chiamata **frequenza angolare propria o di risonanza**.

C_1 e C_2 sono due costanti di integrazione determinate dalle condizioni iniziali:

$$\text{Per } t = 0 \implies x(0) = x_0 \quad e \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (5.1.7)$$

¹⁾ Robert Hooke: 18 luglio 1635, Freshwater, Regno Unito - 3 marzo 1703, Londra, Regno Unito.

Imponendo tali condizioni alle equazioni (5.1.4) e (5.1.5), si ha:

$$x(0) = C_1 = x_0 \quad (5.1.8)$$

$$\dot{x}(0) = \omega C_2 = \dot{x}_0 \quad (5.1.9)$$

da cui:

$$C_1 = x_0 \quad (5.1.10)$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \quad (5.1.11)$$

Pertanto le equazioni descriventi in modo completo il moto sono:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (5.1.12)$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{x}_0 \cos \omega_0 t \quad (5.1.13)$$

La soluzione (5.2.4) può essere scritta in una forma differente esprimendo le costanti C_1 e C_2 in funzione di altre due costanti. Infatti, ponendo:

$$C_1 = a \cos \alpha \quad e \quad C_2 = -a \sin \alpha \quad (5.1.14)$$

la (5.2.4) si può scrivere:

$$x = a \cos \alpha \cos \omega_0 t - a \sin \alpha \sin \omega_0 t \quad (5.1.15)$$

ossia:

$$\boxed{x(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha)} \quad (5.1.16)$$

e, quindi:

$$\boxed{\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)} \quad (5.1.17)$$

essendo:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad e \quad \tan \alpha = -\frac{C_2}{C_1} \quad (5.1.18)$$

ossia:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \quad e \quad \tan \alpha = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \quad (5.1.19)$$

Per eliminare l'ambiguità del segno di α è conveniente calcolare anche il $\cos \alpha$ e il $\sin \alpha$; dalla (5.1.14) si ha:

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}} \quad e \quad \sin \alpha = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}} \quad (5.1.20)$$

Le equazioni (5.1.16), (5.1.17) e (5.1.19) descrivono completamente il moto di una particella sottoposta a forza di tipo elastico. Esse dimostrano che la dipendenza dal tempo dello spostamento dalla posizione di riposo è di tipo **sinusoidale o armonico**. Il moto è caratterizzato da tre quantità:

1) la massima deviazione o **ampiezza delle oscillazioni** a ; 2) la **frequenza angolare** ω_0 ; 3) la cosiddetta **fase iniziale** α . L'ampiezza e la fase di un **moto oscillatorio armonico** sono determinate dalle condizioni iniziali, mentre la frequenza angolare non dipende dalle condizioni iniziali ma dai parametri del sistema oscillante.

Diagramma orario di un oscillatore armonico ———
Diagramma della velocità di un oscillatore armonico

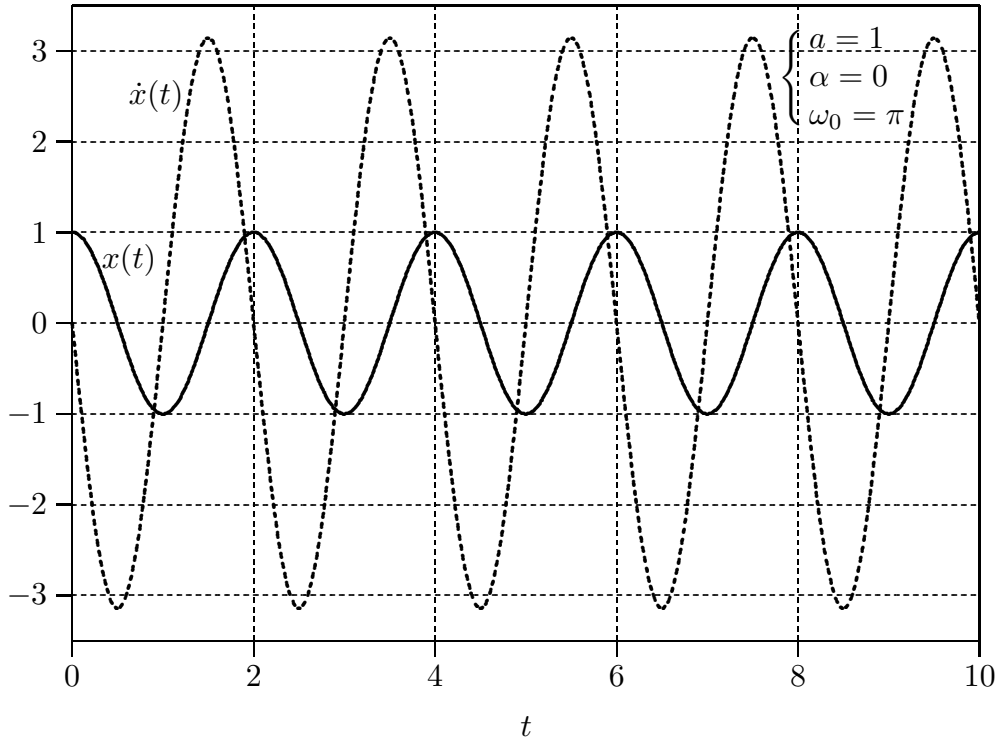


fig.5.1-2

Dal grafico di fig.5.1-2 si evince che la massa m si muove su traiettoria rettilinea dal punto $x = +a$ al punto $x = -a$ e viceversa e che la velocità della massa m è nulla agli estremi della traiettoria $x = +a$ e $x = -a$ ed è massima nella posizione di riposo O . L'accelerazione è massima agli estremi e nulla nella posizione di riposo.

5.2 - Particella sottoposta a forze elastiche in presenza di attrito

Oltre alla forza elastica supponiamo che la particella è sottoposta ad una forza di attrito come avviene in realtà. Assumiamo che tale forza d'attrito è proporzionale alla velocità della particella. Tale legge è vera quando la particella si muove a bassa velocità in aria o in altre specie di fluidi. La forza di attrito fra corpi solidi è, al contrario, indipendente dalla velocità entro larghi limiti. Qualunque sia la legge di dipendenza della forza d'attrito (o forza resistiva) dalla velocità, essa è sempre opposta in verso alla velocità della particella.

La forza totale agente sulla particella di massa m è, allora:

$$\vec{F} = -k\vec{r} - \beta \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (5.2.1)$$

Nel caso di un moto rettilineo, come quello di discusso nel paragrafo precedente, l'equazione del moto è:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0 \quad (5.2.2)$$

L'equazione caratteristica di tale equazione differenziale è:

$$m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0 \quad (5.2.3)$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = -\frac{\beta}{2m} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad e \quad \lambda_2 = -\frac{\beta}{2m} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad (5.2.4)$$

Distinguiamo tre casi:

a) $\frac{\beta^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$. In questo caso le due soluzioni della (5.3.4) sono reali e distinte; pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale è:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{\beta}{2m}t} e^{+\sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-\frac{\beta}{2m}t} e^{-\sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}t} \quad (5.2.5)$$

Il primo termine del secondo membro è privo di significato fisico in quanto allo aumentare del tempo l'ampiezza del moto aumenterebbe oltre ogni limite il che è contro ogni ragionevolezza fisica. Allora la sola espressione che ha significato fisico è il secondo termine, ossia:

$$x(t) = C_2 e^{-\frac{\beta}{2m}t} e^{-\sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}t} \quad (5.2.6)$$

La soluzione rappresenta un moto smorzato nel senso che la particella gradualmente ritorna nella sua posizione di equilibrio che raggiunge per $t = \infty$.

b) $\frac{\beta^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$. In questo caso le due soluzioni della (5.2.4) sono reali coincidenti; pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale é:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{\beta}{2m}t} + C_2 t e^{-\frac{\beta}{2m}t} \quad (5.2.7)$$

Anche in questo caso il moto é smorzato come il caso precedente.

c) $\frac{\beta^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$. In questo caso le due soluzioni della (5.2.4) sono immaginarie e coniugate; pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale é:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{\beta}{2m}t} e^{+i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t} + C_2 e^{-\frac{\beta}{2m}t} e^{-i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t} \quad (5.2.8)$$

dove $C_1 = C'_1 + iC''_1$ e $C_2 = C'_2 + iC''_2$ sono due costanti complesse.

Applicando le formule di Eulero, la (5.2.8) diventa:

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} & \left(C'_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t + iC''_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t + \right. \\ & + iC'_1 \sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t - C''_1 \sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t + \\ & + C'_2 \cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t + iC''_2 \cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t + \\ & \left. + -iC'_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t + C''_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t \right) \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

che si può ancora scrivere:

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} & \left[(C'_1 + C'_2) \cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t - (C''_1 - C''_2) \sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t \right. \\ & \left. + i(C''_1 + C''_2) \cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t + i(C'_1 - C'_2) \sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t \right] \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Introducendo le nuove costanti di integrazione $A = C'_1 + C'_2$ e $B = -(C''_1 - C''_2)$, e prendendo la parte reale, si ha:

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} \left(A \cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t + B \sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t \right) \quad (5.2.11)$$

La soluzione (5.2.11) può essere scritta in una forma differente esprimendo le costanti A e B in funzione di altre due costanti. Infatti, ponendo:

$$A = C \cos \gamma \quad e \quad B = C \sin \gamma \quad (5.2.12)$$

la (5.3.11) si può scrivere:

$$x(t) = C e^{-\frac{\beta}{2m}t} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} t - \gamma \right) \quad (5.2.13)$$

Diagramma orario di un oscillatore armonico smorzato
 ($k = 0.2 \text{ N/m}$, $m = 0.1 \text{ Kg}$, $\beta = 0.03 \text{ N} \cdot \text{s/m}$)

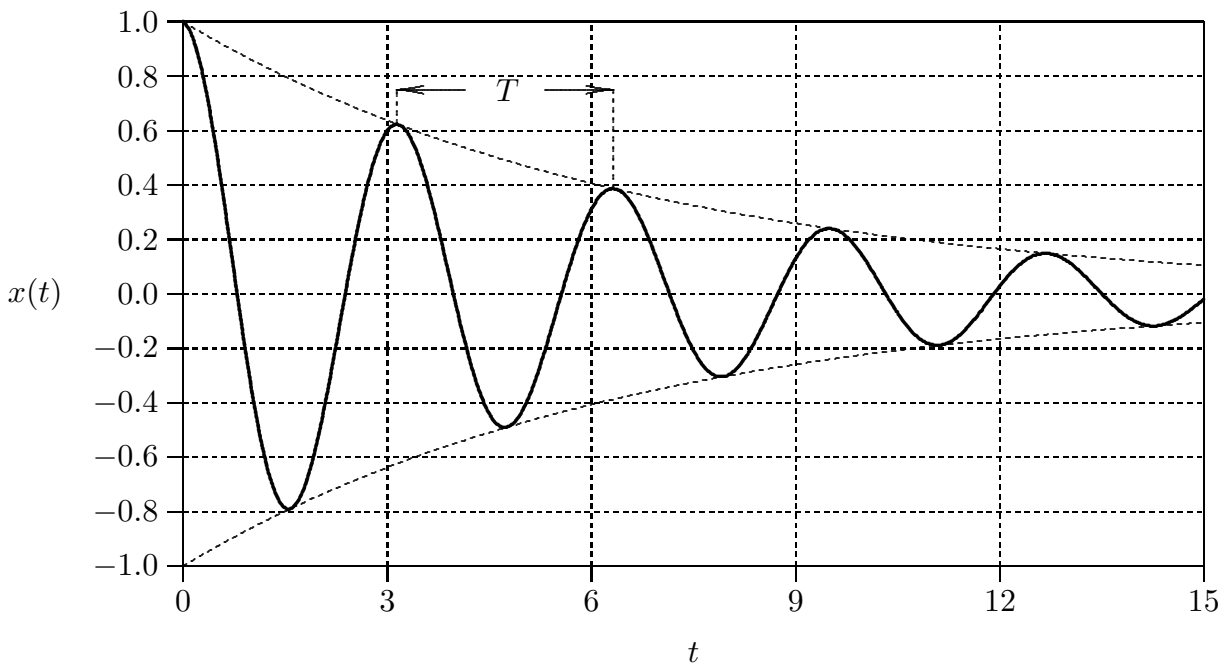


fig.5.2-1

Si ottengono in questo caso oscillazioni armoniche la cui ampiezza decresce esponenzialmente. La più importante proprietà di queste oscillazioni è che la frequenza di oscillazione dell'oscillatore armonico smorzato:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} \quad (5.2.14)$$

è minore dell'oscillatore armonico non smorzato:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.2.15)$$

Se t^* é l'istante in cui l'oscillazione ha un massimo, l'istante in cui si ha un massimo consecutivo é $t^* + T$. In corrispondenza di questi istanti i valori delle ampiezze sono rispettivamente $e^{-\frac{\beta}{2m}t^*}$ e $e^{-\frac{\beta}{2m}(t^* + T)}$, il cui rapporto é:

$$p = e^{\frac{\beta}{2m}T} \quad (5.2.16)$$

Il logaritmo naturale di questo rapporto prende il nome di **decremento logaritmico** δ . Ossia:

$$\delta = \frac{\beta}{2m}T = \frac{\beta}{2m} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi\beta}{m\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}} \quad (5.2.17)$$

Nell'ipotesi reale che $\frac{\beta^2}{4m^2} \ll \frac{k}{m}$, la (5.2.17) diventa:

$$\delta \simeq \frac{\pi\beta}{\sqrt{mk}} \quad (5.2.18)$$

5.3 - Oscillazioni forzate: Risonanza

Uno dei fenomeni piú importanti della dinamica delle oscillazioni é il fenomeno della risonanza che si può verificare ogni qual volta l'oscillazione di una particella di massa m é **forzata** da una forza esterna periodica la cui espressione é:

$$\vec{F}_a = \vec{F}_0 \cos \omega t \quad (5.3.1)$$

L'equazione che governa un oscillatore armonico forzato in presenza di forza resistiva é:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (5.3.2)$$

Dividendo ciascun termine per m e ponendo $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, che é la pulsazione di risonanza dell'oscillatore libero non smorzato, si ha:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (5.3.3)$$

Per integrare questa equazione utilizziamo un teorema della teoria delle equazioni differenziali lineari: *Se $g(t)$ é una soluzione particolare di una equazione differenziale non omogenea, e se $f(t)$ é l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, la funzione $g(t) + f(t)$ é l'integrale generale della equazione differenziale non omogenea.*

L'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea é stato determinato nel paragrafo precedente. Poiché il termine forzante é una funzione periodica di frequenza

angolare ω , l'integrale particolare dell'equazione (5.4.3) lo cerchiamo nella combinazione lineare di funzioni periodiche del tipo:

$$x(t) = p \cos \omega t + q \sin \omega t = \sqrt{p^2 + q^2} \cos(\omega t - \phi) \quad (5.3.4)$$

dove i coefficienti p e q sono costanti da determinare. Sostituendo la (5.3.4) nella (5.3.3) si ha:

$$-\omega^2 p \cos \omega t - \omega^2 q \sin \omega t + \frac{\beta}{m} (-\omega p \sin \omega t + q \omega \cos \omega t) + \omega_0^2 p \cos \omega t + \omega_0^2 q \sin \omega t = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (5.3.5)$$

ossia:

$$\left(-\omega^2 p + \frac{\beta \omega}{m} q + \omega_0^2 p - \frac{F_0}{m} \right) \cos \omega t + \left(-\omega^2 q - \frac{\beta \omega}{m} p + \omega_0^2 q \right) \sin \omega t = 0 \quad (5.3.6)$$

Poiché le funzioni $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ non si annullano mai contemporaneamente, la (5.3.6) é soddisfatta se e solo se é soddisfatto il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -\omega^2 p + \frac{\beta \omega}{m} q + \omega_0^2 p - \frac{F_0}{m} = 0 \\ -\omega^2 q - \frac{\beta \omega}{m} p + \omega_0^2 q = 0 \end{cases} \quad (5.3.7)$$

Ordinando:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) p + \frac{\beta \omega}{m} q = \frac{F_0}{m} \\ -\frac{\beta \omega}{m} p + (\omega_0^2 - \omega^2) q = 0 \end{cases} \quad (5.3.8)$$

Il determinante dei coefficienti é:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & \frac{\beta \omega}{m} \\ -\frac{\beta \omega}{m} & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\beta^2 \omega^2}{m^2} \quad (5.3.9)$$

Le soluzioni sono:

$$p = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{F_0}{m} & \frac{\beta \omega}{m} \\ 0 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = \frac{\frac{F_0}{m} (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\beta^2 \omega^2}{m^2}} \quad (5.3.10)$$

$$q = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & \frac{F_0}{m} \\ -\frac{\beta \omega}{m} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\frac{F_0}{m} \frac{\beta \omega}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\beta^2 \omega^2}{m^2}} \quad (5.3.11)$$

Ne segue:

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \frac{\sqrt{\frac{F_0^2}{m^2}(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{F_0^2}{m^2} \frac{\beta^2 \omega^2}{m^2}}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\beta^2 \omega^2}{m^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \quad (5.3.12)$$

$$\tan \phi = \frac{q}{p} = \frac{\beta \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

L'integrale generale dell'equazione (5.3.3) é, allora:

$$x(t) = C e^{-\frac{\beta}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t - \gamma\right) + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (5.3.13)$$

Il primo termine del secondo membro rappresenta un'oscillazione smorzata; esso cioè é, rispetto al secondo termine, un fenomeno transitorio determinato dalle condizioni iniziali che definiscono C e γ . Questa parte della soluzione dopo un certo tempo diventa irrilevante e predomina soltanto il secondo termine che rappresenta lo stato stazionario. Questa parte della soluzione rappresenta un'oscillazione persistente con frequenza eguale a quella della forzante esterna.

É interessante studiare le caratteristiche di queste oscillazioni.

L'ampiezza e la fase dipendono fortemente dalla frequenza. La massima ampiezza del moto si ha quando $\omega = \omega_0$ cioè quando la frequenza della forza esterna coincide con la frequenza naturale del sistema oscillante senza attrito. In questo caso il sistema si dice **risonante**. In assenza di forze resistive l'ampiezza alla risonanza diventa infinita. Per mostrare come l'ampiezza dipende dalla frequenza della forza eccitante, ossia per disegnare la cosiddetta **curva di risonanza**, é conveniente scegliere il quadrato dell'ampiezza come ordinata. Si ha, allora:

$$a^2 = \frac{F_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \quad (5.3.14)$$

Risulta:

$$a_{max}^2 = \frac{F_0^2}{\beta^2 \omega^2} \implies F_0^2 = \beta^2 \omega^2 a_{max}^2 \quad (5.3.15)$$

Ne segue:

$$a^2 = \frac{\beta^2 \omega^2 a_{max}^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} = \frac{\beta^2 a_{max}^2}{m^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + \beta^2} \quad (5.3.16)$$

Poiché ω non si discosta molto dalla pulsazione di risonanza ω_0 é utilissimo effettuare la seguente approssimazione:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \simeq 2\omega(\omega_0 - \omega) \quad (5.3.17)$$

avendo posto $\omega_0 + \omega \simeq 2\omega$.

Sostituendo la (5.3.17) nella (5.3.16), si ha:

$$\frac{a^2}{a_{max}^2} = \frac{\beta^2}{4m^2(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}$$

(5.3.18)

Curva di risonanza di un oscillatore forzato

($\beta = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $m = 0.1 \text{ Kg}$) —————

($\beta = 0.25 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $m = 0.1 \text{ Kg}$)

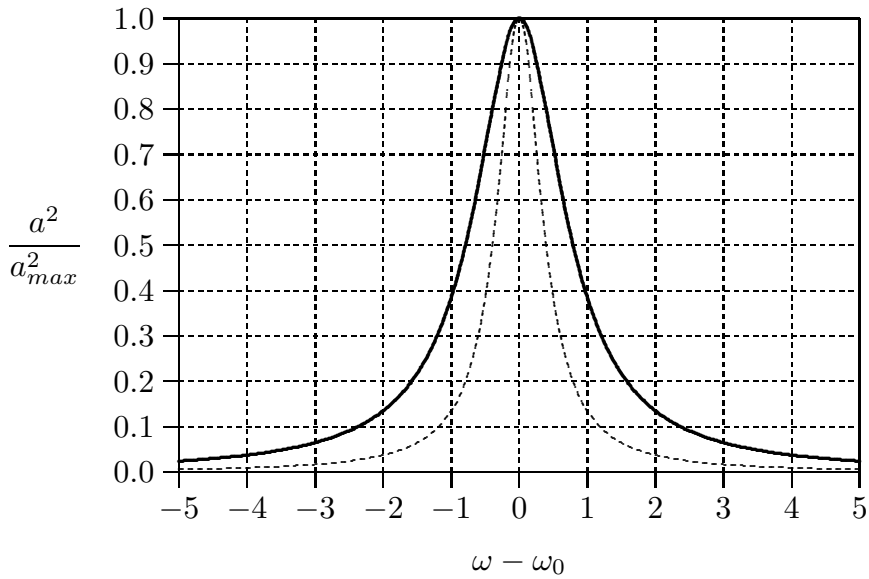


fig.5.3-1

Per determinare la **semilarghezza a metà altezza della curva di risonanza**, imponiamo che:

$$\frac{a^2}{a_{max}^2} = \frac{1}{2} \tag{5.3.19}$$

ossia:

$$\frac{\beta^2}{4m^2(\omega_0 - \omega^*)^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} \implies |(\omega_0 - \omega^*)| = \frac{\beta}{2m} \tag{5.3.20}$$

Per la (5.2.14):

$$\frac{\beta}{2m} = \frac{\delta}{T} = \frac{\omega_0 \delta}{2\pi} \tag{5.3.21}$$

ossia:

$$\frac{|(\omega_0 - \omega^*)|}{\omega_0} = \frac{\delta}{2\pi} \tag{5.3.22}$$

Dalla (5.3.22) segue il seguente teorema: *La semilarghezza a metà altezza della curva di risonanza è uguale al decremento logaritmico diviso per 2π .*

5.4 - Oscillazioni non armoniche: Improvvisa variazione dell'ampiezza

Forze rigorosamente elastiche, che sono, cioè, proporzionali all'ampiezza, non esistono in natura. Le reali forze di legame possono essere rappresentate da serie di potenze dello spostamento. In molti casi, un termine aggiuntivo al primo termine lineare é sufficiente a ben rappresentare l'espressione della forza. Vi sono due principali tipi di possibili leggi di forza. Se la forza é simmetrica cioè di eguale grandezza nei corrispondenti punti simmetrici rispetto alla posizione di equilibrio, soltanto le potenze dispari intervengono nello sviluppo in serie; altrimenti abbiamo una legge di forza asimmetrica. Restringiamo la nostra analisi al caso piú comune di oscillazioni simmetriche e aggiungiamo un termine ϵx^3 alla forza elastica $-kx$. Assumiamo, inoltre, che ϵ é positivo che significa che la forza di legame ...

L'equazione differenziale del moto é:

$$m\ddot{x} + kx - \epsilon x^3 = F_0 \cos \omega t \quad (5.4.1)$$

Come prima approssimazione cerchiamo la soluzione:

$$x_1 = a \cos \omega t \quad (5.4.2)$$

L'ampiezza a é ancora da determinare.

Sostituendo la (5.4.2) nella (5.4.1) si ha:

$$-m a \omega^2 \cos \omega t + k a \cos \omega t - \epsilon a^3 \cos^3 \omega t = F_0 \cos \omega t \quad (5.4.3)$$

Poniamo:

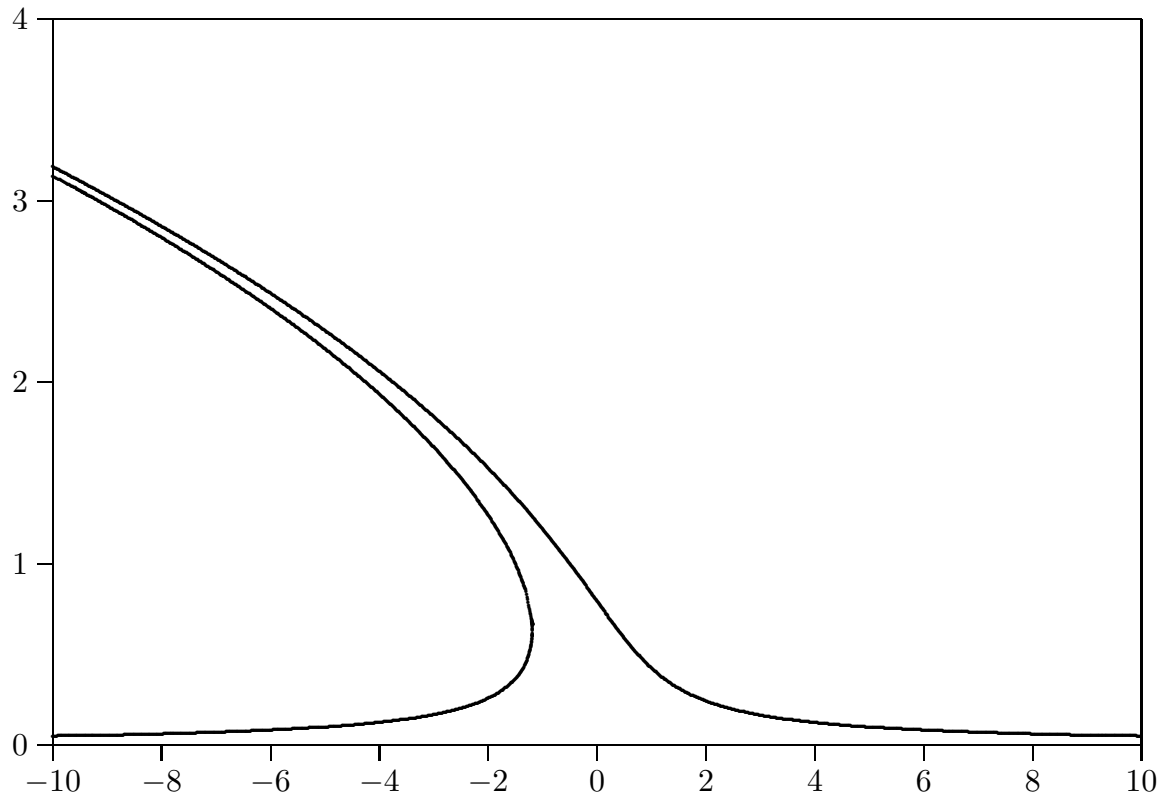
$$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \cos \omega t \quad (5.4.4)$$

Quindi la (5.4.3) diventa:

$$\left(-m a \omega^2 + k a - \frac{3}{4} \epsilon a^3 \right) \cos \omega t - \frac{\epsilon}{4} a^3 \cos 3\omega t = F_0 \cos \omega t \quad (5.4.5)$$

Dividendo per m e ponendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la (5.4.5) é soddisfatta se e solo se:

$$\frac{3}{4} \frac{\epsilon}{m} a^3 + (\omega^2 - \omega_0^2) a + \frac{F_0}{m} = 0 \quad (5.4.6)$$



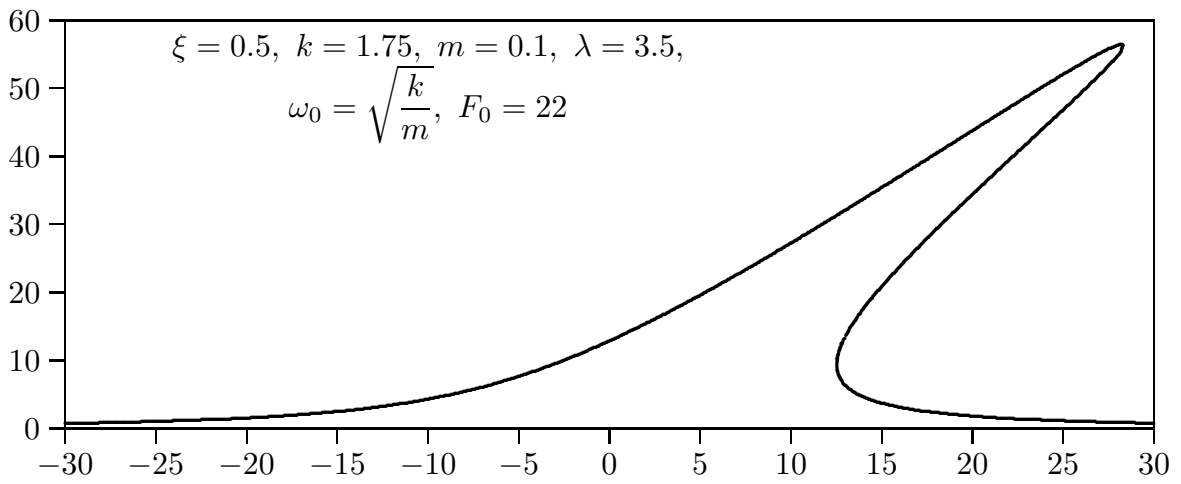
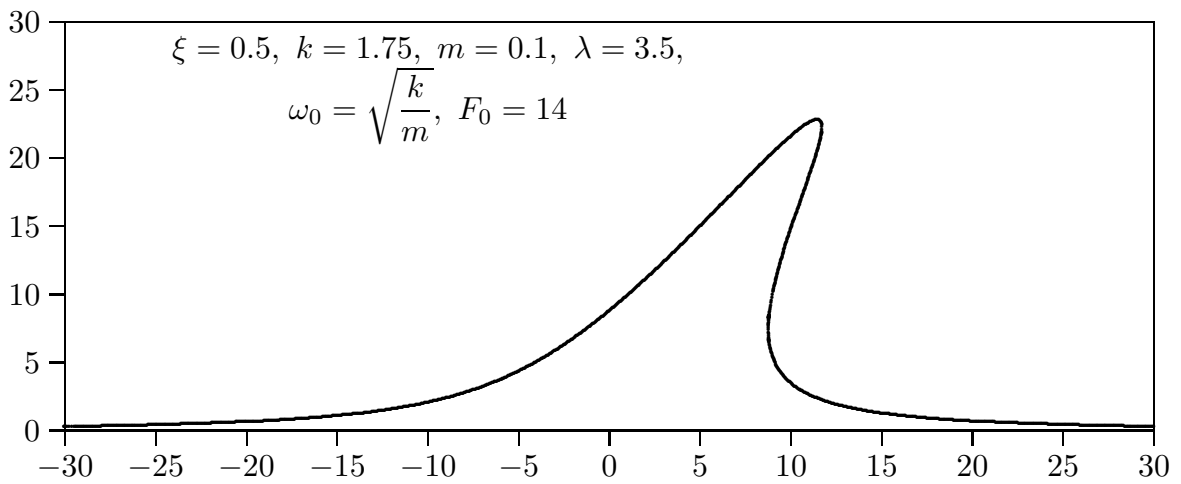
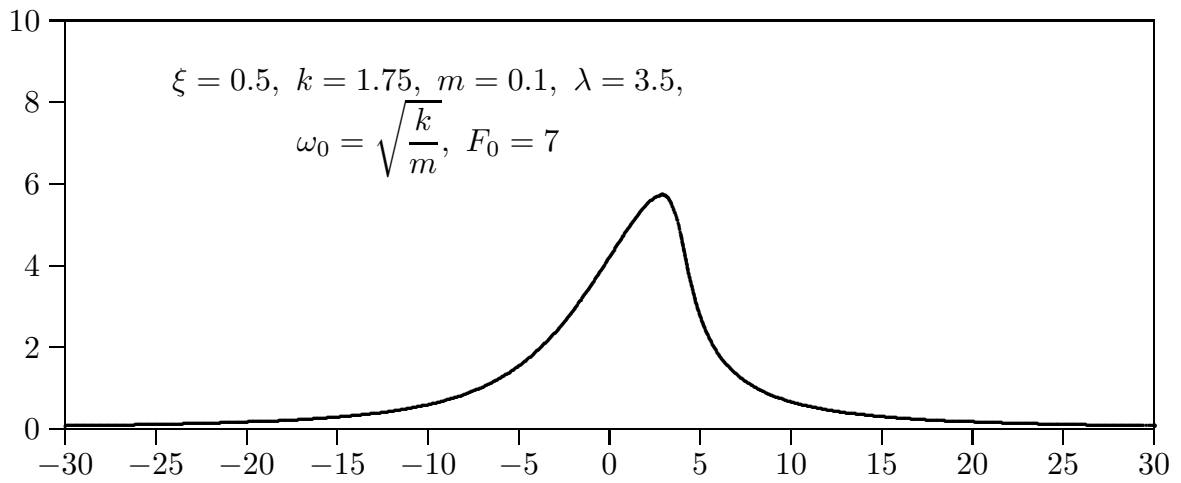


fig.5.4-1

Programma in ambiente MATLAB per tracciare le curve

```

delete(get(0,'children'));
clf;
clear all;
S=solve('csi^2*x^3-2*csi* delta*x^2+(delta^2+lambda^2)*x-...
F0^2/4/ms^2/omega0^2=0');
csi=0.5
k=1.75;
ms=0.1;
lambda=3.5;
omega0=sqrt(k./ms);
F0=22;
numero_punti=1000
delta_min=-30
delta_max=+30
delta_lin=linspace(delta_min,delta_max,numero_punti);
for m=1:numero_punti
delta=delta_lin(m);
SS=eval(S);
[srt,srt_i]=sort(real(SS));
SS=SS(srt_i);
y1(m)=SS(1);
y2(m)=SS(2);
y3(m)=SS(3);
end
epsilon=1e-12;
reale1=(abs(imag(y1))<epsilon);
reale2=(abs(imag(y2))<epsilon);
reale3=(abs(imag(y3))<epsilon);
plot(delta_lin(reale1),abs(real(y1(reale1))),'+',...
delta_lin(reale2),abs(real(y2(reale2))), 'x',...
delta_lin(reale3),abs(real(y3(reale3))), '*')
xlabel('valori di delta')
ylabel('radici reali di x^3+a_1x+a_0=0')
%%%%Istruzioni per trasferire i dati in formato TEX%%%%
B=[delta_lin(reale2);abs(real(y2(reale2)))]';
fid=fopen('pippo.tex','w');
fprintf(fid,'csi=0.5;k=1.75;ms=0.1;lambda=3.5;omega0=sqrt(k./ms);F0=14;\n');
fprintf(fid,'%5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f \n',B);
fclose(fid);

```

5.5 - Meccanica di particelle vincolate: il Pendolo semplice

Il corpo che oscilla é un punto materiale di massa m connesso ad un punto fisso mediante un'asta rigida priva di massa la cui lunghezza l prende il nome di lunghezza del pendolo. La traiettoria é pertanto un arco di circonferenza. Poiché possiamo prescindere dall'attrito nel punto di sospensione e dalla resistenza dell'aria, resta, come unica forza agente, il peso, la cui componente attiva nel verso delle ϕ crescenti é

$$F_a = -mg \sin \phi \quad (5.5.1)$$

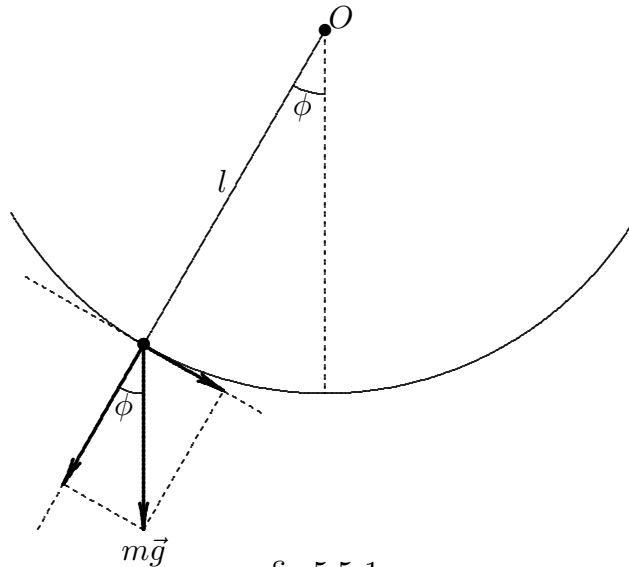


fig.5.5-1

Indicando con s la coordinata sulla traiettoria prestabilita, l'equazione del moto é:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \phi \quad (5.5.2)$$

Tenendo conto che $s = l\phi$, si ha:

$$ml \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -mg \sin \phi \quad (5.5.3)$$

che si puó scrivere:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad (5.5.4)$$

La presenza del termine $\sin \phi$ ci conduce al risultato che, in generale, le oscillazioni del pendolo sono **non armoniche**. L'integrazione rigorosa dell'equazione (5.5.4) si puó effettuare e conduce a funzioni ellittiche.

Possiamo, tuttavia, ottenere importanti informazioni sulla fisica del pendolo sviluppando in serie il termine $\sin \phi$. Poniamo, cioé:

$$\sin \phi = \phi - \frac{1}{6} \phi^3 + \dots \quad (5.5.5)$$

La prima approssimazione si ottiene ponendo il primo termine dello sviluppo in serie nell'equazione (5.5.4) ottenendo l'equazione differenziale che caratterizza le oscillazioni armoniche.

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\phi = 0 \tag{5.5.6}$$

È questa l'equazione delle **oscillazioni armoniche** già esaminata nel paragrafo 5.1. Precisamente essa coincide con la (5.1.3) a parte il nome della variabile dipendente.

Posto $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, la soluzione è:

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{5.5.7}$$

Quindi, in approssimazione di piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio, le oscillazioni della particella di massa m sono armoniche di periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{5.5.8}$$

L'equazione (5.5.8) esprime il fatto fisico importante, già evidenziato sperimentalmente da Galileo Galilei, che il periodo di oscillazione di un pendolo semplice (in approssimazione di piccole oscillazioni) non dipende dalla massa della particella. Entro i limiti di validità della (5.5.6), il periodo delle oscillazioni è indipendente anche dall'ampiezza delle oscillazioni. **Le piccole oscillazioni del pendolo sono isocrone.**

Assumendo come condizioni iniziali, $\phi = 0$ per $t = 0$ e $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ per $t = \frac{\pi}{4}$, la (5.5.7) diventa:

$$\phi(t) = \phi_0 \cos \omega_0 t$$

(5.5.9)

Secondo la tradizione storica (forse apocrifia), Galileo Galilei (1564 - 1642), nel duomo di Pisa, osservò un lampionaio¹⁾ che spingeva uno degli ondeggianti lampadari a pendolo. Il suo primo biografo Viviani²⁾ suggerisce che Galileo poi cronometrò le oscillazioni con il suo polso e concluse che, anche se l'ampiezza delle oscillazioni diminuiva, il tempo di ogni oscillazione era costante. Questa è l'origine dell'apparente scoperta da parte di Galileo dell'isocronismo approssimativo del moto del pendolo. Secondo Viviani queste osservazioni furono fatte

¹⁾ Il lampionaio aveva il compito di accendere e spegnere, ad orari prestabiliti, i lampioni ad olio o a gas delle vie e delle pubbliche piazze.

²⁾ Vincenzo Viviani: Firenze, 5 aprile 1622 - Firenze, 22 settembre 1703 è stato il più giovane discepolo di Galilei.

nel 1583, ma lo studioso di Galileo Stillman Drake ³⁾ ci dice che le guide della cattedrale indirizzano i visitatori a una certa lampada che descrivono come "lampada di Galileo", una lampada che non fu effettivamente installata fino alla fine del 1587. Tuttavia, Galileo fece osservazioni sistematiche del pendolo nel 1602. Queste osservazioni hanno confermato solo approssimativamente la sua prima conclusione sull'isocronismo delle oscillazioni di diversa ampiezza. Erlichson (1999) ha sostenuto che, nonostante l'evidenza empirica non banale del contrario, Galileo si è aggrappato alla sua conclusione precedente, in parte perchè credeva che l'universo fosse stato ordinato in modo che il movimento fosse semplice e che non vi fosse "nessuna ragione" affinchè il percorso più lungo richieda più tempo rispetto al percorso più breve.⁴⁾

³⁾ Stillman Drake: *Galileo at Work: His Scientific Biography*, (University of Chicago Press, 1978).

⁴⁾ Gregory L. Baker, James A. Blackburn: *The pendulum, a case study in physics* - Oxford University Press, 2005, pag.8.

5.6 - Il Pendolo semplice non approssimato (asincrono)

Abbandoniamo l'ipotesi di piccole oscillazioni e tentiamo di risolvere l'equazione non lineare (5.6.4) che riscriviamo:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad (5.6.1)$$

che si può scrivere:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad (5.6.2)$$

Moltiplichiamo ciascun termine della (5.6.2) per $\left(\frac{d\phi}{dt} \right)$:

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) + \frac{g}{l} \sin \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right) = 0 \quad (5.7.3)$$

che si può scrivere:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{g}{l} \frac{d}{dt} \cos \phi = 0 \quad (5.6.4)$$

ossia:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - 2 \frac{g}{l} \cos \phi \right] = 0 \quad (5.6.5)$$

Posto, per la (5.5.7), $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, la (5.6.5) si scrive:

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = 2\omega_0^2 \cos \phi + C \quad (5.6.6)$$

essendo C una costante arbitraria.

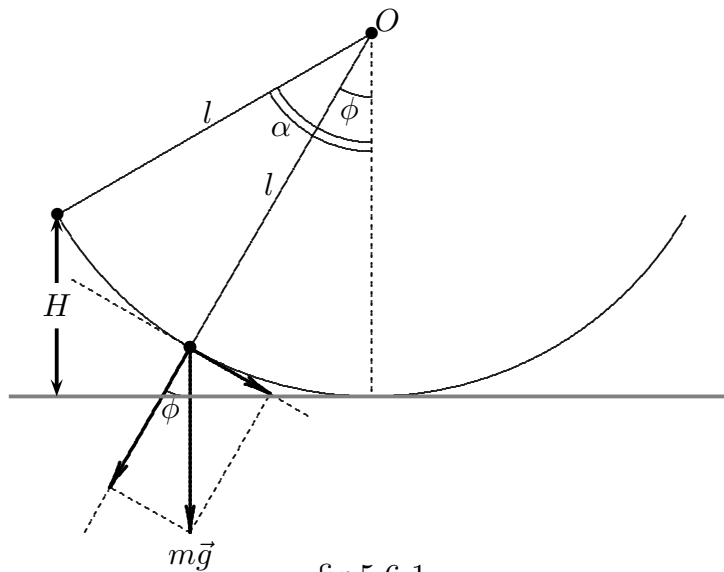


fig.5.6-1

La costante C é determinata dalla condizione $\frac{d\phi}{dt} = 0$ per $\phi = \alpha$ che esprime la condizioni di massima elongazione in cui la velocità della particella é nulla. Risulta, quindi:

$$C = -2\omega_0^2 \cos \alpha \quad (5.6.7)$$

Sostituendo la (5.6.7) nella (5.6.6) si ha:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2 (\cos \phi - \cos \alpha) \quad (5.6.8)$$

Ricordando che:

$$\cos \phi = \cos 2\frac{\phi}{2} = \cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (5.6.9)$$

$$\cos \alpha = \cos 2\frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (5.6.10)$$

si ha:

$$\cos \phi - \cos \alpha = 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) \quad (5.6.11)$$

La (5.6.8) diventa:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 4\omega_0^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) \quad (5.6.12)$$

ossia:

$$\frac{d\phi}{dt} = 2\omega_0 \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad (5.6.13)$$

e, ancora:

$$\frac{d\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}} = \omega_0 dt \quad (5.6.14)$$

Integrando:

$$\int_0^{\phi} \frac{d\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}} = \omega_0 t \quad (5.6.15)$$

Poniamo:

$$\sin \frac{\phi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin v \quad (5.6.16)$$

Differenziando:

$$\cos \frac{\phi}{2} d\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sin \frac{\alpha}{2} \cos v dv \quad (5.6.17)$$

da cui:

$$d\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos v}{\cos \frac{\phi}{2}} dv \quad (5.6.18)$$

e:

$$\cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 v} \quad (5.6.19)$$

e, dalla (5.6.16):

$$v = \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) \quad (5.6.20)$$

Risulta, quindi

$$\int_0^v \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos v dv}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 v} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 v}} = \omega_0 t \quad (5.6.21)$$

ossia:

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 v}} = \omega_0 t \quad (5.6.22)$$

Ci siamo così ricondotti ad un **integrale ellittico di prima specie**.

Per calcolare il periodo τ , poniamo nella (5.6.22) $t = \frac{\tau}{4}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}$, ossia per la (5.6.19) $v = \frac{\pi}{2}$.

Si ottiene così il cosiddetto **integrale completo di prima specie** che si suole indicare con K :

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}} \quad (5.6.23)$$

essendo $k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Si ottiene allora dalla (5.6.22)

$$\tau = 4K \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2}{\pi} K 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2}{\pi} K \mathcal{T} \quad (5.6.24)$$

essendo \mathcal{T} il periodo del pendolo per piccole oscillazioni

Sviluppando in serie di potenze la (5.6.23) ed integrando termine a termine si ricava in generale:¹⁾

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 + \dots \right) \quad (5.6.25)$$

Ne risulta l'espressione generale di τ :

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right) \quad (5.6.26)$$

la quale determina quantitativamente le deviazioni dall'isocronismo per ampiezze α non soddisfacenti alla $\alpha \ll 1$. Nel grafico di figura (5.6.2), riportiamo il rapporto $\frac{\tau}{\mathcal{T}}$ **dato dalla formula esatta (linea rossa)** data dalla (5.6.24) e **dalla formula approssimata (linea nera)** data dall'equazione (5.6.26).

Gli orologi astronomici hanno dei pendoli semplici con $\alpha \leq 1^{\circ}30'$. Per essi il primo termine correttivo fra parentesi della (5.6.26) vale circa $1/20000$.

Rapporto x fra il periodo asincrono τ e sincrono \mathcal{T}

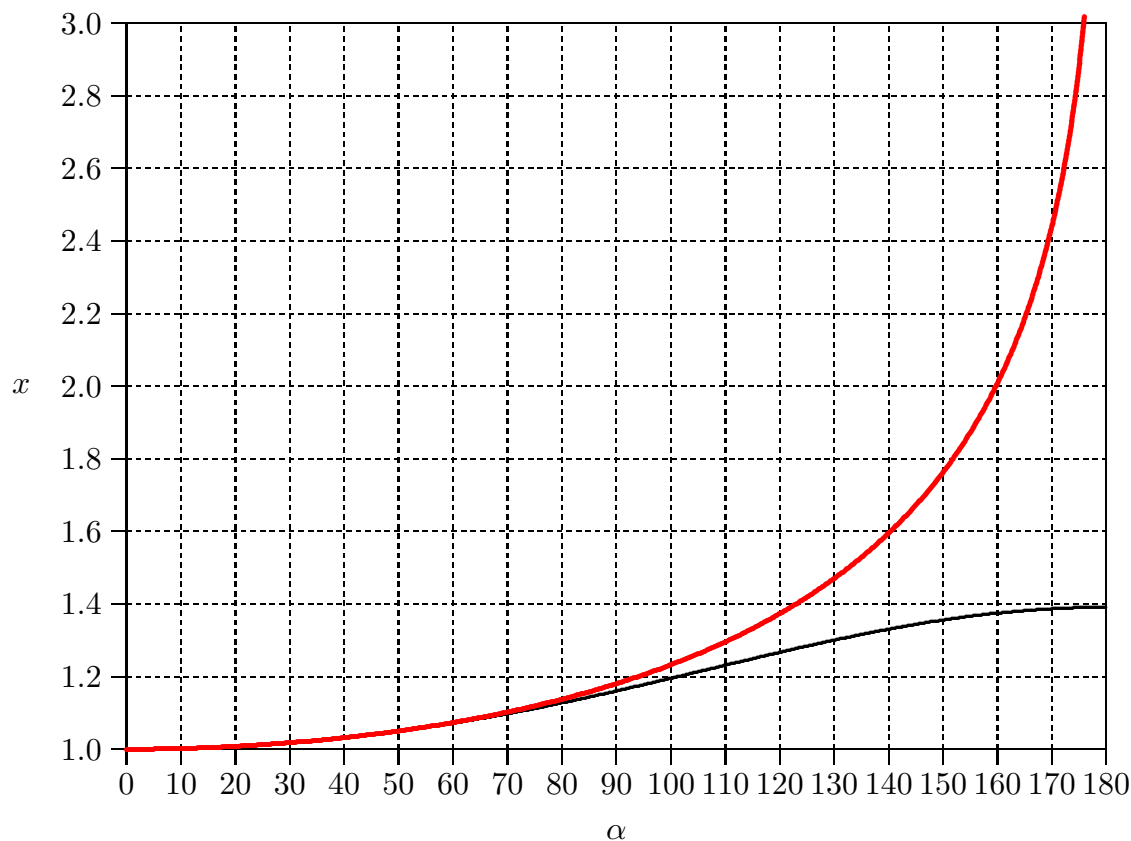


fig.5.6-2

¹⁾ Dwight Herbert Bristol: Tables of Integrals and Other Mathematical Data - Macmillan Publishing Co., Inc., 1961, pag.180, n.773.1.

**Programma in ambiente Matlab per graficare il rapporto
fra periodo asincrono e periodo sincrono: periodopendolo.m**

```

001) - delete(get(0,'children'));
002) - clf;
003) - clear all;
004) - alpha=0:1:180;
005) - kquadro=(sind(alpha./2)).^2;
006) - m=kquadro;
007) - [K,E]=ellipke(m);%Integrale ellittico di prima specie (K) e di seconda specie
(E)
008) - y=2.*K./pi;%formula esatta
009) - plot(alpha,y,'red')
010) - hold on
011) - x=1+(1./4).*kquadro+(9./64).*kquadro.^2+(9.*25./4./16./36).*kquadro.^3;...
    %formula approssimata
012) - plot(alpha,x)
    %%%%Istruzioni per trasferire i dati in formato TEX%%%%
013) - B=[alpha;x];
014) - fid=fopen('pippo.tex','w');
015) - fprintf(fid,'\n');
016) - fprintf(fid,'%5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f \n',B);
017) - fclose(fid);

```

Quando l'ampiezza dell'oscillazione è prossima allo zero il periodo è esattamente eguale al periodo determinato dalla versione linearizzata del pendolo. Man mano che l'ampiezza si avvicina a π radianti, la perlina si trova in posizione verticale ed il fattore $\alpha/2$ si avvicina a $\pi/2$. Ora la serie diverge ed il periodo diventa infinitamente grande come ci si aspettava. Fino ad una ampiezza di circa (70÷80) gradi la formula approssimata coincide quasi con la formula esatta.²⁾

²⁾ Gregory L. Baker, James A. Blackburn: The pendulum, a case study in physics - Oxford University Press, 2005, pag.47.

5.7 - Cicloidi e tautocroni¹⁾

Il problema dell'aumento del periodo all'aumentare dell'ampiezza dell'oscillazione potrebbe essere eliminato se ci fosse qualche mezzo per accorciare gradualmente e in modo appropriato la lunghezza effettiva del pendolo per oscillazioni più grandi. **Ciò può essere ottenuto se il peso è costretto a seguire una speciale forma di curva (non proprio un arco circolare) chiamata tautocrona.** Una perlina che scorre, senza attrito, lungo un filo piegato in questa forma raggiungerà la posizione più bassa in un tempo indipendente dal punto di lancio sul filo (tautocrono: "stesso tempo"). **In un campo gravitazionale, la tautocrona è una cicloide.**

La relazione tra tautocrona e cicloide può essere dimostrata in due modi. Si può iniziare con una cicloide e poi dimostrare che è davvero una tautocrona. Alternativamente, partendo dalla proprietà di isocronicità richiesta, si può ricavare l'equazione della curva che possiede tale proprietà. Ciascuno di questi due trattamenti è ora presentato.

La cicloide è una tautocrona

In forma parametrica, le equazioni che definiscono una cicloide sono:

$$x = r(\phi + \sin \phi); \quad y = r(1 - \cos \phi) \quad (5.7.1)$$

Cicloide ($r = 1; -\pi \leq \phi \leq +\pi$)

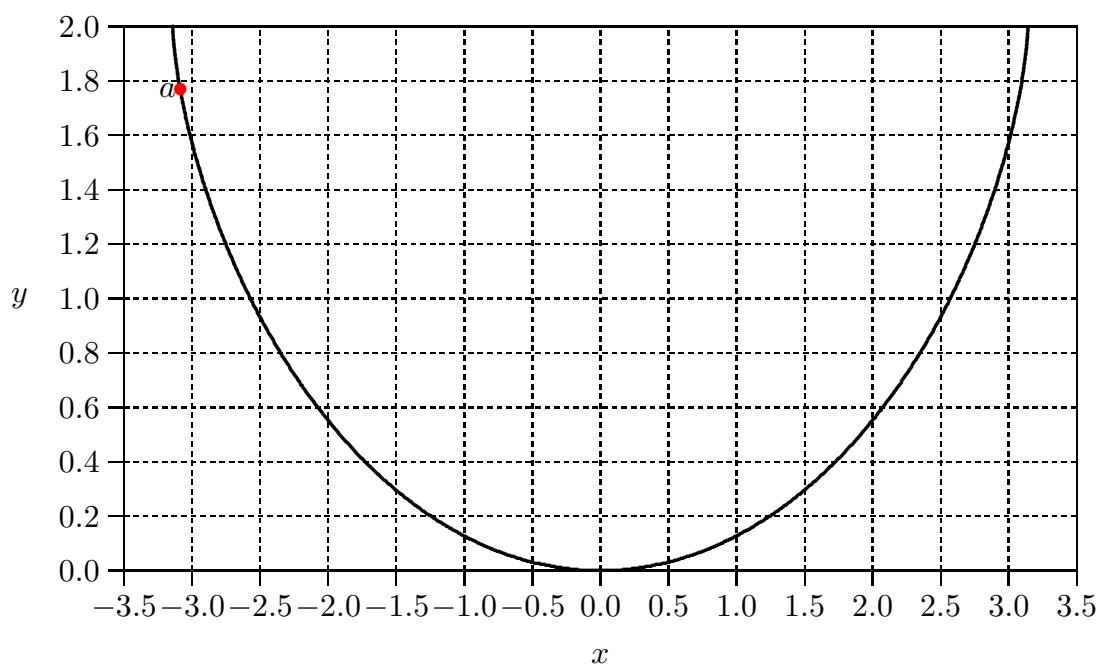


fig.5.7-1

¹⁾ Gregory L. Baker, James A. Blackburn: The pendulum, a case study in physics - Oxford University Press, 2005, pag.239.

Programma in ambiente Matlab per graficare la cicloide: Cicloidependolo

```

001) - delete(get(0,'children'));
002) - clf;
003) - clear all;
004) - phi=-pi:0.1:+pi;
005) - r=1;
006) - x=r.*(phi+sin(phi));
007) - y=r.*(1-cos(phi));
008) - plot(x,y)
%%%%%Istruzioni per trasferire i dati in formato TEX%%%%%
009) - B=[x;y];
010) - fid=fopen('pippo.tex','w');
011) - fprintf(fid,'r=1.\n');
012) - fprintf(fid,'%5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f \n',B);
013) - fclose(fid);
    
```

La costante r é il raggio della circonferenza generatrice. Per valori di ϕ compresi fra $-\pi$ e $+\pi$, può essere graficato un ciclo completo della curva cicloidale. Come mostrato in figura (5.7-1) vi è un minimo a $(0,0)$ e un massimo a $(-\pi r, 2r)$ e $(+\pi r, 2r)$.

Supponiamo che una perlina è posizionata, senza attrito, su un filo di questa forma, e lasciata cadere. Qual'è il tempo richiesto per la perlina di scivolare fino in fondo?

Pr rispondere a questa domanda, consideriamo il teorema di conservazione della energia totale meccanica (vedi Capitolo 3, §3-4):

$$mgy_a = mgy + \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.7.2}$$

essendo il punto di partenza di coordinate (x_a, y_a) e v la velocità nel generico punto (x, y) . Ne segue $v = \sqrt{2g(y_a - y)}$. Poichè la velocità v è lungo il filo, possiamo scrivere:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{5.7.3}$$

essendo ds l'elemento infinitesimo della curva. La (5.7.3) diventa:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y_a - y)} \tag{5.7.4}$$

ossia:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y_a - y)}} \tag{5.7.5}$$

Ma $ds^2 = dx^2 + dy^2$, quindi:

$$dt = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2g(y_a - y)}} \tag{5.7.6}$$

Dalle equazioni della cicloide (5.7.1) si ha:

$$dx = r(1 + \cos \phi)d\phi \quad e \quad dy = r \sin \phi d\phi \quad (5.7.7)$$

quindi:

$$dx^2 + dy^2 = [r^2(1 + \cos^2 \phi + 2 \cos \phi) + r^2 \sin^2 \phi]d\phi^2 = r^2(2 + 2 \cos \phi)d\phi^2 \quad (5.7.8)$$

Sostituendo le (5.7.8) nell'equazione (5.7.6), otteniamo:

$$dt = \sqrt{\frac{r^2(2 + 2 \cos \phi)}{2g[r(1 - \cos \phi_a) - r(1 - \cos \phi)]}}d\phi \quad (5.7.9)$$

Il tempo t per andare da (x_a, y_a) all'estremità in basso è allora, in termine della variabile parametrica ϕ :

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\phi_a}^0 \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{\cos \phi - \cos \phi_a}} d\phi. \quad (5.7.10)$$

Ricordando che:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \text{ da cui : } \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (5.7.11)$$

risulta:

$$\sin^2(\alpha/2) = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad e \quad \cos^2(\alpha/2) = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (5.7.12)$$

la (5.7.10) si può scrivere:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\phi_a}^0 \sqrt{\frac{\cos^2(\phi/2)}{\sin^2(\phi_a/2) - \sin^2(\phi/2)}} d\phi = \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\phi_a}^0 \sqrt{\frac{\cos^2(\phi/2)}{\sin^2(\phi_a/2) \left(1 - \frac{\sin^2(\phi/2)}{\sin^2(\phi_a/2)}\right)}} d\phi = \\ &= k \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\phi_a}^0 \frac{\pm \cos(\phi/2)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi/2)}} d\phi. \end{aligned} \quad (5.7.13)$$

essendo:

$$k^2 = \frac{1}{\sin^2(\phi_a/2)} \quad (5.7.14)$$

L'ultimo integrale dell'equazione (5.7.13) é dato da:²⁾

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{k} \arcsin(k \sin x) + c \quad (5.7.15)$$

²⁾ Dwight Herbert Bristol: Tables of Integrals and Other Mathematical Data - Macmillan Publishing Co., Inc., 1961, pag.115, n.470.2.

Posto, allora, $\phi/2 = x$, ossia $d\phi = 2dx$, possiamo scrivere:

$$\int \frac{\cos(\phi/2)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi/2)}} d\phi = 2 \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} dx = \frac{2}{k} \arcsin(k \sin x) \quad (5.7.16)$$

Ossia

$$\begin{aligned} \int_{\phi_a}^0 \frac{\cos(\phi/2)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi/2)}} d\phi &= \frac{2}{k} \left[\arcsin \left(k \sin \frac{\phi}{2} \right) \right]_{\phi_a}^0 = \\ &= \arcsin [k \sin(0) - k \sin(\phi_a/2)] = \arcsin(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.7.17)$$

dove si è tenuto conto che $k = \pm 1/\sin(\phi_a/2)$. Il risultato deve necessariamente essere positivo.

Quindi:

$$t = k \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{2\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \quad (5.7.18)$$

La cosa sorprendente di questo risultato è che non dipende dal punto di rilascio; ciò è avvenuto perchè le specificità del punto di partenza sono state incapsulate nel fattore k , e questo si è annullato nell'espressione finale. In altre parole, non importa dove la perlina viene lasciata andare, essa raggiungerà il fondo esattamente nello stesso tempo. Così è stato dimostrato che una cicloide è una tautocrona.

La curva tautocrona (o semplicemente tautocrona) è una cicloide

In via preliminare, si consideri l'equazione più semplice di un oscillatore armonico unidimensionale:

$$x = A \sin \omega t \quad (5.7.19)$$

Notiamo subito che la frequenza è costante, ossia il periodo $T = 2\pi/\omega$ di un oscillatore armonico è indipendente dall'ampiezza dell'oscillazione A .

La velocità e l'accelerazione sono $\dot{x} = A\omega \cos \omega t$ e $\ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t$. L'ultima espressione è equivalente a $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Se l'oggetto oscillante è una massa m , allora $F = m\ddot{x}$ e così la forza di richiamo è esattamente proporzionale allo spostamento, con una costante di proporzionalità $k = m\omega^2$.

Quindi si può concludere che una condizione necessaria e sufficiente perchè il periodo di oscillazione sia indipendente dall'ampiezza di quelle oscillazioni è che vi sia una forza di richiamo che è funzione lineare dello spostamento dalla posizione di equilibrio.

Consideriamo una perlina, senza attrito, su un filo curvo. Come conseguenza della condizione necessaria e sufficiente appena enunciata, il filo sarà una tautocrona purchè la sua forma sia tale che la perlina subisca una forza di richiamo lungo il filo che è proporzionale alla distanza, misurata lungo il filo, della perlina dalla posizione di equilibrio (più bassa). Consideriamo la situazione illustrata in figura (5.7-2). La forza di richiamo

lungo il filo è $mg \sin \theta$. Dal criterio necessario e sufficiente perchè il filo sia tautocrono, si richiede che tale forza di ripristino sia proporzionale alla distanza s . Quindi la condizione $ks = mg \sin \theta$ è ora imposta.

Ne segue: $dx = ds \cos \theta = k^{-1}mg \cos^2 \theta d\theta$ e $dy = ds \sin \theta = k^{-1}mg \cos \theta \sin \theta d\theta$, o:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{mg}{k} \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad (5.7.20)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{mg}{k} \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (5.7.21)$$

Integrando ognuna di queste due equazioni da $0 \rightarrow \theta$:

$$x = \frac{mg}{4k} [2\theta + \sin 2\theta] + C_1 \quad (5.7.22)$$

$$y = \frac{mg}{4k} [1 - \cos 2\theta] + C_2, \quad (5.7.23)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti. Se $x = y = 0$ a $\theta = 0$, allora $C_1 = C_2 = 0$.

Posto $\phi = 2\theta$, il risultato finale diventa:

$$x = r(\phi + \sin \phi) \quad (5.7.24)$$

$$y = r(1 - \cos \phi) \quad (5.7.25)$$

essendo $r = mg/4k$.

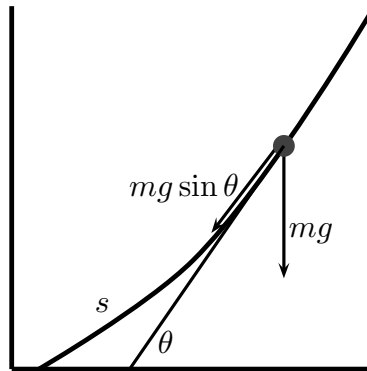


fig.5.7-2

Le equazioni (5.7.24) e (5.7.25) sono giusto le espressioni che definiscono una cicloide, come sono state date precedentemente nelle equazioni (5.7.1). Così è stato provato che la cicloide può essere derivata dal requisito dell'isocronismo.

Tornando alla questione delle oscillazioni sul filo, si noti che l'equazione (5.7.18) rappresenta solo un quarto di periodo. In un ciclo completo, la perlina salirà dall'altro lato del ciclo, quindi tornerà indietro e infine tornerà al punto di partenza. Quindi, il periodo di oscillazione della perlina sul filo cicloidale è:

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \quad (5.7.26)$$

La proprietà isocrona del pendolo fu scoperta da Huygens¹⁾ e riportata nel suo *Horologium* come Proposizione XXV parte II.

Su una cicloide con asse verticale e il cui vertice è posto sul fondo, i tempi di discesa, in cui un corpo arriva al punto più basso al vertice essendo partito da un punto qualsiasi della cicloide, sono uguali tra loro; e questi tempi sono legati al tempo di caduta perpendicolare per l'intero asse della cicloide con lo stesso rapporto per cui la circonferenza di un cerchio è rapportata al suo diametro.

Invertendo ora l'argomento, si potrebbe dire che se la massa all'estremità della corda in un pendolo potesse in qualche modo essere obbligata a seguire un percorso cicloidale anzichè circolare, allora il periodo del pendolo diventerebbe indipendente dalla ampiezza delle oscillazioni. Huygens iniziò ad affrontare questo punto e trovò una proprietà interessante e, come successo, utile delle curve cicloidali.

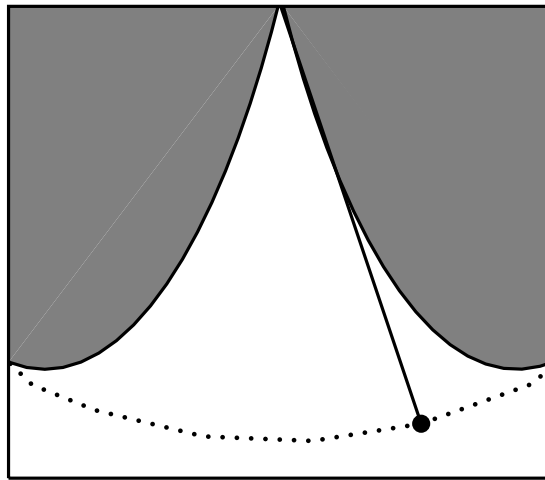


fig.5.7-3

Come indicato nella Proposizione VI della parte terza dell'Horologium, Huygens ha proseguito osservando: *"Poichè è chiaro che un pendolo sospeso e messo in movimento tra due placche curve a forma di semicicloide descrive un arco di cicloide mediante il suo movimento, e quindi oscillazioni, qualunque sia la loro magnitudine, sono completate in tempi uguali"*.

Ecco allora il punto centrale dell'approccio di Huygens al suo orologio a pendolo: il periodo può essere reso indipendente dall'ampiezza dell'oscillazione vincolando la sospensione tra le placche cicloidali, come mostrato in fig.5.7-3.

¹⁾ Christiaan Huygens: L'Aia, Paesi Bassi, 14 aprile 1629 - L'Aia, Paesi Bassi, 8 luglio 1695; Trattato: Horologium oscillatorium: sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae. (Traduzione di Ian Bruce).

5.8 - Pendoli accoppiati

Finora abbiamo considerato le oscillazioni di *un solo punto materiale*. Prendiamo ora in considerazione il moto di *due punti materiali*, accoppiati fra loro e capaci di oscillare. Un esempio particolarmente istruttivo é dato dai pendoli accoppiati; se i due pendoli sono eguali in lunghezza e peso l'accoppiamento si dice **risonante**.

Per semplicitá supporremo che essi oscillino nello stesso piano; l'accoppiamento puó immaginarsi realizzato, mediante una molla. L'accoppiamento si dirá piú forte o piú debole, a seconda che la tensione della molla, per una data posizione dei due pendoli, é piú o meno elevata. Noi consideriamo **accoppiamenti deboli**.

Se i due pendoli non sono esattamente uguali, in lunghezza o in peso, si dice che sono **disaccordati**.

Cominciamo con il descrivere i fenomeni che si osservano nel caso di accoppiamento risonante. Il primo pendolo venga eccitato (ossia spostato dalla posizione di equilibrio); il secondo sia inizialmente in quiete.

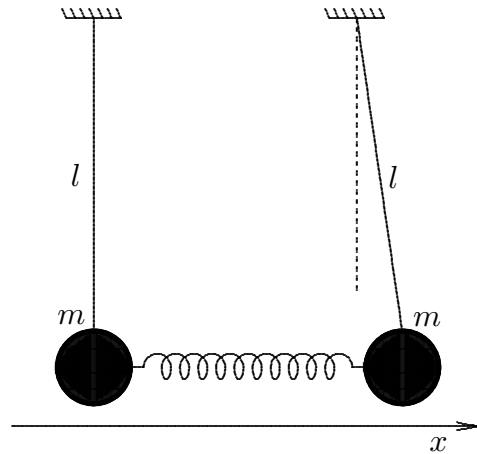


fig.5.8-1

Indicando rispettivamente con x_1 e x_2 gli spostamenti dei due pendoli dalle loro posizioni di equilibrio, le equazioni simultanee del problema si scrivono:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -k(x_1 - x_2) \tag{5.8.1}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \tag{5.8.2}$$

Introducendo le nuove variabili:

$$z_1 = x_1 - x_2, \quad z_2 = x_1 + x_2 \tag{5.8.3}$$

si ottengono dalle (5.8.1), per somma e differenza, le equazioni delle oscillazioni fondamentali:

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = -2kz_1 \quad \text{ovvero:} \quad \ddot{z}_1 + (\omega_0^2 + 2k) z_1 = 0 \tag{5.8.4}$$

$$\ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0 \tag{5.8.5}$$

Le equazioni (5.8.4) e (5.8.5) rappresentano due oscillazioni rispettivamente di frequenze:

$$\text{per } z_1 : \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2k} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2k}{\omega_0^2}} \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{k}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 + \frac{k}{\omega_0} \quad (5.8.6)$$

$$\text{per } z_2 : \quad \omega' = \omega_0 \quad (5.8.7)$$

L'equazione (5.8.6) si é ottenuta considerando l'accoppiamento debole, ossia $\frac{k}{\omega_0} \ll 1$ e conseguentemente poter sviluppare la radice in serie e porre $\sqrt{1 + \frac{2k}{\omega_0^2}} \simeq \left(1 + \frac{k}{\omega_0^2}\right)$.

Gli integrali generali delle (5.8.4) e (5.8.5) sono dati da:

$$z_1 = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \quad (5.8.8)$$

$$z_2 = a_2 \cos \omega' t + b_2 \sin \omega' t \quad (5.8.9)$$

Scegliamo come condizioni iniziali, per $t=0$:

$$x_1 = C, \quad x_2 = \dot{x}_2 = \dot{x}_1 = 0 \quad (5.8.10)$$

cioé:

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0, \quad z_1 = z_2 = C \quad (5.8.11)$$

Dalle (5.8.8) e (5.8.9) segue:

$$z_1(0) = a_1 = C \quad (5.8.12)$$

$$\dot{z}_1(0) = \omega b_1 = 0 \quad \implies \quad b_1 = 0 \quad (5.8.13)$$

$$z_2(0) = a_2 = C \quad (5.8.14)$$

$$\dot{z}_2(0) = \omega' b_2 = 0 \quad \implies \quad b_2 = 0 \quad (5.8.15)$$

Le (5.8.8) e (5.8.9), allora, diventano:

$$z_1 = C \cos \omega t, \quad z_2 = C \cos \omega' t \quad (5.8.16)$$

e, quindi, in definitiva, le equazioni del moto delle due particelle accoppiate da una molla, diventano:

$$x_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = C \cos \frac{\omega' - \omega}{2} t \cos \frac{\omega' + \omega}{2} t \quad (5.8.17)$$

$$x_2 = \frac{z_2 - z_1}{2} = -C \sin \frac{\omega' - \omega}{2} t \sin \frac{\omega' + \omega}{2} t \quad (5.8.18)$$

In forza delle (5.8.6) e (5.8.7) per deboli accoppiamenti si ha $\frac{\omega - \omega'}{2} = \frac{k}{2\omega_0} \ll 1$. I primi fattori dei secondi membri delle (5.8.17) e (5.8.18) sono quindi lentamente variabili

nel tempo; questa circostanza corrisponde alla modulazione in ampiezza delle oscillazioni rappresentati in fig.5.8-2.

Si evince dalla figura che l'energia passa alternativamente dall'uno all'altro pendolo, talché quando uno dei due oscilla con ampiezza massima l'altro si trova in quiete e viceversa.

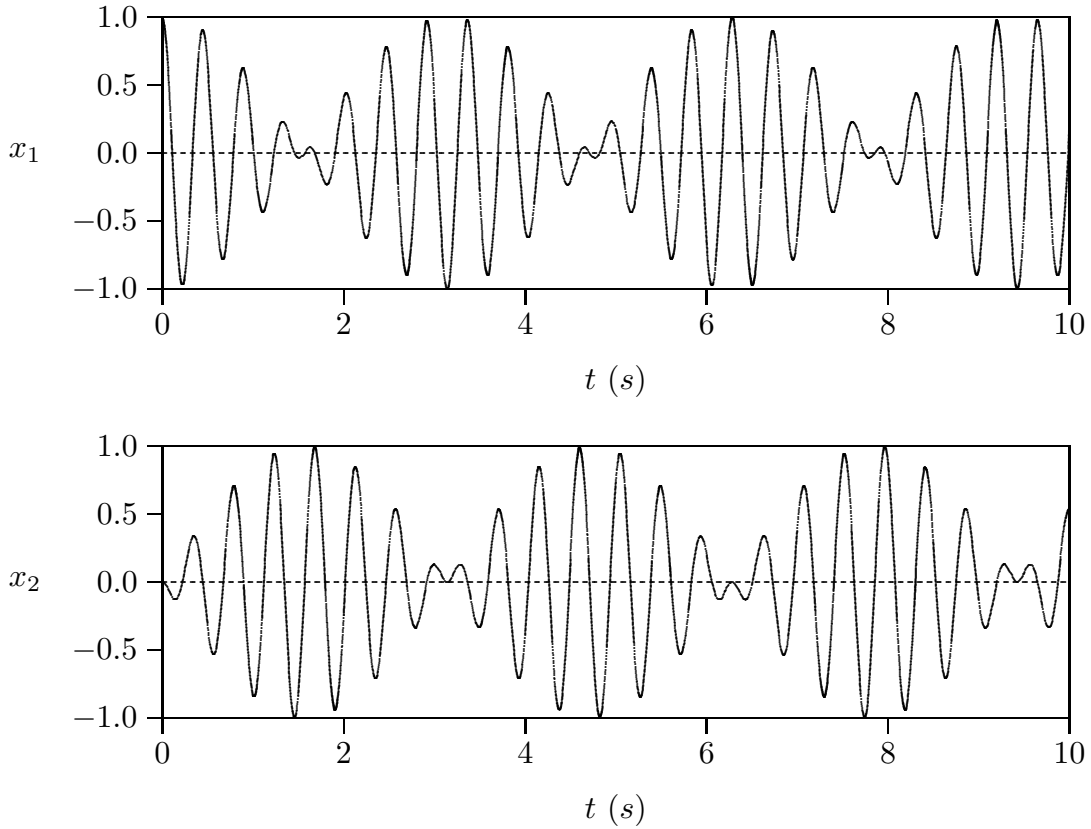


fig.5.8.2

Scegliamo, ora, come condizioni iniziali, per $t=0$:

$$x_1 = C, \quad x_2 = -C, \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 = 0 \quad (5.8.19)$$

cioé:

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0, \quad z_1 = 2C, \quad z_2 = 0 \quad (5.8.20)$$

Dalle (5.8.8) e (5.8.9) segue:

$$z_1(0) = a_1 = 2C \quad (5.8.21)$$

$$\dot{z}_1(0) = \omega b_1 = 0 \implies b_1 = 0 \quad (5.8.22)$$

$$\dot{z}_2(0) = a_2 = 0 \quad (5.8.23)$$

$$\dot{z}_2(0) = \omega' b_2 = 0 \implies b_2 = 0 \quad (5.8.24)$$

Le (5.8.8) e (5.8.9), allora, diventano:

$$z_1 = 2C \cos \omega' t, \quad z_2 = 0 \quad (5.8.25)$$

e, quindi, in definitiva, le equazioni del moto delle due particelle accoppiate da una molla, diventano:

$$x_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = 2C \cos \omega' t \quad (5.8.26)$$

$$x_2 = \frac{z_2 - z_1}{2} = -2C \cos \omega' t \quad (5.8.27)$$

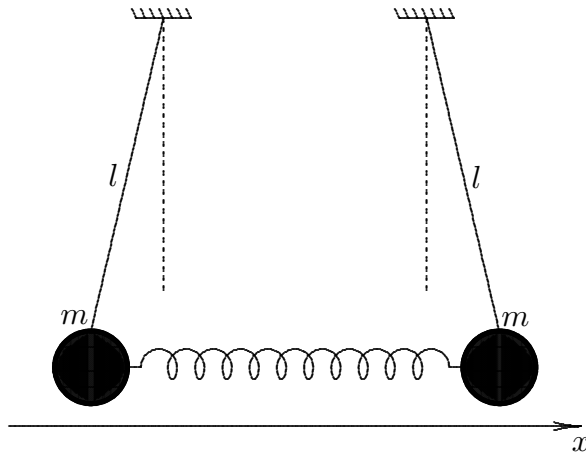


fig.5.8-3

Anche in questo caso i due pendoli oscillano in opposizione di fase. Scegliamo, ora, come condizioni iniziali, per $t=0$:

$$x_1 = C, \quad x_2 = C, \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 = 0 \quad (5.8.28)$$

cioé:

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 2C \quad (5.8.29)$$

Dalle (5.8.8) e (5.8.9) segue:

$$z_1(0) = a_1 = 0 \quad (5.8.30)$$

$$\dot{z}_1(0) = \omega b_1 = 0 \implies b_1 = 0 \quad (5.8.31)$$

$$z_2(0) = a_2 = 2C \quad (5.8.32)$$

$$\dot{z}_2(0) = \omega' b_2 = 0 \implies b_2 = 0 \quad (5.8.33)$$

Le (5.8.8) e (5.8.9), allora, diventano:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 2C \cos \omega' t \quad (5.8.34)$$

e, quindi, in definitiva, le equazioni del moto delle due particelle accoppiate da una molla, diventano:

$$x_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = 2C \cos \omega' t \quad (5.8.35)$$

$$x_2 = \frac{z_2 - z_1}{2} = 2C \cos \omega' t \quad (5.8.36)$$

I due pendoli oscillano in fase.

5.9 - Pendolo fisico o pendolo composto^{1),2)}

Un corpo libero di ruotare sotto il proprio peso attorno ad un asse orizzontale fisso è conosciuto con il nome di **pendolo fisico o pendolo composto**. Esso è mostrato in figura 5.9-1. G è il centro di massa ed O il punto di sospensione, sull'asse di rotazione, che è sul piano verticale della traiettoria circolare del centro di massa.

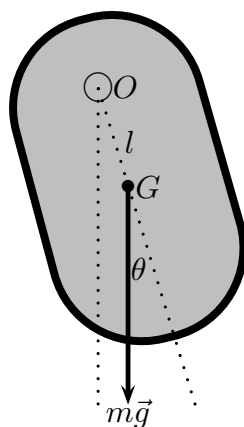


fig.5.9-1

Sia θ l'angolo fra la linea OG e la forza gravitazionale $m\vec{g}$. Calcoliamo il momento della forza di gravità rispetto al punto di sospensione O . Per questo con origine in O costruiamo il seguente sistema di riferimento. Il momento della forza di gravità rispetto al punto O è $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ dove \vec{r} è il vettore posizione del punto di applicazione della forza ossia del centro di massa G . Riportiamo per comodità i due vettori applicati nel punto O della figura (5.9-2), tenendo presente che il modulo di \vec{r} è eguale a l di figura (5.9-1).

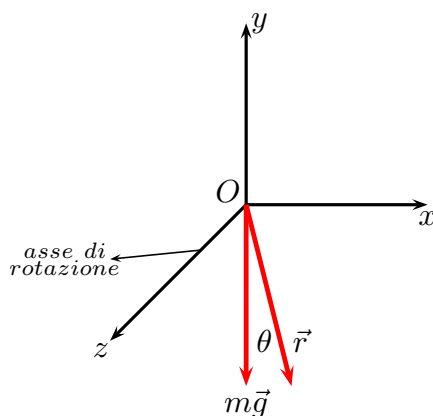


fig.5.9-2

¹⁾ Gregory L. Baker, James A. Blackburn: The pendulum, a case study in physics - Oxford University Press, 2005, pag.20.

²⁾ Grant R. Fowles and George L. Cassiday: Analytical Mechanics seventh Edition, pag.338.

Le componenti di \vec{r} sono $r_x = l \sin \theta$ e $r_y = -l \cos \theta$. Si ha, allora:

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ l \sin \theta & -l \cos \theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = -\hat{z} mgl \sin \theta \quad (5.9.1)$$

Il momento della forza gravitazionale è diretto nel verso negativo dell'asse z. Questo risultato ci consente di affermare la seguente regola empirica: *il verso del momento è quello del pollice della mano destra quando la chiusura del palmo della mano coincide con il verso di rotazione del pendolo*. Il modulo del momento di tale forza rispetto all'asse di rotazione è:

$$M = mgl \sin \theta \quad (5.9.2)$$

essendo l la distanza fra il punto di applicazione della forza G e il punto di sospensione O e $\theta = \omega t$. Per la (3.9.9) la (5.9.1) si scrive:

$$M_{asse} = \mathcal{I}_{asse} \frac{d\omega}{dt} \quad (5.9.3)$$

essendo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la velocità angolare e $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ l'accelerazione angolare.

Eguagliando la (5.9.3) e la (5.9.1), ossia applicando il secondo principio della dinamica per i solidi in rotazione, si ottiene:

$$\mathcal{I}_{asse} \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \sin \theta = 0 \quad (5.9.4)$$

ossia:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{\mathcal{I}_{asse}} \sin \theta = 0 \quad (5.9.5)$$

L'equazione (5.9.5) è identica in forma all'equazione del moto di un pendolo semplice (5.5.6).

Per piccole oscillazioni, come nel caso del pendolo semplice, possiamo sostituire $\sin \theta$ con θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{\mathcal{I}_{asse}} \theta = 0 \quad (5.9.6)$$

Posto $\omega_0^2 = \frac{mgl}{\mathcal{I}_{asse}}$, la soluzione, come nel caso del pendolo semplice, può essere scritta:

$$\theta = \theta_0 \cos(2\pi f_0 t - \delta) \quad (5.9.7)$$

essendo $\omega_0 = 2\pi f_0$, θ_0 l'ampiezza massima e δ è l'angolo di fase. La frequenza di oscillazione è data allora:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{\mathcal{I}_{asse}}} \quad (5.9.8)$$

Il periodo T_0 è, allora, dato da:

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{I}_{asse}}{mgl}} \quad \text{Periodo del Pendolo composto} \quad (5.9.9)$$

Come esempio consideriamo una barra uniforme di lunghezza a ruotante come un pendolo fisico attorno ad un asse passante per un estremo. Dalla formula (3.10.3) si ha che il momento di inerzia è $\mathcal{I}_{asse} = \frac{1}{3}ma^2$. In questo caso $l = \frac{a}{2}$. Pertanto, il periodo di oscillazione della barra è:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}} \quad \text{Periodo di una barra sospesa ad un estremo} \quad (5.9.10)$$

che è lo stesso del periodo di un pendolo semplice di lunghezza $\frac{2}{3}a$.

5.10 - Il pendolo di torsione¹⁾

Le forze di richiamo responsabili del moto armonico in un pendolo convenzionale sono fornite dal campo gravitazionale locale. Un orologio a pendolo, in piedi sulla superficie della Luna, sarà più lento (ossia essendo g minore di quello competente sulla Terra, a parità di lunghezza, il periodo sarà più lungo e, quindi la frequenza più piccola, vedi formula (5.5.8)). Un orologio a pendolo, fluttuante nello spazio interplanetario, resta fermo; la gravità sulla Luna è ridotta; nel libero spazio è zero.

Ma se, con il termine pendolo, intendiamo suggerire la situazione piuttosto generale di un sistema di masse sospeso che esegue un moto periodico, allora in linea di principio si potrebbero creare diversi tipi di pendoli ideando configurazioni per le quali si manifestano altre forme di forza di richiamo. Per esempio, in un **pendolo di torsione** una certa massa è sospesa per mezzo di una fibra sottile che è ancorata saldamente all'altro capo come illustrato in figura 5.10-1.

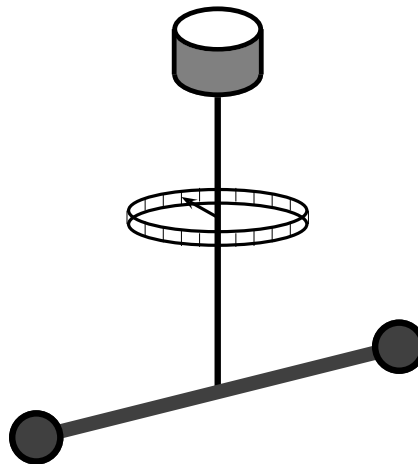


fig.5.10-1

Qualsiasi torsione nella fibra determina una coppia contraria che porta alle oscillazioni avanti e indietro desiderate (in senso orario, antiorario, orario, ecc.).

Notare che il piano in cui questo moto prende posto è ortogonale alla direzione della gravità, che quindi non gioca alcun ruolo oltre a quello di dare il peso del pendolo e porre così la fibra sotto tensione.

Il pendolo a torsione si è dimostrato essere uno strumento eccezionalmente sensibile e indispensabile nella determinazione di una gamma sorprendentemente varia di fenomeni naturali, e ha fornito (e continua a fornire) i mezzi per misurare con precisione alcune delle costanti fisiche fondamentali. **La lunga e illustre storia del pendolo di torsione deve iniziare con un resoconto del suo componente chiave, la fibra.**

5.11 - Elasticità della fibra: Modulo di Young e Rapporto di Poisson

Tutti i solidi, se sottoposti a sollecitazioni quali trazione, compressione, torsione, scorrimento, si deformano.

¹⁾ Gregory L. Baker, James A. Blackburn: The Pendulum a case study in physics - Oxford University Press, 2009, Cap.V, pag.93.

Se le sollecitazioni sono intense le deformazioni possono essere permanenti e si può anche arrivare al cedimento strutturale (rottura) del materiale.

Una deformazione è detta elastica se il corpo torna allo stato originario quando vengono meno le forze che ne hanno causato la deformazione.

La deformazione è elastica se le forze applicate sono inferiori ad un limite che dipende dal materiale, dalla temperatura, dal tipo di deformazione considerata, ecc.

Per le deformazioni elastiche si osserva una relazione di proporzionalità tra sollecitazione e deformazione governata dalla **legge di Hooke** $\Delta L \propto F$.

La **legge di Hooke** è valida per la maggior parte dei minerali, per il vetro, per i materiali ceramici e per i metalli. Per i metalli duttili è vera per carichi modesti.

L'elemento chiave in questo tipo di pendolo è la fibra di sospensione che può essere riguardata come una lunga, sottile, barra solida. Il carico utile del pendolo sospeso farà allungare la fibra (deformazione longitudinale). Se viene applicata una coppia al carico utile, anche la fibra si attorciglia (deformazione angolare). Entrambi questi tipi di deformazione saranno ora discussi.

Il processo di allungamento è illustrato in figura 5.11-1. Con l'applicazione di forze \vec{F} alle estremità, il campione si allunga di una quantità ΔL sulla lunghezza originale L . La deformazione è definita come l'allungamento relativo:

$$\epsilon_l = \frac{\Delta L}{L} \tag{5.11.1}$$

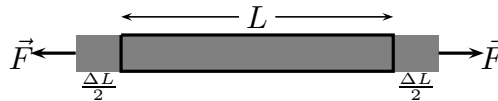


fig.5.11-1

Se l'area della sezione trasversale del campione è A , la forza di tensione applicata è la forza per unità di area F/A .

Materiali perfettamente elastici (un ideale strettamente approssimato da molti solidi reali) obbediscono alla legge di Hooke che dice che quella deformazione è proporzionale alla forza, in altre parole allungamento e forza sono linearmente correlati. Questo anche implica che quando la forza viene rimossa, il campione ritornerà alla sua forma e alla sua dimensione originale. Nei materiali reali esiste un limite (*il limite elastico*) oltre il quale un campione non si riprenderà completamente quando il carico viene rimosso.

La costante di proporzionalità che mette in relazione l'allungamento e la tensione è chiamata **modulo di Young** (o modulo elastico) Y ; esso è definito da:

$$Y = \frac{\text{Tensione applicata}}{\text{Allungamento relativo}} = \frac{F/A}{\Delta L/L} \Rightarrow \left[\frac{\text{Newton}}{\text{m}^2} \right] \text{ Modulo di Young} \tag{5.11.2}$$

Alternativamente:

$$F = \left(Y \frac{A}{L} \right) \Delta L. \tag{5.11.3}$$

Naturalmente, man mano che un filo si allunga, tende anche ad assottigliarsi. Cioè, la sua sezione trasversale diminuisce come suggerito in figura 5.11-2. La deformazione trasversale è definita dall'espressione:

$$\epsilon_t = -\frac{\Delta w}{w}. \quad (5.11.4)$$

essendo w l'area della sezione trasversale e Δw la sua variazione.

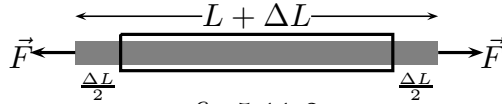


fig.5.11-2

Il rapporto fra restringimento della sezione trasversale e allungamento è un importante parametro conosciuto come **Rapporto di Poisson** σ :

$$\sigma = -\frac{\epsilon_t}{\epsilon_l}.$$

Rapporto di Poisson (5.11.5)

5.12 - Scorrimento - Modulo di rigidità¹⁾

Immaginiamo che il solido da studiare abbia la forma di una lastra parallelepipedica (a facce piane e parallele) e che due facce opposte di area S e distanti s , siano fortemente saldate a due robuste armature M, M' (fig.5.12-1).

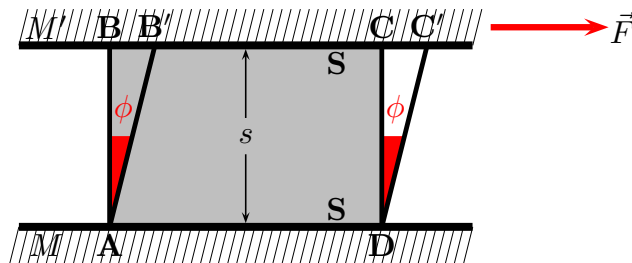


fig.5.12-1

Immaginiamo inoltre che l'armatura M' possa scorrere su opportune guide in direzione BC , in modo che la distanza s fra M e M' non possa variare e che inizialmente la lastra solida $ABCD$ non sia nè compressa nè tirata.

Se l'armatura M' è sottoposta ad una forza \vec{F} in direzione BC , la faccia BC del solido viene trascinata in $B'C'$ e quindi il solido si deforma, senza praticamente variare di volume (almeno finchè non è eccessivamente grande), perchè la faccia AB , che passa in $A'B'$ rimane pressochè piana.

Può accadere che, in conseguenza dello scorrimento BB' , **il solido sviluppi reazioni elastiche**, che facciano equilibrio alla forza \vec{F} , qualunque ne sia la durata; in tal caso,

¹⁾ Nello Carrara: Fisica - R. Accademia Navale, 1940, pag.289.

se \vec{F} non supera certi limiti detti **limiti di elasticità**, lo scorrimento, o meglio l'angolo ϕ di cui ruota la faccia **AB**, risulta proporzionale al rapporto fra la grandezza della forza F e la superficie **S** della faccia **BC**; tale rapporto ha le dimensioni di $Newton/m^2$.

$$\boxed{\phi = \frac{1}{\eta} \frac{F}{S}} \quad \text{Modulo di Coulomb } \eta \quad (5.12.1)$$

η prende il nome di **modulo di rigidità** o **modulo di Coulomb**²⁾ Esso si misura in $Newton/(m^2 \cdot radianti)$ e dipende dalla natura del corpo in esame. Oltrepassati i limiti di elasticità, lo scorrimento diventa parzialmente permanente e, aumentando ancora il valore di \vec{F} , si arriva alla rottura.

La differenza fra il carico di rottura e il limite di elasticità dipende grandemente dalla natura del solido e dal suo precedente trattamento termico e meccanico; i solidi, per i quali essa è piccola, si dicono *fragili*, quelli per i quali essa è grande, si dicono *plastici*.

Può però accadere che lo scorrimento **BB'**, provocato dalla forza \vec{F} , sia funzione anche del tempo; cioè che, al passare del tempo e sotto l'azione di una forza \vec{F} costante, lo scorrimento continui progressivamente ad aumentare. I corpi per i quali si verifica questo fatto, non sono *elastici* e si dicono *viscosi* o *anelastici*. Un bastone di ceralacca, che appare fragile, appoggiato agli estremi, sotto l'azione del proprio peso si incurva continuamente al centro, dimostrando di essere anelastico; anche il piombo, assoggettato alla prova dello scorrimento, si dimostra anelastico.

5.13 - Torsione^{3),4)}

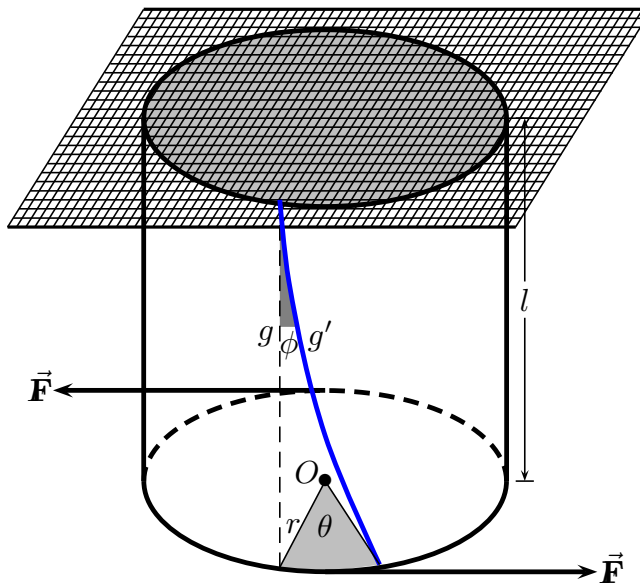


fig.5.13.1

²⁾ Charles-Augustin de Coulomb: Angouleme, Francia, 14 giugno 1736 - Parigi, 23 agosto 1806. Si occupò di statica, elasticità (**bilancia di torsione**). Il suo nome è particolarmente legato alla legge elettrostatica sull'azione reciproca di due cariche elettriche.

³⁾ Nello Carrara: Fisica - R. Accademia Navale, 1940, pag.294.

⁴⁾ Gregory L. Baker, James A. Blackburn: The Pendulum a case study in physics - Oxford University Press, 2009, Cap.V, pag.94.

Un filo cilindrico di raggio R , sia fisso ad un estremo e sollecitato all'altro da una coppia torcente di momento M come in figura 5.13-1. Si ha una deformazione per torsione. **Se il momento non è molto forte, il cilindro torna nella posizione iniziale una volta che la sollecitazione cessa.**

Poichè θ risulta proporzionale ad l , come dimostreremo, una generatrice g qualunque del cilindro, quando questo è sottoposto all'azione della coppia torcente si avvolge in forma di elica cilindrica g' a passo costante.

La torsione di una fibra di sospensione può essere modellata considerando la risposta di un cilindro solido a una coppia applicata, come in figura 5.13-2. Essa coinvolge il solo scorrimento reciproco delle varie sezioni normali del filo, come illustrato nel paragrafo precedente.

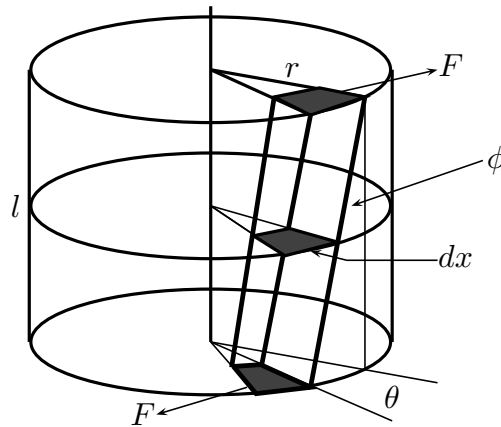


fig.5.13-2

Il settore ombreggiato si trova tra i raggi r e $r + dr$ ed è delimitato da due segmenti di arco di lunghezza dx . Nel grafico i settori sono rappresentati nella posizione più esterna, con $r=R$, dove R è il raggio del cilindro. F è la coppia di forze che agisce sulle macchie ombreggiate alle estremità della colonna ritorta nel diagramma.

Il **modulo di rigidità** η è definito dal rapporto tra sforzo di taglio e angolo di taglio, ossia (vedi formula 5.12.1):

$$\eta = \frac{F/(drdx)}{\phi} \quad (5.13.1)$$

Al limite per θ e ϕ piccoli, risulta $l\phi = r\theta$, poichè ciascuno misura la lunghezza dello stesso segmento di arco. Così:

$$\eta = \frac{Fl}{drdxr\theta} \quad (5.13.2)$$

da cui:

$$F = \frac{\eta r dx dr \theta}{l} \quad (5.13.3)$$

Ricordando che: $1 \text{ dyne/centimetro}^2 [\text{dyne/cm}^2] = 0.1 \text{ newton/metro}^2 [N/m^2]$ costruiamo la seguente tabella:

Tabella 5.13-1

Materiale	$Y \left[\frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} \right]$	$Y \left[\frac{\text{Newton}}{\text{m}^2} \right]$	$\eta \left[\frac{\text{dyne}}{(\text{cm}^2 \cdot \text{rad})} \right]$	$\eta \left[\frac{\text{Newton}}{(\text{m}^2 \cdot \text{rad})} \right]$	σ
Acciaio	$20.8 \cdot 10^{11}$	$20.8 \cdot 10^{10}$	$8.12 \cdot 10^{11}$	$8.12 \cdot 10^{10}$	0.287
Nickel	$20.2 \cdot 10^{11}$	$20.2 \cdot 10^{10}$	$7.70 \cdot 10^{11}$	$7.70 \cdot 10^{10}$	0.309
Platino	$16.8 \cdot 10^{11}$	$16.8 \cdot 10^{10}$	$6.10 \cdot 10^{11}$	$6.10 \cdot 10^{10}$	0.387
Oro	$8.0 \cdot 10^{11}$	$8.0 \cdot 10^{10}$	$2.77 \cdot 10^{11}$	$2.77 \cdot 10^{10}$	0.422
Alluminio	$7.1 \cdot 10^{11}$	$7.1 \cdot 10^{10}$	$2.67 \cdot 10^{11}$	$2.67 \cdot 10^{10}$	0.339
Quarzo	$7.5 \cdot 10^{11}$	$7.5 \cdot 10^{10}$	$3.0 \cdot 10^{11}$	$3.0 \cdot 10^{10}$	

Il momento torcente Fr esercitato sull'elemento di area $drdx$, distante r dall'asse di rotazione, dalla forza F data dalla (5.13.3) risulta:

$$d^2\Gamma = \frac{\eta r^2 dx dr \theta}{l} \quad (5.13.4)$$

Il momento torcente applicato totale Γ è calcolato integrando la (5.13.4) sull'estensione di una faccia finale, rispetto cioè a x da 0 a $2\pi r$ e ad r da 0 a R ; ossia:

$$\Gamma = \frac{\eta\theta}{l} \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi r} dx \quad (5.13.5)$$

Quindi:

$$\Gamma = \frac{\eta\theta}{l} \int_0^R 2\pi r^3 dr \quad (5.13.5)$$

ossia:

$$\Gamma = \left[\eta \frac{\pi R^4}{2l} \right] \theta.$$

Momento della forza elastica di richiamo della fibra (5.13.6)

Il punto importante della discussione è che questa espressione collega l'angolo di rotazione θ al momento applicato Γ per mezzo delle dimensioni del cilindro e del suo modulo di rigidità, una costante del materiale. I termini dentro le parentesi quadre sono una costante di proporzionalità, chiamata rigidità torsionale, che è generalmente definita da $\tau = \Gamma/\theta$. Notare la somiglianza del ruolo giocato da η nella relazione momento-angolo (eq.5.13.6) a quella del modulo di Young Y nella relazione forza-allungamento (eq.5.11.3).

Una conseguenza significativa dell'equazione (5.13.6) è che la quantità di torsione indotta da qualsiasi momento varia con l'inverso della quarta potenza del raggio della fibra. Quindi, la sospensione delle fibre diventa rapidamente più sensibile se esse sono più sottili, un guadagno che è compensato dalla loro crescente fragilità.

La Tabella (5.13-1) dà le costanti elastiche per qualche importante e rappresentativo materiale.

5.14 - Statica e dinamica

Nelle applicazioni più comuni del pendolo di torsione (come sarà discusso in dettaglio in seguito), gli oggetti alle estremità del raggio orizzontale subiscono l'azione delle forze gravitazionali prodotte dall'attrazione verso altri oggetti, o da attrazioni elettrostatiche (o repulsioni) prodotte da cariche sul pendolo e sugli oggetti vicini. Come riprodotto in figura 5.14-1 che rappresenta la vista dall'alto del pendolo di torsione, la coppia di forze risultante fa ruotare il braccio del pendolo di un angolo θ .

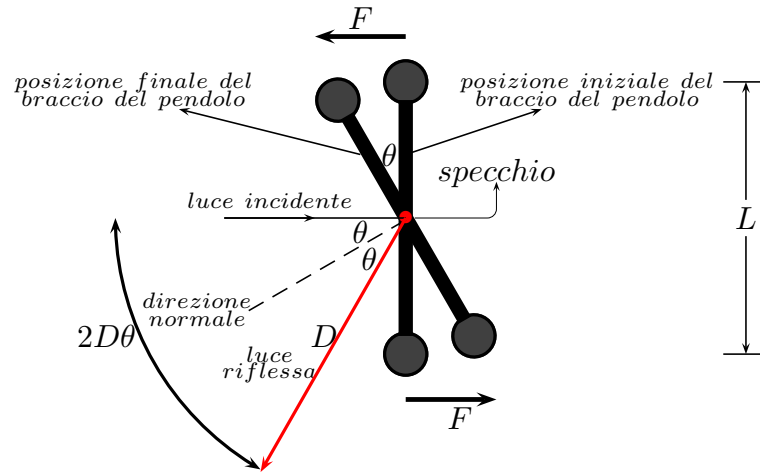


fig.5.14-1

L'angolo di deflessione istantaneo può essere rilevato da un cosiddetto livello ottico, come mostrato in figura. Un piccolo specchio attaccato al pendolo causerà la riflessione di un fascio di luce ad un angolo pari all'angolo di torsione rispetto alla direzione della normale al braccio ed il doppio rispetto alla direzione della luce incidente, cioè 2θ . Un opportuno rivelatore può determinare la direzione di questo fascio riflesso. Se la distanza dallo specchio al rivelatore è D , quindi la lunghezza dell'arco dello spostamento del fascio al rivelatore sarà di circa $2D\theta$. **Una piccolissima deflessione angolare può così essere "amplificata" in una lettura su scala considerevolmente più ampia.**

Per effetto della forza \vec{F} il braccio del pendolo inizia a ruotare; per effetto della elasticità della fibra il braccio subisce la forza di richiamo elastica data dalla (5.13.6) che tende a fermare il movimento del braccio. **Si raggiunge così una posizione di equilibrio in cui il momento dovuto alla forza \vec{F} deve eguagliare il momento dovuto alla forza di richiamo elastica.**

Il modulo del momento dovuto alla forza \vec{F} è FL ; ne segue l'eguaglianza:

$$FL = \Gamma \tag{5.14.1}$$

dove L denota la lunghezza totale del braccio orizzontale del pendolo. Per la (5.13.6) si ha allora:

$$F = \left[\eta \frac{\pi R^4}{2lL} \right] \theta. \tag{5.14.2}$$

Pertanto, una determinazione sperimentale dell'angolo di riflessione allo equilibrio diventa una misura della forza esterna.

La sensibilità di questo metodo di misurazione della forza è data da:

$$S = \frac{dF}{d\theta} \quad (5.14.3)$$

e così:

$$S = \frac{\eta\pi R^4}{2lL} \quad (5.14.4)$$

Consideriamo, a titolo di esempio, le specificazioni nella seguente tabella per un possibile pendolo di torsione:

I primi tre numeri sono determinati dalla scelta della fibra di sospensione, mentre il parametro finale è la lunghezza dell'asta del pendolo. Sostituendo questi valori nell'equazione (5.10.4) si ottiene per la sensibilità della forza $S \approx 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ dyne/radiani}$, o circa $2.8 \cdot 10^{-5} \text{ dyne/grado}$. Forze molto piccole inducono rotazione misurabili. Per apprezzare la piccolezza di tali forze, la massa di un singolo chicco di riso è dell'ordine di pochi milligrammi, quindi il suo peso (forza) sarebbe di circa 10^{-5} N o 1 dyne .

Come notato in precedenza, la sensibilità varia come R^4 , quindi le migliori prestazioni si ottengono con fili di sospensione ultrafini. La tabella 5.14-1 riproduce alcuni valori tipici degli elementi di un pendolo di torsione.

Tabella 5.14-1

η	$5 \cdot 10^{11} \text{ dyne}/(\text{cm}^2 \cdot \text{rad})$
R	$12 \text{ } \mu\text{m}$
l	1 m
L	10 cm

5.15 - Oscillazioni libere senza forze esterne

Supponiamo di considerare il pendolo di figura 5.10-1 e facciamo ruotare il braccio di un angolo θ_0 ; lasciato libero, il pendolo reagisce con un momento di richiamo elastico dato dalla (5.13.6). L'equazione del moto è data dalla formula (3.9.9):

$$\Gamma = \mathcal{I}_z \frac{d\omega}{dt} \quad (5.15.1)$$

ossia:

$$\Gamma = \mathcal{I}_z \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (5.15.2)$$

essendo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

Questa equazione è in realtà abbastanza generale e può essere applicata a oggetti estesi come le ruote, nel qual caso \mathcal{I}_z è il momento d'inerzia totale di tutti i componenti rotanti e Γ è la coppia netta che agisce sull'oggetto.

Un pendolo di torsione consiste di una leggera barra di lunghezza L (vedi figura 5.14-1) con eguali masse m alle sue estremità (vedi anche figura 5.10-1), sospesi da una fibra.

Il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è $\mathcal{I}_z = mL^2/2$ (vedi formula 3.8.2) **Il momento dell'equazione (5.10.2) è ora un momento di richiamo, e quindi è negativo.**

Sostituendo a Γ l'espressione (5.13.6), l'equazione (5.15.2) diventa:

$$\mathcal{I}_z \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\eta \frac{\pi R^4}{2l} \right] \theta = 0 \tag{5.15.3}$$

Questa è l'equazione differenziale di un semplice oscillatore armonico. In questo caso si applicano ora tutti i risultati precedentemente sviluppati per il pendolo linearizzato. se le condizioni iniziali sono $\theta = \theta_0$ e $d\theta/dt = 0$, allora la soluzione è (vedi formule (5.1.3) e (5.5.6)):

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \tag{5.15.4}$$

con la pulsazione naturale data da:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\eta \pi R^4}{2l \mathcal{I}_z}}. \tag{5.15.5}$$

Il periodo delle oscillazioni libere è quindi:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2}{R^2} \sqrt{\frac{\pi 2l \mathcal{I}_z}{\eta}}.$$

Periodo delle Oscillazioni libere (5.15.6)

Utilizzando i parametri tipici dati nella Tabella 5.14-1, e assumendo che il pendolo consiste di masse di 10 *grammi* montate ai due estremi della barra di lunghezza $L = 10 \text{ cm}$, l'equazione (5.15.6) dà un periodo di oscillazione di circa 1000 s (una frequenza di 1mHz). Questo è davvero un moto molto lento. **Si noti dall'equazione (5.15.6) che fili di sospensione più spessi comportano periodi più corti.**

$$\mathcal{I}_z = m \left(\frac{L}{2} \right)^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = m \frac{L^2}{2} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{(10 \cdot 10^{-2})^2}{2} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Momento} \\ \text{di Inerzia} \end{array} \right.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (12 \cdot 10^{-6})^4}{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}} = 5.7 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s} \quad \text{Pulsazione}$$

$$\nu_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5.7 \cdot 10^{-3}}{2\pi} = 9.07 \cdot 10^{-4} \text{ Hz} \quad \text{Frequenza}$$

$$T_0 = \frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{9.07 \cdot 10^{-4}} = 1102.3 \text{ s} = 18.37 \text{ minuti} \quad \text{Periodo}$$

Una applicazione della (5.15.6) è immediatamente evidente, soprattutto se è riarrangiata nella forma:

$$\eta = \left[\frac{4\pi 2l \mathcal{I}_z}{R^4} \right] \frac{1}{T_0^2}. \tag{5.15.7}$$

Tutte le quantità al secondo membro sono proprietà dimensionali del sistema, tranne per il periodo di oscillazione T_0 , che può essere misurato sperimentalmente. Questo metodo per determinare il modulo di rigidità del materia della fibra (vedi Tabella 5.13-1) è il primo di molti usi pratici del pendolo di torsione.

5.16 - Oscillazioni libere con forze esterne

Supponiamo ora che le masse siano sottoposte a forze come in figura 5.14-1. La equazione del moto varia dall'equazione (5.15.3) alla:

$$\mathcal{I}_z \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\eta \frac{\pi R^4}{2l} \right] \theta = \pm FL, \quad (5.16.1)$$

dove + sarà usato quando la forza costante esterna induce un momento nello stesso verso (orario o antiorario) della convenzione adottata per una coordinata angolare positiva. Il segno negativo sarà usato nel caso opposto. La soluzione di questa equazione modificata del moto è:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \pm \frac{FL}{\omega_0^2 \mathcal{I}_z}. \quad (5.16.2)$$

Usando la precedente espressione di ω_0 :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \pm F \frac{2lL}{\eta \pi R^4}. \quad (5.16.3)$$

Le oscillazioni ora hanno una componente dc:

$$\theta_{dc} = F \frac{2lL}{\eta \pi R^4}, \quad (5.16.4)$$

che è uguale alla precedente equazione (5.14.2) del risultato statico. Quindi, una misura di questa dc o la deflessione media nel tempo diventa, non sorprendentemente, la misura della forza esterna.

5.17 - Smorzamento

Non vi sono dinamiche senza perdite. Nel mondo macroscopico il moto è sempre accompagnato da dissipazione (le sole eccezioni sono la superconduttività e la superfluidità). Quindi, in assenza di forze esterne, una più realistica descrizione del pendolo di torsione può essere:

$$\mathcal{I}_z \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + \left[\eta \frac{\pi R^4}{2l} \right] \theta = 0, \quad (5.17.1)$$

che può essere paragonata all'equazione (5.2.2). L'attrito genera un momento resistivo contrario che è proporzionale alla velocità istantanea di rotazione, la proporzionalità è specificata dalla costante β . (Come la coppia di richiamo originale, la coppia resistiva contrasta il movimento ed è quindi negativa come apparirebbe originariamente sul lato destro dell'equazione del moto di Newton). Questo è il più comune modello per l'attrito, ma va detto che in realtà si tratta di un fenomeno complesso, e che l'attrito del cuscinetto,

l'attrito dell'aria, ecc. possono dipendere in misura maggiore da potenze maggiori della velocità angolare. Il comportamento dominante è, tuttavia, ragionevolmente descritto dalla relazione lineare inclusa nell'equazione (5.17.1).

5.18 - Due conquiste storiche

Il pendolo di torsione cominciò la sua illustre storia con due applicazioni scientifiche di profonda importanza avvenute alla fine del Settecento. Questi sviluppi quasi simultanei furono i prodotti creativi delle emergenti culture tecnologiche di Francia e Inghilterra. Sebbene, come quasi sempre, molte persone abbiano contribuito ai risultati finali, i personaggi più celebri sono stati **Charles Coulomb** e **Henry Cavendish**.

5.19 - Cavendish, la forza gravitazionale e la densità della Terra

A proposito di Henry Cavendish, la voce della New Encyclopedia of Science di Funk & Wagnalls recita:

Fisico e chimico britannico, nato da genitori britannici a Nizza, in Francia, ha studiato al Petthouse College dell'Università di Cambridge. I suoi primi esperimenti riguardavano i calori specifici delle sostanze. Nel 1766 scoprì le proprietà dell'elemento idrogeno e ne determinò il peso specifico. La sua opera più celebre fu la scoperta della composizione dell'acqua; ha affermato che "la materia è costituita da aria deflogisticata (ossigeno) con flogisto (idrogeno)". Con quello che ora è conosciuto come l'esperimento di Cavendish, determinò che la densità della Terra era 5.45 volte maggiore della densità dell'acqua, un calcolo molto vicino ai 5.5268 stabiliti dalle tecniche moderne. Cavendish determinò anche la densità dell'atmosfera e fece importanti ricerche sulle correnti elettriche. Cavendish Henry (1731-1810).

È un'idea ampiamente diffusa che Cavendish abbia verificato sperimentalmente la legge gravitazionale di Newton, ma come suggerisce l'elemento biografico sopra, non era così. In primo luogo Newton stesso non scrisse la sua legge nella sua attuale forma familiare, nè introdusse la costante "universale" G . Dopo Cavendish dovettero passare cento anni prima che l'idea moderna di " G " apparisse in un articolo intitolato "On the Newtonian Constant of Gravitation" by C.V. Boys¹⁾. Vale anche la pena ricordare che il nostro sistema familiare di unità non è stato stabilito al tempo di Cavendish. Ad esempio, il dyne non fu introdotto fino al 1873.

Una preoccupazione degli scienziati del diciottesimo secolo era la determinazione della densità relativa della Terra, ed era a questo compito che Cavendish rivolse la sua attenzione.

¹⁾ C.V. Boys: Nature 2 Agosto 1894, pag 330

L'idea base dell'esperimento di Cavendish è illustrato in figura 5.19-1.

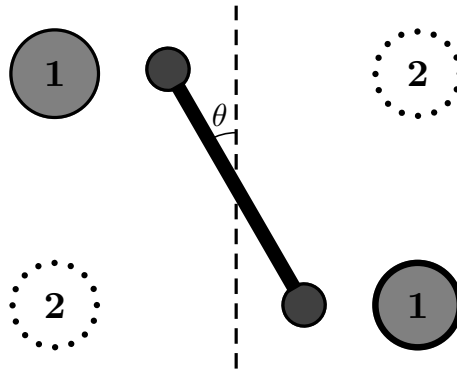


fig.5.19-1

In questa vista dall'alto, si vede che due piccole masse sono fissate alle estremità di un braccio orizzontale di lunghezza L . Due grandi masse sono posizionate in entrambe le coppie di siti numerati 1,1 o 2,2. L'attrazione gravitazionale ruoterà la trave e torcerà la fibra di supporto di un angolo θ in senso antiorario quando le grandi masse si trovano nella prima posizione e di un angolo θ in senso orario quando si trovano nella seconda posizione. L'esperimento consiste nel determinare la variazione totale dell'angolo 2θ che si verifica quando le posizioni della massa vengono scambiate.

La posizione di equilibrio specificata dall'angolo θ è determinata dalla eguaglianza della coppia prodotta dalla forza di attrazione gravitazionale sulle piccole masse verso i loro partner fissi di grandi masse, e la coppia opposta dalla fibra di sospensione attorcigliata.

Un punto chiave da notare è che la coppia di richiamo della fibra è una funzione lineare della torsione θ (vedi formula (5.14.2)), mentre le coppie indotte dalla gravità variano come il quadrato della distanza inversa tra piccole e grandi masse.

Versioni moderne dell'esperimento utilizzano un raggio di luce deviato per la lettura (vedi figura 5.14-1). All'equilibrio, utilizzando l'equazione (5.14.1):

$$G \frac{mM}{r^2} L = \left[\eta \frac{\pi R^4}{2l} \right] \theta. \quad (5.19.1)$$

Per la (5.15.5) si ha:

$$\left[\eta \frac{\pi R^4}{2l} \right] = \omega_0^2 \mathcal{J}_z \quad (5.19.2)$$

Ne segue:

$$G = \mathcal{J}_z \omega_0^2 \left[\frac{r^2}{mML} \right] \theta. \quad (5.19.3)$$

Il momento di inerzia di una barra senza massa con m in ciascuna delle estremità è dato da $\mathcal{I}_z = mL^2/2$ e così:

$$G = \frac{2\pi^2 L r^2}{M T_0^2} \theta. \quad (5.19.4)$$

Quindi una osservazione della deflessione angolare con una conoscenza del valore delle grandi masse, della distanza fra le masse grandi e quelle piccole, e della frequenza delle oscillazioni libere produrrà la costante gravitazionale universale G .

Da G uno può dedurre la densità della Terra (o viceversa). Siano R_E e M_E il raggio e la massa della Terra rispettivamente. L'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra è $g = GM_E/R_E^2$, conosciuta mediante esperimenti di caduta libera e, quindi, la densità della Terra:

$$\rho_E = \frac{M_E}{(4/3)\pi R_E^3}. \quad (5.19.5)$$

oppure:

$$\rho_E = \frac{g}{(4/3)\pi G R_E}. \quad (5.19.6)$$

5.20 - Forze Deboli

Alla luce di quanto sappiamo sulla legge della forza gravitazionale e sulla costante $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}$, è notevole che Cavendish sia riuscito ad ottenere risultati significativi. Consideriamo la difficoltà del compito.

Supponiamo che due sfere di 1 kg , ognuno di raggio 2 cm , siano poste in contatto. Allora secondo la legge gravitazionale di Newton, la forza di attrazione reciproca tra loro sarebbe di circa $4 \cdot 10^{-8} \text{ N}$. Notiamo che il peso di un singolo chicco di riso è di circa 10^{-5} N , una grandezza che è quasi mille volte più grande della forza da misurare nell'esperimento di Cavendish. Fortunatamente, il pendolo di torsione utilizzato da Cavendish che descriveremo nel prossimo paragrafo, fornisce una sensibilità sufficiente per il compito.

5.21 - L'apparato di Cavendish - Misura della densità della Terra

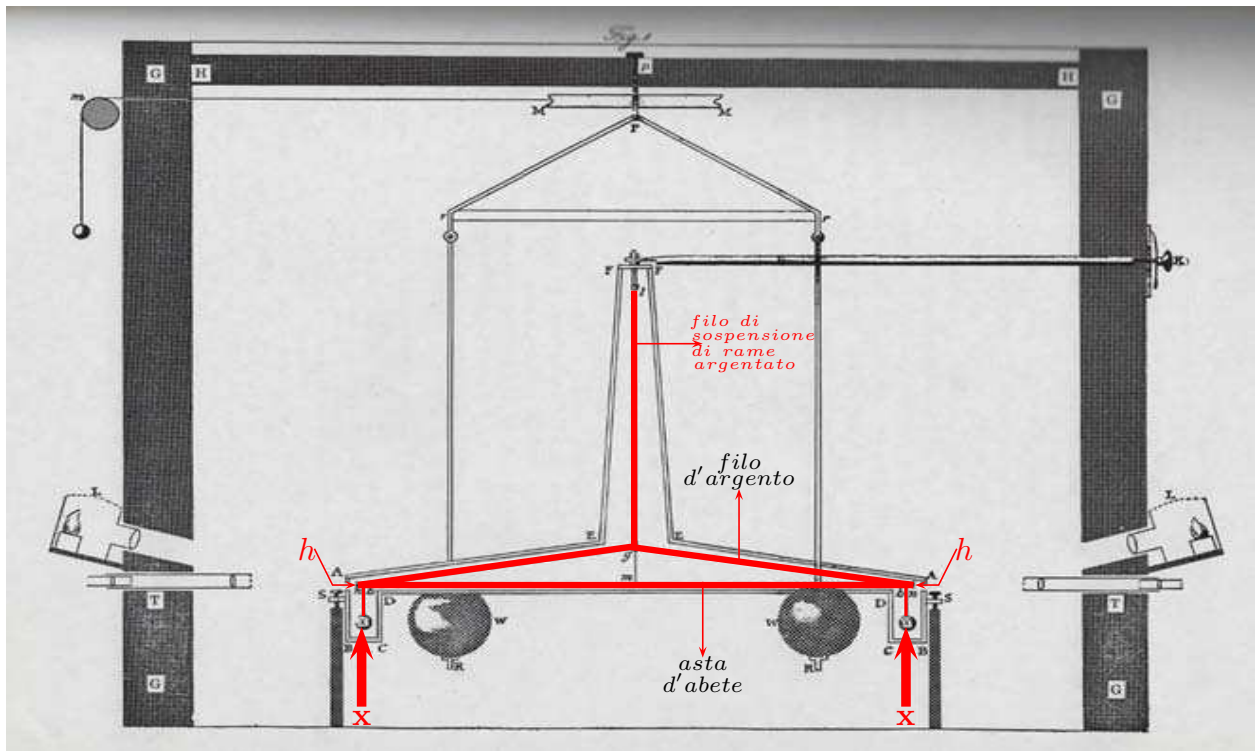


fig.5.21-1

È generalmente riconosciuto che Cavendish abbia migliorato un concetto originale del suo amico e collega il reverendo John Michell (1724-1793).¹⁾ La figura 5.21-1 mostra la trave di torsione (segnata in rosso) costruita da Cavendish²⁾ Era piuttosto grande, di 73,3 pollici di lunghezza (186.182 cm). Le grandi masse erano sfere di piombo di un piede di diametro (30.5 cm) e del peso di 348 libbre (157.853 chilogrammi). Le piccole sfere (indicate in figura dalle frecce rosse) avevano un diametro di 2" (5.08 cm) e la distanza di separazione dei centri r era di 8.85" (22.479 cm). Il filo di sospensione in rame (in rosso) era lungo 39.25 pollici (99.695 cm). Come suggerito nel disegno l'intero apparato era alloggiato in una stanza dotata di lanterne illuminanti e telescopi di puntamento in modo che l'esperimento rimanesse all'esterno e le correnti d'aria fossero ridotte. Dal punto di vista storico di Cavendish, per il quale non esisteva la "G", le equazioni (5.19.5) e (5.19.6) potrebbe essere scritte in modo più significativo:

Sostituendo la (15.19.4) nella 15.19.6) si ha:

$$\rho_E = \frac{g}{(4/3)\pi \frac{2\pi^2 L r^2}{M T_0^2} \theta R_E} \quad (5.21.1)$$

¹⁾ John Michell era un astronomo che, nel 1798, propose l'esistenza di oggetti che noi oggi chiamiamo Buchi neri. Ha fatto questo suggerimento senza conoscere un suggerimento simile di Laplace nel 1795.

²⁾ B.E. Clotfelter: The Cavendish experiment as Cavendish knew it - American Journal of Physics, 55, 210 (1987).

ossia:

$$\rho_E = \frac{3g}{8\pi^3 R_E} \left(\frac{MT_0^2}{Lr^2\theta} \right). \quad (5.21.2)$$

Un'ulteriore utile conversione si pu' ottenere ricordando che un pendolo semplice la cui lunghezza è scelta $L/2$ avrebbe un periodo di piccola ampiezza:

$$T_p = 2\pi\sqrt{L/2g}. \quad (5.21.3)$$

Ricavando g dalla (5.21.3) e sostituendo nella (5.21.2), si ottiene:

$$\rho_e = \frac{3}{4\pi R_E} \left(\frac{MT_0^2}{r^2 T_p^2 \theta} \right). \quad (5.21.4)$$

Ora tutti i valori numerici richiesti sono a portata di mano. Il raggio della Terra era conosciuto agli scienziati del diciottesimo secolo; i rimanenti termini sono parametri dell'apparato sperimentale. Sono richieste tre quantità misurate: T_p , T_0 , θ . Cavendish determinò il tempo per una singola oscillazione (quello che ora identificheremmo come mezzo periodo) e ottenne 0.97 s per il pendolo semplice e 424 s per l'apparato di torsione. La deflessione gravitazionale era $\theta \approx 0.0039 \text{ rad}$ (0.22 gradi). **Da questi la densità media è calcolata pari a 5.71 g/cm³. Il valore attualmente accettato per la densità media della Terra è 5.5268 g/cm³.**

Il raggio medio della Terra é 6371 km.

$$\rho_e = \frac{3}{4\pi \cdot 6371 \cdot 10^3} \left(\frac{157.853 \cdot (2 \cdot 424)^2}{(22.479 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (2 \cdot 0.97)^2 \cdot 0.0039} \right) \quad (5.21.5)$$

$$\rho_e = 3.747173 \cdot 10^{-8} \left(\frac{1.13030924 \cdot 10^8}{7.416893 \cdot 10^{-4}} \right) = 5710.5641 \text{ kg/m}^3 = \underline{\underline{5.71 \text{ g/cm}^3}} \quad (5.21.6)$$

5.22 - Pendolo di Kater^{1),2),3)}

Le formule per il periodo del pendolo semplice e del pendolo composto contengono entrambe la grandezza g , l'accelerazione dovuta alla gravità; quindi cronometrando il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo si può arrivare ad una stima del campo gravitazionale locale ossia di g , per mezzo della formula (5.5.8). Tuttavia i risultati ottenuti tendono ad

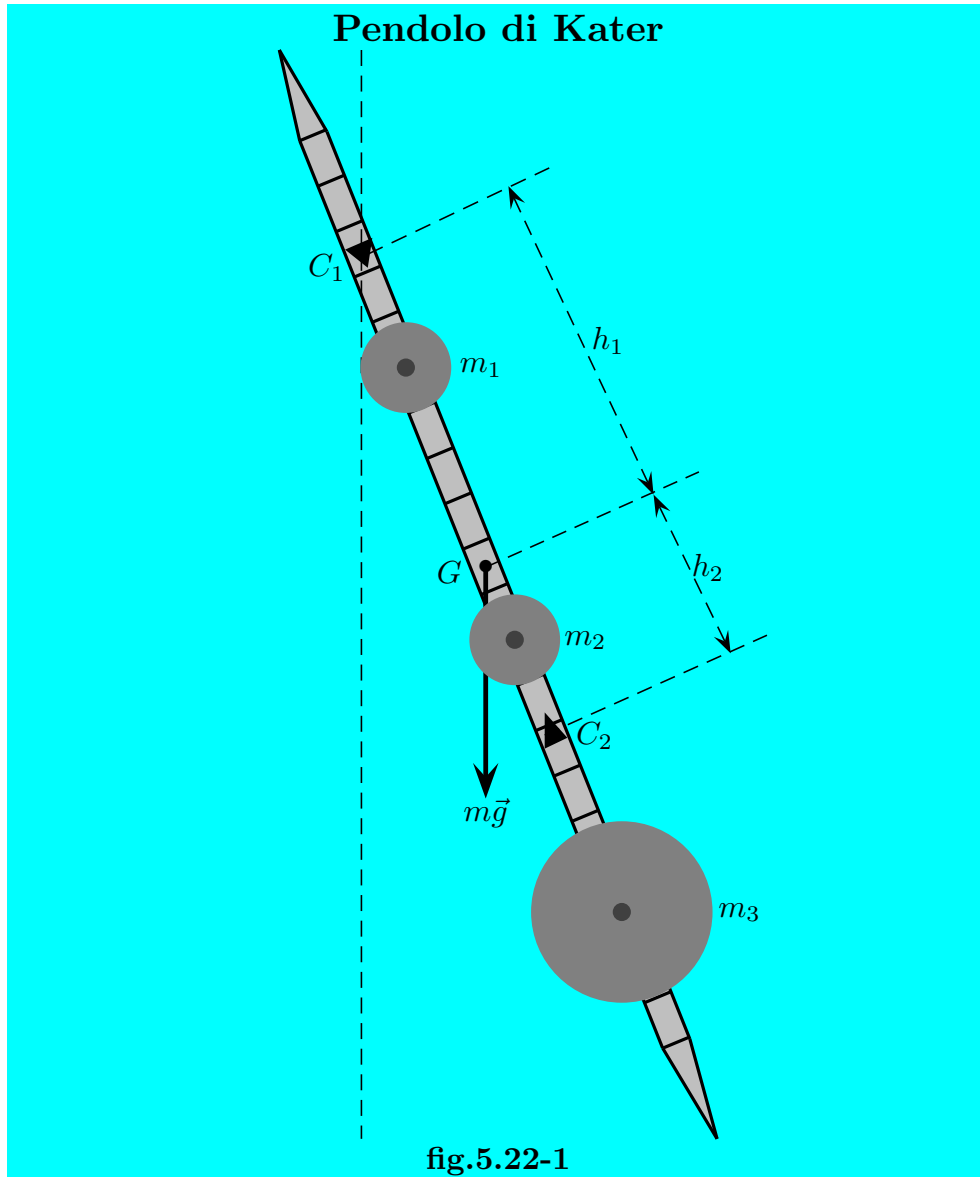
¹⁾ Henry Kater, geodeta: Bristol, Regno Unito, 16 Aprile 1777 - Londra, Regno Unito, 26 aprile 1835.

²⁾ Nello Carrara: Fisica - R. Accademia Navale, 1940, pag.206.

³⁾ Gregory L. Baker, James A. Blackburn: The Pendulum a case study in physics - Oxford University Press, 2009, pag.21.

essere imprecisi perchè è spesso difficile determinare la lunghezza di un pendolo costituito da un filo e da una pallina.

Su suggerimento dell'astronomo tedesco F. W. Bessel (1784-1847), il capitano Henry Kater (1777-1835) dell'esercito britannico inventò un pendolo reversibile nel 1817 che aumentò notevolmente la precisione della misura di g .



Esso è mostrato schematicamente in Fig. 5.22-1, è costituito da un'asta rigida che porta due coltelli fissi C_1 e C_2 , attorno ad uno qualunque dei quali può essere fatta oscillare. Inoltre lungo l'asta vengono fissate le masse m_1 , m_2 , m_3 . È possibile trovare per le tre masse, posizioni tali, che il periodo delle oscillazioni attorno a C_1 sia eguale a quello delle oscillazioni attorno a C_2 . Di solito le masse m_1 e m_3 sono fisse e la massa m_2 si può spostare lungo l'asta rigida per mezzo di una vite micrometrica.

Siano h_1 e h_2 le distanze dei coltelli C_1 e C_2 rispettivamente dal centro di massa G . Indichiamo con \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 i momenti di inerzia rispetto agli assi di sospensione C_1 e

C_2 rispettivamente. Quindi le equazioni linearizzate del moto rispetto ai due assi (vedi equazione (5.5.6)) sono:

$$\mathcal{I}_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh_1\theta = 0; \quad \mathcal{I}_2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh_2\theta = 0. \quad (5.22.1)$$

Se indichiamo con mk^2 , con k da determinare, il momento di inerzia rispetto al centro di massa G , i due momenti di inerzia \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 per il teorema sugli assi paralleli sono:

$$\mathcal{I}_1 = mk^2 + mh_1^2, \quad \mathcal{I}_2 = mk^2 + mh_2^2 \quad (5.22.2)$$

Allora le equazioni (5.22.1) si possono scrivere:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gh_1}{k^2 + h_1^2}\theta = 0; \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gh_2}{k^2 + h_2^2}\theta = 0. \quad (5.22.3)$$

Per la formula (5.9.9) i periodi di oscillazione nei due casi sono:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{I}_1}{mgl_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + h_1^2}{gh_1}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{I}_2}{gl_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + h_2^2}{gh_2}} \quad (5.22.4)$$

Imponendo che i due periodi siano eguali, si dovrà avere:

$$\frac{k^2 + h_1^2}{h_1} = \frac{k^2 + h_2^2}{h_2} \quad (5.22.5)$$

Risolvendo per k^2 si ha:

$$k^2 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = h_2 - h_1 \quad (5.22.6)$$

ossia:

$$k^2 \left(\frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} \right) = h_2 - h_1 \quad (5.22.7)$$

Ne segue:

$$k^2 = h_1 h_2 \quad (5.22.8)$$

Quindi:

$$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{h_1 + h_2}{g}} \quad (5.22.9)$$

Fine del Cap.5