

Cap. 3

**Dinamica del punto ed alcuni teoremi fondamentali della Meccanica**

**3.1 - Leggi di Newton**

La legge fondamentale della dinamica é la cosiddetta **legge di Newton**:

*La risultante delle forze applicate su un corpo é uguale al prodotto della massa del corpo per l'accelerazione.*

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{3.1.1}$$

$\vec{F}$  si misura in Newton e la massa  $m$  in Kg.

Dalla (3.1.1) si deduce che se  $\vec{F} \neq 0$  il corpo subisce una accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{3.1.2}$$

e, quindi varia la sua velocità.

Dalla (3.1.2) segue che se la risultante delle forze agenti su un corpo é nulla, la sua accelerazione é zero e quindi la sua velocità rimane costante. Se il corpo era inizialmente fermo (ossia velocità nulla), esso continua a rimanere fermo.

Da questo si può dedurre il primo principio della dinamica (o principio di inerzia):

*Un corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se la risultante delle forze agenti su di esso é nulla.*

**La legge fondamentale della dinamica ci permette, quindi, di determinare la traiettoria e la legge oraria del moto se si conosce l'espressione della forza.**

In natura vi sono diversi tipi di forze di cui si conosce la loro espressione analitica; fra le più importanti vi sono:

- 1) Forze di tipo elastico
- 2) Forza gravitazionale
- 3) Forza d'attrito

Applicando per ciascun tipo di forza la legge di Newton, siamo in grado di stabilire la traiettoria e la legge oraria che descrive il moto di un corpo.

In questo capitolo trattiamo le forze di tipo elastico ossia la **Dinamica delle Oscillazioni**.

**3.2 - Teorema di conservazione della Quantità di moto**

Riscriviamo la seconda legge della Dinamica:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.2.1}$$

essendo  $\vec{F}$  la risultante delle forze applicate per esempio su un punto materiale. **Se questa risultante fosse nulla**, l'equazione (3.2.1) diventa:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad (3.2.2)$$

Se la massa del punto materiale si mantiene costante durante il moto, la (3.2.2) si scrive.

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = 0 \quad (3.2.3)$$

ossia, durante il moto é sempre:

$m\vec{v} = Costante$	<b>Conservazione della Quantità di moto</b> (3.2.4) $\sum \vec{F}^{ext} = 0$
-----------------------	---

La quantità:

$\vec{p} = m\vec{v}$	(3.2.5)
----------------------	---------

prende il nome di **Quantità di moto della particella** e l'equazione (3.2.4) esprime il **Principio di conservazione della Quantità di Moto**.

### 3.3 - Terzo principio della Dinamica

Per meglio comprendere il principio di conservazione della quantità di moto dobbiamo considerare i sistemi meccanici in cui la risultante delle forze é nulla. Per questo consideriamo quello che viene chiamato **terzo principio della dinamica o principio di azione e reazione**:

*Se un corpo a contatto (o no) con un altro sottopone questo ad una forza il corpo reagisce con una forza uguale in modulo e direzione ma opposta in verso.*

Se consideriamo il sistema dei due corpi come un unico sistema meccanico, in esso la risultante delle forze é nulla.

Vi sono molti esempi in Fisica di situazioni di tale tipo. Le piú importanti sono l'urto di un corpo su un altro che tratteremo a parte nel capitolo sei ed il problema del cannone che spara che tratteremo di seguito:

Supponiamo di avere un cannone (o fucile, o pistola) che spara un proiettile. All'istante  $t = 0$  il sistema cannone - proiettile é in quiete, quindi la quantità di moto  $Q_{t=0}$  del sistema cannone-proiettile é zero, ossia:

$$Q_{t=0} = M_{cannone}v_{cannone} + m_{proiettile}v_{proiettile} = 0 \quad (t = 0) \quad (3.3.1)$$

Subito dopo lo sparo il proiettile acquisterá una certa velocità, diciamo  $V_{proiettile}$  diversa da zero.

Poiché la risultante delle forze interne al sistema, per il terzo principio della Dinamica é nulla, la quantità di moto del sistema si conserva, ossia deve essere:

$$Q = 0 \quad (\text{a qualunque istante durante il moto}) \quad (3.3.2)$$

Ancora:

$$M_{cannone}V_{cannone} + m_{proiettile}V_{proiettile} = 0 \quad (3.3.3)$$

da cui si deduce che:

$$\boxed{V_{cannone} = -\frac{m_{proiettile}}{M_{cannone}}V_{proiettile}} \quad (3.3.4)$$

**Questo é l'importantissimo risultato che ci dimostra che il cannone (o fucile o pistola), subito dopo lo sparo, subisce una forza opposta a quella che agisce sul proiettile e quindi si muove in direzione opposta a quella del proiettile.**

Il risultato può essere generalizzato nel caso di un gran numero di particelle.<sup>1)</sup> Siano  $i$  e  $j$  gli indici sulle masse. La forza totale sulla particella  $i$  è la somma delle forze esercitate da tutte le altre particelle:

$$m_i\vec{a}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \quad (3.3.5)$$

essendo  $\vec{F}_{ji}$  la forza esercitata sulla particella  $i$  dalla particella  $j$ .

Sommando su tutte le particelle di indice  $i$ , si ha:

$$\sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = 0 \quad (3.3.6)$$

Per meglio capire la (3.3.6), consideriamo tre particelle 1,2,3.

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underline{F_{21}} + \underline{F_{31}} + \underline{F_{12}} + \underline{F_{32}} + \underline{F_{13}} + \underline{F_{23}} = 0 \quad (3.3.7)$$

in quanto per il terzo principio della dinamica risulta:  $F_{21} = -F_{12}$ ,  $F_{31} = -F_{13}$ ,  $F_{32} = -F_{23}$ .

Poiché l'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità, la (3.3.6) si può scrivere:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i\vec{v}_i = 0 \quad (3.3.8)$$

---

<sup>1)</sup> Nearing James: Mechanics, 2008, pag.41.

ossia:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{costante} \quad (3.3.9)$$

che esprime il **Teorema di Conservazione della Quantità di Moto di un sistema di punti materiali in assenza di forze esterne.**

### 3.4 - Teorema di conservazione dell'Energia Meccanica

La legge di conservazione dell'energia coinvolge i concetti di energia cinetica, energia potenziale e lavoro, che possono essere capiti per mezzo di un semplice esempio. Consideriamo una particella di massa  $m$ . All'istante  $t = 0$  viene applicata sulla particella, nella direzione dell'asse  $x$ , una forza  $F_{appl}$  costante in modulo direzione e verso. La particella, sotto l'azione della forza applicata, accelererà, e il moto, per  $t > 0$ , è descritto dalla seconda legge di Newton:

$$F_{appl} = m\ddot{x} \quad (3.4.1)$$

La velocità al tempo  $t$  è quindi:

$$v(t) = \int_0^t \ddot{x} dt = v_0 + \frac{F_{appl}}{m} t \quad (3.4.2)$$

dove  $v_0$  è la velocità iniziale nella direzione  $x$ .

L'equazione (5.3.2) si può scrivere:

$$F_{appl} t = mv(t) - mv_0 \quad (3.4.3)$$

L'espressione al secondo membro è la variazione della quantità di moto della particella fra 0 e  $t$ . L'espressione al primo membro, ossia il prodotto della forza per l'intervallo di tempo  $t$  prende il nome di **impulso della forza**.

Integrando la (3.4.2) rispetto al tempo, si ottiene la posizione al tempo  $t$ :

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F_{appl}}{m} t^2 \quad (3.4.4)$$

dove  $x_0$  è la posizione iniziale.

Risolvendo la (3.4.2) rispetto al tempo si ha:

$$t = \frac{m}{F_{appl}} (v - v_0) \quad (3.4.5)$$

e sostituendo la (3.4.5) nella (3.4.4), si ottiene:

$$x - x_0 = \frac{m}{F_{appl}} (v v_0 - v_0^2) + \frac{1}{2} \frac{m}{F_{appl}} (v^2 - 2v v_0 + v_0^2) = \frac{1}{2} \frac{m}{F_{appl}} (v^2 - v_0^2) \quad (3.4.6)$$

e quindi:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_{appt}(x - x_0)} \quad (3.4.7)$$

La quantità  $\frac{1}{2}mv^2$  viene definita **l'energia cinetica della particella e si misura in Joule**.

La quantità  $F_{appt}(x - x_0)$  viene definita **il lavoro compiuto dalla forza applicata sulla particella e si misura in Joule**.

In base a queste definizioni l'equazione (3.4.7) dice che **il lavoro fatto dalla forza applicata é uguale alla variazione dell'energia cinetica della particella**.

Supponiamo che la particella non si trovi nello spazio intergalattico ma sia ferma ad una altezza  $h$  dalla superficie della Terra ( $x_0 = h; v_0 = 0$ ); la forza gravitazionale  $F_G = -mg$  agisce sulla particella spingendola verso il basso. Durante la caduta il lavoro compiuto dalla forza di gravità é, istante per istante, uguale all'aumento dell'energia cinetica della particella stessa:

$$L(\text{per gravità}) = F_G(x - x_0) \quad (3.4.8)$$

Il lavoro compiuto per portare la particella dall'altezza  $h_0$  alla superficie terrestre  $x = 0$  é:

$$L(\text{per gravità}) = (-mg)(0 - h) = mgh = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (3.4.9)$$

dove  $v$  é la velocità della particella nel momento in cui raggiunge il suolo e  $v_0$  é la sua velocità iniziale. (In questo esempio particolare  $v_0 = 0$ ). L'espressione (5.3.9) ci suggerisce di attribuire a una particella posta ad un'altezza  $h$ , una energia potenziale (capacità di compiere lavoro o di aumentare la propria energia cinetica) rispetto alla superficie terrestre, pari a  $mgh$ .

Che cosa accade all'energia potenziale quando un particella, ferma sulla superficie terrestre, viene sollevata ad un'altezza  $h$ ? Per innalzare la particella dobbiamo applicargli una forza, diretta verticalmente verso l'alto,  $F_{appt} = -F_G$ . Ora  $x_0 = 0$  e  $x = h$ ; eseguiamo quindi un lavoro:

$$L(\text{fatto da noi}) = F_{appt}(x - x_0) = mgh \quad (3.4.10)$$

sulla particella e, ciò facendo, le forniamo l'energia potenziale  $mgh$ , che, come abbiamo detto prima, é quella che deve avere quando si trova all'altezza  $h$ .

Si noti che il lavoro compiuto (5.3.9) dalla forza di gravità sulla particella che cade é uguale al lavoro (3.4.10) che facciamo noi contro la gravità per innalzare la particella.

Osservando la (3.4.9) e la (3.4.7) si vede che l'energia potenziale  $mgh$  può essere completamente convertita in energia cinetica, in quanto il lavoro compiuto dalla forza applicata  $F_{appt}$ , per formare l'energia potenziale é uguale alla variazione dell'energia cinetica. Quando si parla di energia potenziale é sempre necessario specificare a quale posizione ci si riferisce. Sono le variazioni di energia potenziale che hanno un significato fisico, perché ci dicono di quanto é cambiata l'energia cinetica.

Se intendiamo che, nella (3.4.9),  $v$  indichi non la velocità raggiunta dopo una caduta da un'altezza  $h$ , ma quella relativa ad un tratto  $(h - x)$ , allora si ottiene l'equazione analoga alla (5.3.9):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - x) \quad (3.4.11)$$

che si può scrivere:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + mgx = mgh = E} \quad (3.4.12)$$

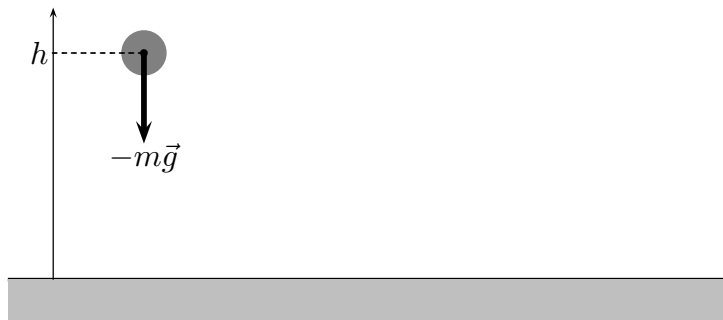
dove  $E$  è una costante che vale  $mgh$ .

Siccome  $E$  una costante, la (3.4.12) è una delle forme in cui si enuncia la **legge di conservazione dell'energia totale meccanica**.

$$\begin{aligned} E &= T + U = \\ &= \text{Energia cinetica} + \text{Energia potenziale} = \text{costante} = \\ &= \text{Energia totale meccanica} \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

### Esempio 1 - Caduta Libera

a) Si abbia una massa di 100 g (0.1 Kg) posta ad un'altezza di 10 cm (0.1 m) dal suolo. Si lasci libera la massa di cadere e si calcoli il lavoro fatto dalla forza di gravità.



Si ha:

$$L = -mg(-h) = mgh \quad (3.4.14)$$

b) Se la particella dell'esempio a) fosse inizialmente ferma, quali sarebbero la sua energia cinetica e la sua velocità alla fine della caduta?

Il valore iniziale della energia cinetica  $T_A$  é zero; il valore finale  $T_B$  é, uguale al lavoro fatto dalla forza di gravitá sulla particella, per cui:

$$T_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad (3.4.15)$$

da cui:

$$v_B^2 = \frac{2T_B}{m} \quad (3.4.16)$$

Questo risultato é in accordo con quello che si otterrebbe dalla relazione elementare per il moto uniformemente accelerato con partenza da fermo.

$$v^2 = 2gh \quad (3.4.17)$$

Questo esempio chiarisce ciò che intendiamo quando affermiamo che i risultati ottenuti dalle leggi di conservazione devono essere consistenti con le leggi del moto: usando la conservazione dell'energia, abbiamo ottenuto lo stesso risultato a cui si sarebbe giunti risolvendo l'equazione  $v^2 = 2gh$ , ricavata dall'equazione del moto  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

### Esempio 2 - Forza elastica di richiamo

Una particella é soggetta ad una forza elastica di richiamo, in direzione  $x$ , cioè a una forza direttamente proporzionale allo spostamento, misurato da un punto fisso determinato, e con direzione e verso tali da ridurre lo spostamento. Se si sceglie come origine il punto fisso:

$$\vec{F} = -Kx \quad \text{oppure} \quad F_x = -Kx \quad (3.4.18)$$

dove  $K$  é una certa costante positiva, la costante della forza. La (3.4.18) viene chiamata **legge di Hooke**. Per spostamenti sufficientemente piccoli, una forza di questo tipo può essere prodotta da una molla tesa o compressa. il segno della forza é tale che la particella é sempre attirata verso l'origine  $x = 0$ .

a) Applichiamo ora ad una particella, collegata a una molla, una forza esterna che sposti la particella da un punto  $x_1$  ad un punto  $x_2$ . Qual'é il lavoro fatto dalla forza applicata alla particella durante lo spostamento? In questo caso la forza che agisce sulla particella é funzione della posizione: per calcolare il lavoro fatto dalla forza applicata  $\vec{F}_{appl} = -\vec{F} = kx\hat{x}$ :

$$L(x_1 \longrightarrow x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{appl} \cdot d\vec{r} = K \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2) \quad (3.4.19)$$

Qui la forza applicata é la forza applicata da qualcuno contro la forza della molla, e non la forza che la molla stessa applica alla particella: questa non aumenta la propria energia cinetica durante il processo, se le due forze sono eguale ed opposte. Se il punto iniziale  $x_1$  viene scelto come origine, allora  $x_1 = 0$  e la (3.4.19) si riduce a:

$$L(0 \longrightarrow x) = \frac{1}{2}Kx^2 \quad (3.4.20)$$

Questo é un risultato famoso: esso ci dice che il lavoro fatto sul sistema dalla forza applicata é proporzionale al quadrato dello spostamento.

b) Se la particella di massa  $m$  é lasciata libera quando é ferma nella posizione  $x_{max}$ , qual' é l'energia cinetica quando raggiunge l'origine? La risposta si ottiene direttamente dalla (3.4.9): il lavoro fatto dalla molla per andare da  $x_{max}$  all'origine é:

$$L(x_{max} \rightarrow 0) = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (3.4.21)$$

dove si é fatto uso dell'ipotesi che in  $x_{max}$  sia  $v = 0$ , cioé che la particella alla massima distanza sia ferma. La velocità nell'origine é  $v_1$ . Quindi:

$$\frac{1}{2}Kx_{max}^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (3.4.22)$$

é l'energia cinetica nell'origine  $x = 0$ .

c) Qual' é il legame fra la velocità della particella nell'origine e lo spostamento massimo  $x_{max}$ ?

Dalla (3.4.22):

$$v_1^2 = \frac{K}{m}x_{max}^2 \quad (3.4.23)$$

ossia:

$$v_1 = \pm \sqrt{\frac{K}{m}}x_{max} \quad (3.4.24)$$

### Esempio 3 - Velocità di fuga dalla Terra e dal Sistema Solare - Buco nero

Se si lancia una particella di massa  $m$  in aria, maggiore sarà la velocità iniziale, maggiore sarà l'altezza massima a cui sale prima di invertire la direzione del moto e ritornare sulla Terra.

Calcolare la velocità iniziale necessaria ad una particella di massa  $m$  per fuggire a) dal campo gravitazionale della Terra, b) dal campo gravitazione del Sole. (Si trascuri la rotazione terrestre).

Una particella di massa  $m$ , di velocità  $v$  ha energia totale meccanica, cinetica piú potenziale, data da:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T} \quad (3.4.25)$$

dove  $G = 6.67430 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$  é la costante di gravitazione universale,  $M_T \simeq 5.97 \cdot 10^{24} Kg$  la massa della Terra ed  $R_T \simeq 6372.797 Km$  il raggio medio della Terra.

Affinché la particella raggiunga una distanza infinita dalla Terra con la minima velocità possibile, cioé nulla, l'energia totale deve essere zero, perché nello stato finale sono nulle sia l'energia cinetica sia l'energia potenziale gravitazionale.



Se l'energia totale della particella dopo il lancio si mantiene costante la (5.3.25) deve valere zero e la velocità di fuga  $v_{fT}$  è data quindi da:

$$\frac{1}{2}mv_{fT}^2 = \frac{GM_T m}{R_T} \quad (3.4.26)$$

ossia:

$$v_{fT} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \quad (3.4.27)$$

La quantità  $GM_T/R_T^2$  è l'accelerazione di gravità media  $g \simeq 9.81 \text{ m/s}^2$  sulla superficie terrestre; cosicché:

$$v_{fT} = \sqrt{2gR_T} \simeq 11182 \text{ m/s} \simeq 4 \cdot 10^4 \text{ Km/h} \quad (3.4.28)$$

**Velocità**

**di fuga**

**dalla Terra**

Per sfuggire alla sola attrazione solare una particella, avrà bisogno di una velocità di fuga:

$$v_{fS} = \sqrt{\frac{2GM_s}{R_S}} \simeq 617469.9765 \text{ m/s} \simeq 2.22 \cdot 10^6 \text{ Km/h} \quad (3.4.29)$$

**Velocità**

**di fuga**

**dal Sole**

essendo  $M_S \simeq 1.98892 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$  la massa del Sole e  $R_S \simeq 696340 \text{ km}$  il raggio del Sole.

### Buco Nero

Dalle formule (3.4.27) e (3.4.29) si deduce che la velocità di fuga da un corpo celeste è tanto maggiore quanto maggiore è la massa del corpo e minore è il suo raggio. Per una nana bianca, che ha una massa paragonabile a quella del Sole compressa all'interno di un raggio simile a quello della Terra, si ha tipicamente  $v_{fnb} \simeq 7 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ , e per oggetti ancora più compatti come le stelle di neutroni si arriva a  $v_{fnsn} \simeq 1.5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . **Si deduce quindi che, per corpi celesti ancora più compatti e più densi, la velocità di fuga può raggiungere e superare la velocità della luce nel vuoto ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ).** Fissata una massa  $M$  di un astro, si può ricavare il raggio che deve avere la distribuzione sferica della massa affinché la velocità di fuga da esso sia eguale alla velocità della luce  $c$ . Si ha, cioè, per la (3.4.27):

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_{Sch}}} \quad (3.4.30)$$

essendo  $M$  e  $R_{Sch}$  la massa ed il raggio dell'astro rispettivamente per cui la velocità di fuga sia  $c$ . Dalla (3.4.30) si ricava:

$$R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.4.31)$$

**Raggio di**

**Schwarzschild**

Tuttavia, la teoria della relatività di Albert Einstein asserisce che nessun oggetto può avere una velocità maggiore di quella della luce, quindi, la formula (3.4.31) permette di calcolare il raggio limite al di sotto del quale nessun oggetto può allontanarsi da M.

**Dato che il fotone ha massa nulla, questa dimostrazione non è valida per il caso della luce come si evince dalla formula (3.4.27) dove la divisione per  $m$  è valida solo se  $m \neq 0$ .**

Nel diciottesimo secolo si pensava che la luce fosse costituita da particelle di massa piccolissima per cui nella fisica classica, basandosi sui principi della dinamica, era stata teorizzata la possibilità che un corpo avesse una massa così grande da non consentire nemmeno alla luce di superare la velocità di fuga, **ragione per cui tale corpo sarebbe risultato invisibile**. Nel 1783 lo scienziato inglese John Michell suggerì in una lettera a Henry Cavendish (successivamente pubblicata nei rendiconti della Royal Society)<sup>1)</sup> che la velocità di fuga da un corpo celeste potrebbe risultare superiore alla velocità della luce, dando luogo a quella che egli chiamò una "stella oscura" (dark star). Nel 1798 Pierre-Simon de Laplace riportò quest'idea nella prima edizione del suo *Traité de Mécanique Céleste*.

Si leggono nelle prime edizioni del *Système du Monde*, di Laplace, le curiose affermazioni seguenti, che riportiamo integralmente:<sup>2)</sup>.

**Diverse stelle sperimentano variazioni periodiche molto notevoli nel loro colore e splendore; ve ne sono altre che sono apparse all'improvviso, e che sono scomparse, dopo aver emesso una luce brillante per qualche tempo. Quali cambiamenti prodigiosi devono aver avuto luogo sulla superficie di questi grandi corpi, per essere così sensibili alla distanza che ci separa da loro; e quanto devono superare quelli che osserviamo sulla superficie del Sole! Tutti questi corpi, che sono diventati invisibili, sono nello stesso luogo dove furono osservati, poichè non c'è stato alcun cambiamento durante la loro apparizione; esistono perciò negli spazi celesti corpi oscuri tanto considerevoli, e forse in numero tanto grande quanto le stelle. **Un astro luminoso della stessa densità della Terra, e di cui il diametro sarà duecentocinquanta volte più grande di quello del Sole non permetterebbe, in virtù della sua attrazione, a nessuno dei suoi raggi di raggiungerci; è possibile che i più grandi corpi luminosi dell'universo siano in tal modo persino invisibili. Una stella che, senza essere di questa grandezza, sorpasserebbe considerevolmente il Sole, indebolirebbe sensibilmente la velocità della luce, aumentando così l'estensione della sua aberrazione.****

---

<sup>1)</sup> John Michell: On the means of discovering the distance, magnitude, & c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose. By the Rev. John Michell, B.D. F.R.S. In a letter to Henry Cavendish, Esq. F.R.S. and A.S - Philosophical Transactions of the Royal Society, 31 Dicembre 1784, volume 74.

<sup>2)</sup> Pierre Simon Laplace (M. Le Marquis De Laplace)(Beaumont-en-Auge, France, 23 marzo 1749 - Paris, France, 5 marzo 1827): Exposition du Système du Monde, tome second, Livre cinquième, Capitolo V, Du mouvement d'un systeme de corps., **pag.304, édition 1796**

Il testo, in rosso, è stato rimosso dall'Autore a partire dalla terza edizione (1808). **Era stato ovviamente ispirato dalla teoria dell'emissione materiale della luce, di cui Laplace era un sostenitore.** Sappiamo infatti che, nel suo capitolo sull'attrazione molecolare,<sup>3)</sup> Egli parla costantemente delle molecole di luce, attratte, deviate, disperse, ecc., e inoltre dichiara che l'ipotesi della propagazione della luce per le ondulazioni di un fluido etereo, immaginata da Huygens, è insostenibile e notevolmente contraria ai fenomeni osservati nella doppia rifrazione del cristallo d'Islanda.

Ha presentato la sua tesi davanti al pubblico dell'Accademia delle Scienze, ma i fisici sono rimasti scettici sulle possibilità che un tale oggetto esista. **Nasce così il concetto di buco nero** ma la dimostrazione matematica di Laplace sembra fantasiosa agli occhi degli astronomi. Inoltre, gli esperimenti di Young e Fresnel portarono i fisici a rifiutare la natura particellare della luce nella prima metà del diciannovesimo secolo. Laplace cessa anche di includere questa nozione di buco nero dalla terza edizione del suo libro *Exposition du Système du Monde*.

Questa teoria delle molecole materiali della luce, soggette, per il fatto stesso della loro esistenza, all'attrazione universale, riporta alle stelle quando raggiungono la distanza alla quale la gravità può riprenderle, e renderle oscure a cento milioni di chilometri di distanza, per esempio, i soli più splendidi si trovano a trenta o quaranta milioni di chilometri, questa teoria è scomparsa dalla scienza. Ma l'idea degli astri oscuri deve restare.

**Essa deve restare, in virtù di un principio completamente diverso.**

Il termine "buco nero" è stato coniato dal fisico John Archibald Wheeler. L'aggettivo "nero" deriva dal fatto che non può emettere luce. Il fatto che nessuna particella che vi fosse catturata possa più riemergere (nemmeno i fotoni) è la ragione del termine "buco".

Il buco nero ricade quindi nell'oscurità per più di un secolo. Riappare nel ventesimo secolo, quando **Albert Einstein pubblica la sua teoria della relatività generale.**

Nella relatività generale il campo gravitazionale viene descritto come deformazione dello spazio-tempo causata da un oggetto molto massiccio, e la velocità della luce è una costante limite. Il concetto di buco nero venne teorizzato dal fisico **Karl Schwarzschild** nel 1916,<sup>4)</sup> solo un anno dopo la pubblicazione della teoria della relatività generale.

Esplorando alcune soluzioni alle equazioni della teoria, Schwarzschild calcolò che un corpo ipoteticamente dotato di altissima densità produrrebbe nelle sue vicinanze una deformazione tale che la luce in allontanamento da esso tenderebbe a subire uno spostamento verso il rosso gravitazionale infinito. Il concetto teorizzato da Schwarzschild dipende dalla densità dell'oggetto, in astratto cioè si potrebbe applicare a un qualsiasi oggetto il cui volume fosse estremamente piccolo rispetto alla sua massa - anche se, nella realtà, non è noto alcun mezzo che possa fornire a un oggetto con massa piccola l'energia necessaria per

---

<sup>3)</sup> Pierre Simon Laplace (M. Le Marquis De Laplace)(Beaumont-en-Auge, France, 23 marzo 1749 - Paris, France, 5 marzo 1827): *Exposition du Système du Monde*, livre quatrième, chap. XVIII, pag.272, tome second, sixième édition, Paris 1836. (In alcune edizioni più recenti, per esempio Gabay Editions 2006, questo capitolo viene omissso).

<sup>4)</sup> Karl Schwarzschild: Francoforte sul Meno, Germania, 9 ottobre 1873 - Potsdam, Germania, 11 maggio 1916.

concentrare a tal punto la materia: l'unica forza nota nell'universo in grado di sviluppare una tale intensità è la forza di gravità, in presenza di una grande quantità di materia.

### **Pierre Simon Laplace<sup>5)</sup>**

Pierre-Simon Laplace è considerato uno dei più grandi scienziati di Francia. Nacque il 23 Marzo 1749 nella bassa Normandia a Beaumont-en-Auge dove suo padre era sindaco. Egli cominciò la sua educazione presso il Collegio di Beaumont-en-Auge, dove suo zio insegnava, rimanendovi fino all'età di sedici anni. Da questo collegio gli studenti normalmente procedevano verso l'esercito o in una vocazione ecclesiastica, e nel 1766 Laplace si iscrisse all'università di Caen e, dopo appena due anni, si immatricolò alla Facoltà delle Arti con l'intento di conseguire gli ordini di sacerdote e intraprendere la carriera ecclesiastica.

Durante questo biennio Laplace scoprì che possedeva grandi doti matematiche, quindi abbandonò i suoi studi teologici e nel 1768 si trasferì a Parigi.

A Parigi fu guidato da d'Alembert, uno scienziato di spicco dell'Accademia di Francia, che ottenne per lui la nomina di Professore di Matematica all'École Militaire. Laplace insegnò lì dal 1769 al 1776, e durante questo intervallo ha presentato tredici articoli sulla matematica e sulla teoria della probabilità e vinse l'elezione all'Accademia delle Scienze. Uno degli articoli era su La teoria Newtoniana del moto dei pianeti, che Laplace tradusse in latino. Fu eletto all'Accademia nel 1773.

Questa fu l'era della Rivoluzione francese (1789-1799), periodo di sconvolgimento politico e sociale in tutta la Francia mentre si muoveva da una monarchia assoluta con privilegi feudali per l'aristocrazia e il clero cattolico a una forma basata sull'Illuminismo, principi di nazionalismo, cittadinanza e diritti inalienabili.

Laplace rimase all'Accademia, e la caduta di Robespierre e del regime giacobino nel 1794 vide il cambiamento drammatico nel sistema educativo che ha portato alla istituzionalizzazione della società francese moderna. Sono emerse varie istituzioni scientifiche (tra cui l'Institute de France), ma alcuni di questi caddero lungo la strada solo per riemergere in una fase successiva. Nel 1795 Laplace fu eletto vicepresidente dell'Istituto di Francia, e un anno dopo fu nominato presidente.

In questa posizione ha diffuso un libro che stava preparando intitolato Exposition du Systme du Monde apparso in due volumi nel 1796.

Pierre-Simon Laplace morì il 5 marzo 1827, giusto due settimane e mezzo prima del suo 78esimo compleanno.

### **Laplace indipendentemente introduce i concetto di buco nero**

Nel sesto capitolo dell'Exposition du Systme du Monde Laplace ha introdotto speculazioni sull'origine del Sistema Solare e della natura dell'Universo.

Il Sole si trova al centro del Sistema Solare e ruota sul proprio asse ogni venticinque giorni e mezzo e la sua superficie è ricoperta di 'oceani' di materia luminosa, macchiata da macchie scure. Attorno al Sole ruotano i sette pianeti in orbite quasi circolari. Tuttavia, Laplace non considerava le comete come parte del Sistema Solare poichè alcune viaggiavano

---

<sup>5)</sup> Colin Montgomery, Wayne Orchiston and Ian Whittingham: Michell, Laplace and the Origin of the black Hole Concept - Journal of Astronomical History and Heritage, 12(2), 90-96 (2009).

in orbite molto eccentriche e mentre si spostavano verso il Sole si spostavano anche ben oltre la sfera planetaria.

Nel descrivere il sistema solare Laplace, come abbiamo già descritto (1796, pag.305), fa un'altra congettura<sup>2)</sup>:

*L'attrazione gravitazionale di una stella di diametro 250 volte quella del Sole e paragonabile in densità alla Terra sarebbe così grande che nessuna luce potrebbe sfuggirle dalla superficie. I corpi più grandi dell'universo possono così essere invisibile a causa della loro grandezza.*

Laplace ha affermato questa possibilità in modo meramente qualitativo, quasi di passaggio, senza alcuna prova matematica, e si limitò a fornire quest'ultima quando richiesto da F.X. von Zach.<sup>6)</sup> Questo era successivamente pubblicato sulla rivista tedesca Allgemeine Geographische Ephemeriden nel 1799, che von Zach ha curato.<sup>7)</sup> Una traduzione in lingua inglese è data nell'Appendice A del libro di Hawking & Ellis<sup>7)</sup>

### La prova matematica di Laplace

La prova di Laplace dell'esistenza di corpi invisibili (o buchi neri) assumevano la forma di un saggio, che riassumiamo di seguito.

Per un moto non uniforme, la velocità  $v$  è:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Laplace indica con  $\vec{P}$  la forza per unità di massa. Quindi si ha:

$$\vec{P} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

La forza attrattiva tra un corpo  $M$  e una particella di luce a una distanza  $r$  è proporzionale a  $-\frac{M}{r^2}$

Il segno negativo si verifica perchè l'azione di  $M$  è opposta al moto della luce. Uguagliando  $P$  con  $M/r^2$  e integrando si ha:

$$\ddot{r} + \frac{M}{r^2} = 0$$

Moltiplichiamo ambo i membri per  $\dot{r}$

$$\dot{r}\ddot{r} + \frac{M}{r^2}\dot{r} = 0 \tag{1}$$

---

<sup>6)</sup> Franz Xaver barone von Zach: (Pest, 4 giugno 1754 - Parigi, 2 settembre 1832) - Astronomo ungherese noto per la riscoperta di Cerere e l'identificazione di altri asteroidi.

<sup>7)</sup> Pierre Simon Laplace: Beweis des Satzes, dass die anziehende Kraft bey einem Weltkörper so gross seyn könne, dass das Licht davon nicht ausströmen kann - Allgemeine Geographische Ephemeriden, Vol.4, Issue 1, pp. 1-6, (1799).

<sup>7)</sup> S.W. Hawking & G.F.R. Ellis: The large scale structure of space-time - Cambridge University Press, 1994.

che si può scrivere:

$$\frac{1}{2} (2\dot{r}\ddot{r}) + \frac{M}{r^2} \dot{r} = 0 \quad (2)$$

Ora:

$$(2\dot{r}\ddot{r}) = \frac{d}{dt} [(\dot{r})^2] \quad (3)$$

che sostituita nella (2) si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(\dot{r})^2] + \frac{M}{r^2} \dot{r} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} [(\dot{r})^2] + 2\frac{M}{r^2} \dot{r} = 0 \quad (5)$$

Integrando rispetto al tempo:

$$[(\dot{r})^2] + 2 \int \frac{M}{r^2} \dot{r} dt = 0 \quad (6)$$

Poichè  $\dot{r} dt = dr$ , sostituendo nell'ultima equazione si ha:

$$[(\dot{r})^2] + 2 \int \frac{M}{r^2} dr = 0 \quad (7)$$

ossia:

$$[(\dot{r})^2] = \frac{2M}{r} + 2C \quad (8)$$

che possiamo più chiaramente scrivere:

$$v^2 = \frac{2M}{r} + 2C \quad (9)$$

essendo  $v$  la velocità della particella di luce alla distanza  $r$ .

Per determinare la costante  $C$ , sia  $R$  il raggio del corpo attraente ed  $a$  la velocità della luce alla distanza  $R$ . Quindi sulla superficie del corpo attraente su ha:

$$a^2 = \frac{2M}{R} + 2C \quad (10)$$

da cui

$$2C = a^2 - \frac{2M}{R} \quad (11)$$

Ne segue che la (9) si scrive:

$$v^2 = a^2 - \frac{2M}{R} + \frac{2M}{r} \quad (12)$$

Sia  $R'$  il raggio di un altro corpo attraente con potenza attrattiva  $iM$  (non si confonda il numero  $i$  con l'unità immaginaria). La velocità della luce ad una distanza  $r$  sarà  $v'$ .

$$v'^2 = a^2 - \frac{2iM}{R'} + \frac{2iM}{r} \quad (13)$$

Poichè la distanza dalle stelle fisse è così grande, si può ritenere  $r$  infinitamente grande, ottenendo:

$$v'^2 = a^2 - \frac{2iM}{R'} \quad (14)$$

Sia il potere attrattivo del secondo corpo così grande che la luce non può sfuggirle; questo può essere espressa analiticamente imponendo la velocità  $v' = 0$  ad una distanza infinitamente grande. Ossia:

$$a^2 = \frac{2iM}{R'} \quad (15)$$

Per determinare  $a$ , sia il primo corpo attrattivo il Sole; allora  $a$  è la velocità della luce del Sole sulla superficie del Sole. La forza gravitazionale alla superficie del Sole è così piccola che il suo effetto sulla velocità della luce che lascia quella superficie può essere trascurata nel contesto di questa discussione.

Laplace utilizza la sua ipotesi fatta a pag.305 in Exposition du Système du Monde (Parte II), che  $R' = 250R$ . Poichè la massa cambia come il volume del corpo attrattore moltiplicato per la sua densità e quindi come cubo del raggio, allora, se la densità del Sole è 1 e quella del secondo corpo è  $\rho$ ,

$$M : iM = 1R^3 : \rho R'^3 = 1R^3 : \rho(250)^3 R^3 \quad (16)$$

Eguagliando il primo con il terzo membro si ottiene:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{(250)^3 \rho} \quad (17)$$

ossia:

$$i = (250)^3 \rho \quad (18)$$

Sostituendo questo valore di  $i$  ed il valore di  $R' = 250R$  nella equazione (15), si ha:

$$a^2 = \frac{2(250)^3 \rho M}{250R} \quad (19)$$

da cui:

$$\rho = \frac{a^2 R}{2(250)^2 M} \quad (20)$$

L'equazione (20) rappresenta la densità del corpo da cui la luce non può scappare. Essa risulta quasi uguale a quella della Terra.

### Albert Einstein: Deformazione dello spazio-tempo

Si deve all'immenso genio di Albert Einstein avere risolto il problema del buco nero e della attrazione, deflessione della luce, introducendo **la deformazione dello spazio dovuta alla presenza di grandi masse**. Questo grande problema prende il nome di Teoria della Relatività generale che verrà esposta in materie più specialistiche. La figura seguente rappresenta una celebre illustrazione divulgativa della curvatura dello spazio dovuta alla presenza di massa, rappresentata in

questo caso dalla Terra. (La fotografia si trova in tutti i libri di Relatività e in tutti i siti web che parlano dell'argomento).

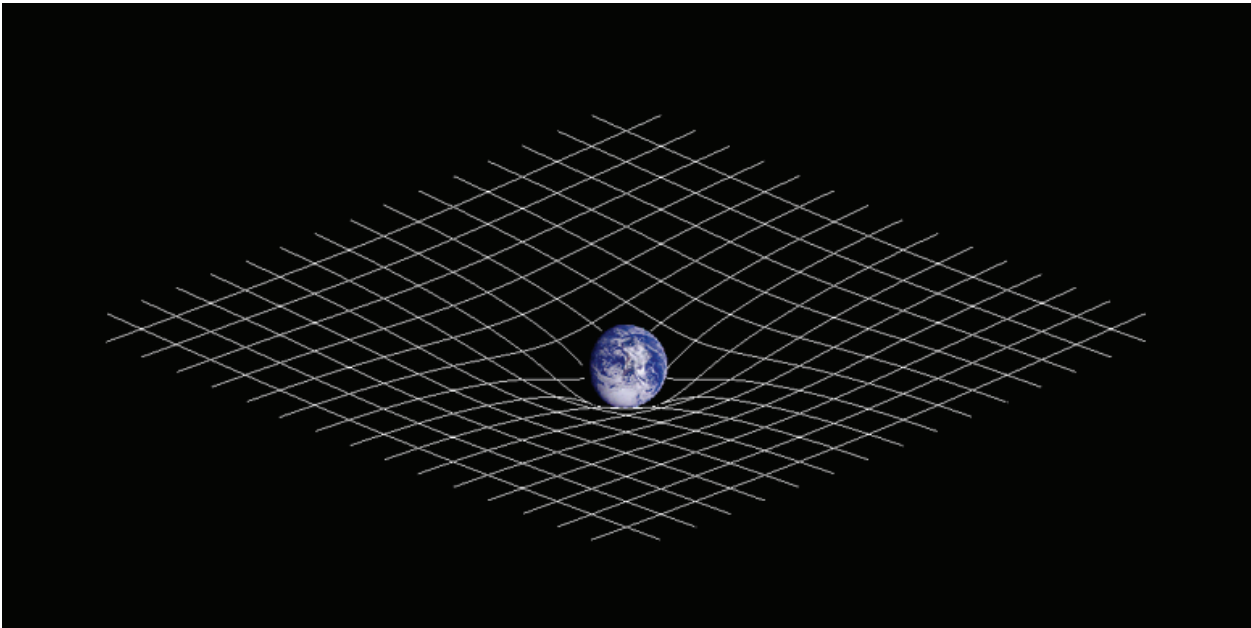


fig.3.4-1

### 3.5 - Moto rettilineo di una particella sottoposta ad una forza resistiva proporzionale alla velocità<sup>1)</sup>

La dipendenza della resistenza dell'aria o di un generico fluido sulla velocità dei corpi è molto complicata. Newton stesso si occupò di questo problema in modo geometrico-analitico, elegante, organico e completo.

Il secondo libro del *Philosophiae naturalis principia mathematica* di Isaac Newton<sup>2)</sup> è costituito da nove sezioni. **Nelle prime quattro vengono trattati i moti dei corpi in mezzi resistenti.**

**Sezione I:** Il moto dei corpi ai quali viene opposta resistenza in ragione della velocità, pag.403.

**Sezione II:** Il moto dei corpi ai quali viene opposta resistenza in ragione del quadrato della velocità, pag.415.

**Sezione III:** Il moto dei corpi ai quali viene opposta resistenza in parte in ragione della velocità, in parte in ragione del quadrato di essa, pag.449.

**Sezione IV:** Il moto circolare dei corpi in mezzi resistenti, pag.461.

---

<sup>1)</sup> Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman: La Fisica di Berkeley, Volume I, pag.232.

<sup>2)</sup> Classici della Scienza UTET - Principi Matematici della Filosofia Naturale, Vol. I a cura di Alberto Pala, 1989.



In questo paragrafo studiamo, in modo analitico, il caso di una forza resistiva direttamente proporzionale alla velocità (per esempio: la legge di Stokes); nel prossimo, il caso di una forza resistiva direttamente proporzionale al quadrato della velocità.

Questo tipo di forze prende il nome di "**forze viscosose**" che si verificano quando oggetti solidi si muovono attraverso fluidi. L'oggetto solido sposta gli strati del fluido mentre lo attraversa. Il moto relativo fra due strati del fluido fornisce una forza resistiva al moto dell'oggetto. La forza viscosa dipende da una proprietà del fluido chiamata **viscosità**. Maggiore è la viscosità del fluido, maggiore sarà la forza viscosa che verrà applicata a un oggetto che si muove attraverso di esso. In questo caso la seconda legge di Newton assume la forma seguente:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -bv = -b \frac{dx}{dt} \quad (3.5.1)$$

essendo  $b$  ( $kg \cdot s^{-1}$ ) una costante positiva che dipende dalla viscosità del fluido e da altre proprietà fisiche del fluido e dell'oggetto (per esempio dalla temperatura del fluido attraverso la viscosità e dalle dimensioni dell'oggetto).

Il segno meno indica che la forza tende a ridurre la velocità. Possiamo semplificare l'equazione ricordando che l'accelerazione  $\frac{d^2x}{dt^2}$  è eguale a  $\frac{dv}{dt}$ , così l'equazione (3.5.1) diventa:

$$m \frac{dv}{dt} = -bv \quad (3.5.2)$$

ossia:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt \quad (3.5.3)$$

Integrando:

$$\int \frac{dv}{v} = \log_e v = - \int \frac{b}{m} dt = -\frac{b}{m} t + costante \quad (3.5.4)$$

ossia:

$$v = Ae^{-\frac{b}{m}t} \quad (3.5.5)$$

**Supponiamo che sulla particella, oltre alla forza resistiva, agisca un forza costante  $F$  lungo la stessa traiettoria rettilinea. Allora l'equazione del moto diventa:**

$$m \frac{dv}{dt} + bv = F \quad (3.5.6)$$

che conviene scrivere:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = \frac{F}{m} \quad (3.5.7)$$

Come dalla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, l'integrale generale della (3.5.7) è la somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata  $\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = 0$  ossia della (3.5.2) e di una costante da determinare  $\lambda$ . Quindi:

$$v = Ae^{-\frac{b}{m}t} + \lambda \quad (3.5.8)$$

Per trovare  $\lambda$  sostituiamo la (3.5.8) nell'equazione completa (3.5.7); si ha:

$$A \left(-\frac{b}{m}\right) e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{b}{m} A e^{\frac{b}{m}t} + \frac{b}{m} \lambda = \frac{F}{m} \quad (3.5.9)$$

ossia:

$$\lambda = \frac{F}{b} \quad (3.5.10)$$

Quindi la soluzione generale della equazione (3.5.7) è:

$$v = A e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{F}{b} \quad (3.5.10)$$

La costante  $A$  si determina imponendo le condizioni iniziali, per esempio che per  $t = 0$  si assuma  $v = 0$ , ossia:

$$v_{(t=0)} = A + \frac{F}{b} = 0 \quad (3.5.11)$$

Ne segue:

$$A = -\frac{F}{b} \quad (3.5.12)$$

Pertanto la soluzione della equazione (3.5.7) con la relativa condizione che  $v = 0$  per  $t = 0$  è:

$$v = -\frac{F}{b} e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{F}{b} \quad (3.5.13)$$

Se  $F$  è la forza peso  $F = mg$ , la (3.5.13) si scrive:

$$v = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

**Condizione  
iniziale** (3.5.14)  
per  $t = 0, v = 0$

Posto:

$$\tau = \frac{m}{b}$$

**Costante di  
tempo** (3.5.15)

che prende il nome di **costante di tempo**, risulta che per  $t \gg \tau$ , essendo  $e^{-\frac{b}{m}t} \simeq 0$ , la velocità raggiunge il valore limite  $v_t$ :

$$v_t = \frac{mg}{b} = g\tau$$

**Velocità  
Terminale** (3.5.16)  
**Moto  
Laminare**

che prende il nome di **velocità terminale** e che coincide con l'imporre  $\frac{dv}{dt} = 0$  nella equazione (3.5.7), ossia il moto procede con velocità costante.

Se la condizione iniziale sulla velocità è diversa da quella espressa dalla (3.5.11) si deve avere:

$$A + \frac{F}{b} = v_0 \quad (3.5.17)$$

ossia:

$$A = v_0 - \frac{F}{b} \quad (3.5.18)$$

Pertanto la soluzione della equazione (3.5.7) con la relativa condizione iniziale che  $v = v_0$  per  $t = 0$  è:

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{F}{b} e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{F}{b} \quad (3.5.19)$$

Se  $F$  è la forza peso  $F = mg$ , la (3.5.19) si scrive:

$$v = \frac{mg}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) + v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

**Condizione iniziale** (3.5.20)  
per  $t = 0, v = v_0$

Si osservi che la velocità terminale rimane la stessa della (3.5.16).

**La velocità terminale dipende dalla massa ma non dalla velocità iniziale dell'oggetto; la velocità di ogni corpo in caduta libera si avvicina al valore limite. Oggetti più pesanti, in presenza di attrito, alla fine cadono più velocemente di quelli più leggeri, ma per un dato oggetto la velocità terminale è la stessa se inizialmente viene lanciato verso l'alto o verso il basso, o semplicemente lasciato cadere dalla posizione di riposo.**

Poichè vogliamo trovare l'equazione oraria del moto, integriamo la (3.5.19) rispetto al tempo. Si ha:

$$x = -v_0 \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{F}{b} \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{F}{b} t + B \quad (3.5.21)$$

essendo  $B$  una costante da determinare imponendo le condizioni iniziali su  $x$ ; per  $t = 0$   $x = x_0$ . Ossia:

$$x_0 = -v_0 \frac{m}{b} + \frac{F}{b} \frac{m}{b} + B \quad (3.5.22)$$

ossia:

$$B = x_0 + v_0 \frac{m}{b} - \frac{F}{b} \frac{m}{b} \quad (3.5.23)$$

In conclusione, la soluzione finale è:

$$x = x_0 + v_0 \frac{m}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) + \frac{F}{b} \frac{m}{b} \left( e^{-\frac{b}{m}t} - 1 \right) + \frac{F}{b} t \quad (3.5.24)$$

e, ancora:

$$x = x_0 + \frac{m}{b} \left( v_0 - \frac{F}{b} \right) \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) + \frac{F}{b}t \quad (3.5.25)$$

come a pagina 111 del libro <sup>3)</sup>

**Esempio 1 - Sfera in caduta verticale in un fluido: Moto laminare**

Una sfera di raggio  $r$  si muove con velocità  $v$  (non così elevata da generare vortici) in un fluido. La forza di attrito viscoso agente sulla sfera è data dalla legge di Stokes:

$$F_v = 6\pi\eta r v \quad \text{Legge di Stokes} \quad (3.5.26)$$

La grandezza  $\eta$  che compare nella legge di Stokes si chiama **coefficiente di viscosità**. Esso dipende dal tipo di fluido e dalla sua temperatura. Nel Sistema Internazionale si misura in  $(N/m^2) \cdot s$  ossia  $Pa \cdot s$ , ( $1Pa = 1N/m^2$ ), ( $Pa = Pascal$ ).

**Tabella<sup>4)</sup>**

Sostanza	Coefficiente di viscosità $\eta$ a 20 <sup>0</sup> C Pa·s
Ammoniaca	$9.2 \cdot 10^{-6}$
Metano	$10.2 \cdot 10^{-6}$
Aria	$17.1 \cdot 10^{-6}$
Acqua	$1.00 \cdot 10^{-3}$
Mercurio	$1.55 \cdot 10^{-3}$
Sangue a 37 <sup>0</sup> C	$4.00 \cdot 10^{-3}$
Olio d'oliva	$8.40 \cdot 10^{-2}$
Glicerina	1.5

Come esempio consideriamo una pallina di polistirolo espanso (densità:  $35 \text{ kg/m}^3$ ) di raggio  $r = 0.50 \text{ mm}$ . Calcolare, lasciata cadere la pallina con velocità iniziale nulla, la velocità limite di caduta di questa pallina in aria.<sup>4)</sup> Trascuriamo la spinta di Archimede (vedi capitolo 8 §8.12, pag.8-21).

La velocità limite o terminale è data dalla formula (3.5.16):

$$v_t = \frac{mg}{b} \quad (3.5.27)$$

<sup>3)</sup> R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider: Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems, Sixth Edition - Addison-Wesley, 2012.

<sup>4)</sup> Ugo Amaldi: L'Amaldi 2.0, La Fisica on line per le scuole superiori, Cap.11.

essendo  $m$  la massa della pallina e, applicando la legge di Stokes,  $b = 6\pi\eta r$

Si ha:

$$m = \rho_p \cdot V_p = \rho_p \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (3.5.28)$$

essendo  $\rho_p$  e  $V_p$  la densità del polistirolo e il volume della pallina rispettivamente.

Ne segue:

$$v_t = \frac{\rho_p \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \frac{\rho_p r^2 g}{\eta} = \frac{2}{9} \cdot \frac{35 \cdot (0.5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 9.81}{17.1 \cdot 10^{-6}} = \frac{2}{9} \cdot 5.02 = 1.11 \text{ m/s} \simeq 4 \text{ km/h} \quad (3.5.29)$$

Il tempo impiegato per raggiungere tale velocità si può stimare essere  $4 \div 5$  volte la costante di tempo  $\tau = \frac{m}{b}$  in quanto  $e^{-5} = 0.0067 \ll 1$ . Dalla (3.5.16) si ha:

$$\tau = \frac{v_t}{g} = \frac{1.11}{9.81} \simeq 0.11 \text{ s} \quad (3.5.30)$$

Quindi possiamo dire che il tempo impiegato per raggiungere tale velocità è:

$$t_t \simeq 5\tau \simeq 0.55 \text{ s} \quad (3.5.31)$$

Lo spazio percorso é:

$$x_t = -\tau^2 \cdot g + v_t \cdot t_t = -0.11^2 \cdot 9.81 + 1.11 \cdot 0.55 \simeq 0.49 \text{ m} = 49 \text{ cm} \quad (3.5.32)$$

Nei grafici (3.5.1) e (3.5.2) riportiamo, in rosso, l'andamento della velocità e del percorso in funzione del tempo, formule (3.5.20) e (3.5.25) rispettivamente. In blu sono riportate la velocità ed il percorso in assenza di aria ossia di forze resistive, formule (2.3.2) e (2.3.3), con  $a_0 = g$ , rispettivamente.

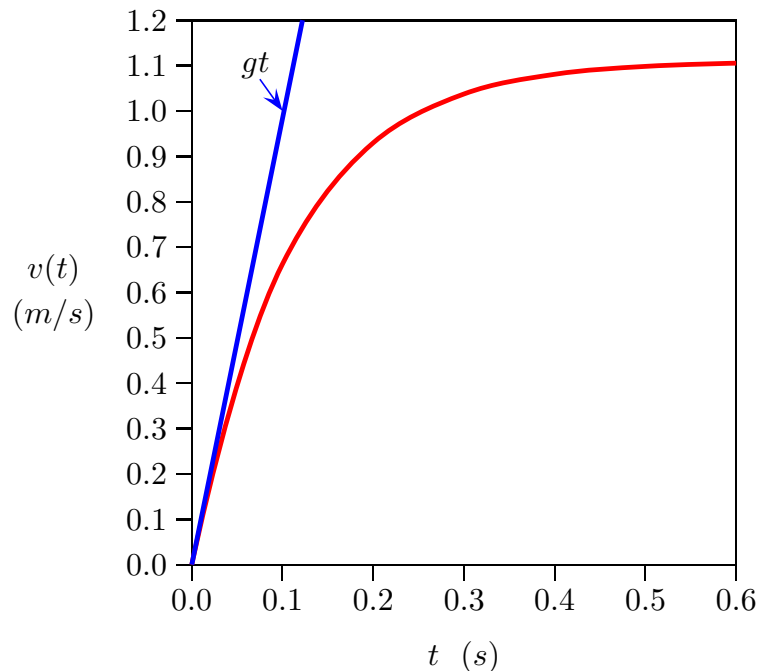


fig.3.5-1

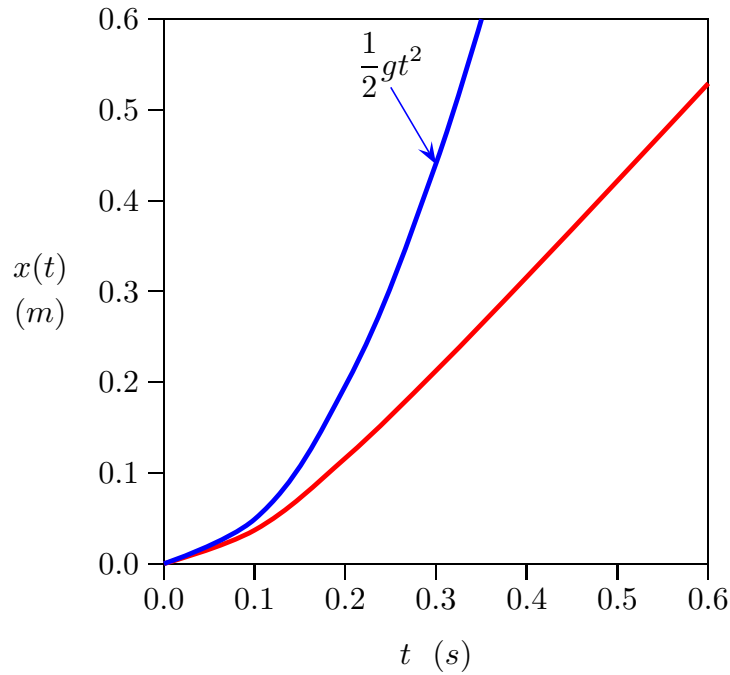


fig.3.5-2

**3.6 - Moto rettilineo di una particella sottoposta ad una forza resistiva proporzionale al quadrato della velocità e alla forza gravitazionale<sup>1)</sup>**

Consideriamo, ora, un esempio specifico. Supponiamo che un oggetto di massa  $m$  cada verticalmente sotto gravità. All'istante  $t = 0$  viene lasciato cadere da fermo e sia  $x = 0$  la quota di partenza. Ne consegue che  $x_0 = v_0 = 0$ . Supponiamo che, oltre alla forza di gravità,  $mg$ , dove  $g$  è l'accelerazione gravitazionale, il nostro oggetto sia sottoposto a una forza di resistenza dell'aria ritardante che è **proporzionale al quadrato della sua velocità istantanea**. L'equazione del moto dell'oggetto è quindi:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - cv^2, \tag{3.6.1}$$

essendo  $c > 0$  una costante che dipende dalla forma dell'oggetto e dalle proprietà del mezzo.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v^2, \tag{3.6.2}$$

$$\frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{c}{mg}v^2 \right), \tag{3.6.3}$$

Posto:

$$v_t = \left( \frac{mg}{c} \right)^{1/2}$$

**Velocità Terminale** (3.6.4)

---

<sup>1)</sup> Richard Fitzpatrick: Newtonian Dynamics, An Introduction, CRC Press, 2021, pag. 57.

ossia che per  $v = v_t$  risulti  $\frac{dv}{dt} = 0$ , l'equazione (3.6.3) si scrive:

$$\frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{v^2}{v_t^2} \right), \quad (3.6.5)$$

e, ancora:

$$\frac{dv}{\left( 1 - \frac{v^2}{v_t^2} \right)} = g dt, \quad (3.6.6)$$

Integrando:

$$\int_0^v \frac{dv'}{\left( 1 - \frac{v'^2}{v_t^2} \right)} = gt, \quad (3.6.7)$$

Effettuiamo un cambiamento di variabile; poniamo  $y = \frac{v'}{v_t}$ , ossia  $dv' = v_t dy$ . La equazione (3.6.7) si può scrivere:

$$\int_0^{v/v_t} \frac{dy}{(1 - y^2)} = \frac{g}{v_t} t. \quad (3.6.8)$$

L'integrale al primo membro è un integrale standard.<sup>2)</sup> L'equazione (3.6.8) diventa:

$$\tanh^{-1} \left( \frac{v}{v_t} \right) = \frac{gt}{v_t}, \quad (v < v_t) \quad (3.6.9)$$

ossia:

$$v = v_t \tanh \left( \frac{gt}{v_t} \right).$$

(3.6.10)

Così, quando  $t \ll v_t/g$ , otteniamo il risultato standard  $v \simeq gt$ , poichè  $\tanh x \simeq x$  per  $x \ll 1$ . Tuttavia, quando  $t \gg v_t/g$ , noi possiamo porre  $v \simeq v_t$ , poichè  $\tanh x \simeq 1$  per  $x \gg 1$ . Ne consegue che la resistenza dell'aria impedisce alla velocità verso il basso del nostro oggetto di aumentare indefinitamente mentre esso cade. Invece, in tempi grandi, la velocità si avvicina asintoticamente alla cosiddetta velocità terminale,  $v_t$  (alla quale le forze gravitazionali e di resistenza dell'aria si bilanciano).

---

<sup>2)</sup> Dwight Herbert Bristol: Tables of Integrals and other Mathematical Data - MacMillan Publishing Co., Inc., 1957, pag.35, n.140.1:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right|; \quad \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a}, \quad \text{per } x^2 < a^2.$$

L'equazione (3.6.1) del moto del nostro oggetto che cade si può anche scrivere nella seguente maniera:

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mg - cv^2 \quad (3.6.11)$$

ossia:

$$mv \frac{dv}{dx} = mg - cv^2 \quad (3.6.12)$$

$$v \frac{dv}{dx} = g - \frac{c}{m} v^2, \quad (3.6.13)$$

$$v \frac{dv}{dx} = g \left( 1 - \frac{c}{mg} v^2 \right), \quad (3.6.14)$$

$$v dv = g \left( 1 - \frac{v^2}{v_t^2} \right) dx, \quad (3.6.15)$$

$$\frac{v dv}{1 - \frac{v^2}{v_t^2}} = g dx, \quad (3.6.16)$$

Integrando:

$$\int_0^v \frac{v' dv'}{1 - \left( \frac{v'}{v_t} \right)^2} = gx, \quad (3.6.17)$$

Poniamo  $\left( \frac{v'}{v_t} \right)^2 = y$  ossia  $v'^2 = y v_t^2$ . Ne segue:

$$2v' dv' = v_t^2 dy \quad (3.6.18)$$

L'equazione (3.6.17) si scrive:

Poniamo  $\left( \frac{v'}{v_t} \right)^2 = y$  ossia  $v'^2 = y v_t^2$ . Ne segue:

$$\int_0^{(v/v_t)^2} \frac{dy}{1-y} = \frac{2}{v_t^2} gx, \quad (3.6.19)$$

Poichè, per la (3.6.4):

$$\frac{2}{v_t^2} gx = \frac{2c}{mg} gx = \frac{2c}{m} x, \quad (3.6.20)$$

si ha:

$$\int_0^{(v/v_t)^2} \frac{dy}{1-y} = \frac{2c}{m} x, \quad (3.6.21)$$

Il primo membro è un integrale standard: risulta, pertanto:

$$[-\ln(1-y)]_0^{(v/v_t)^2} = \frac{x}{x_t} \quad (3.6.22)$$



avendo posto:

$$x_t = \frac{m}{2c}. \quad (3.6.23)$$

Ne segue che la (3.6.22) diventa:

$$-\ln \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_t} \right)^2 \right] = \frac{x}{x_t} \quad (3.6.24)$$

ossia:

$$1 - \left( \frac{v}{v_t} \right)^2 = e^{-\frac{x}{x_t}} \quad (3.6.25)$$

In definitiva:

$$v = v_t \left( 1 - e^{-\frac{x}{x_t}} \right)^{1/2}. \quad (3.6.26)$$

Riportiamo, di seguito, i grafici delle formule (3.6.10) e (3.6.26):

**Velocità di caduta verticale di un oggetto in un campo gravitazionale e sottoposto ad una forza resistiva proporzionale al quadrato della velocità in funzione del tempo: equazione (3.6.10)**

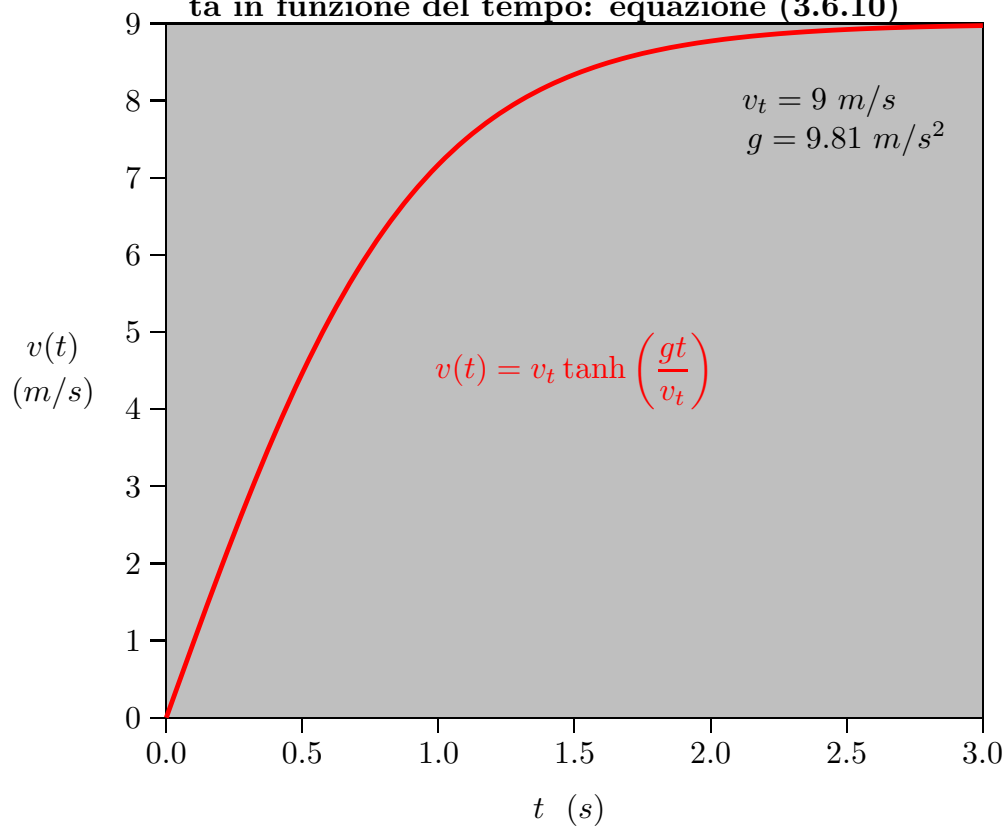
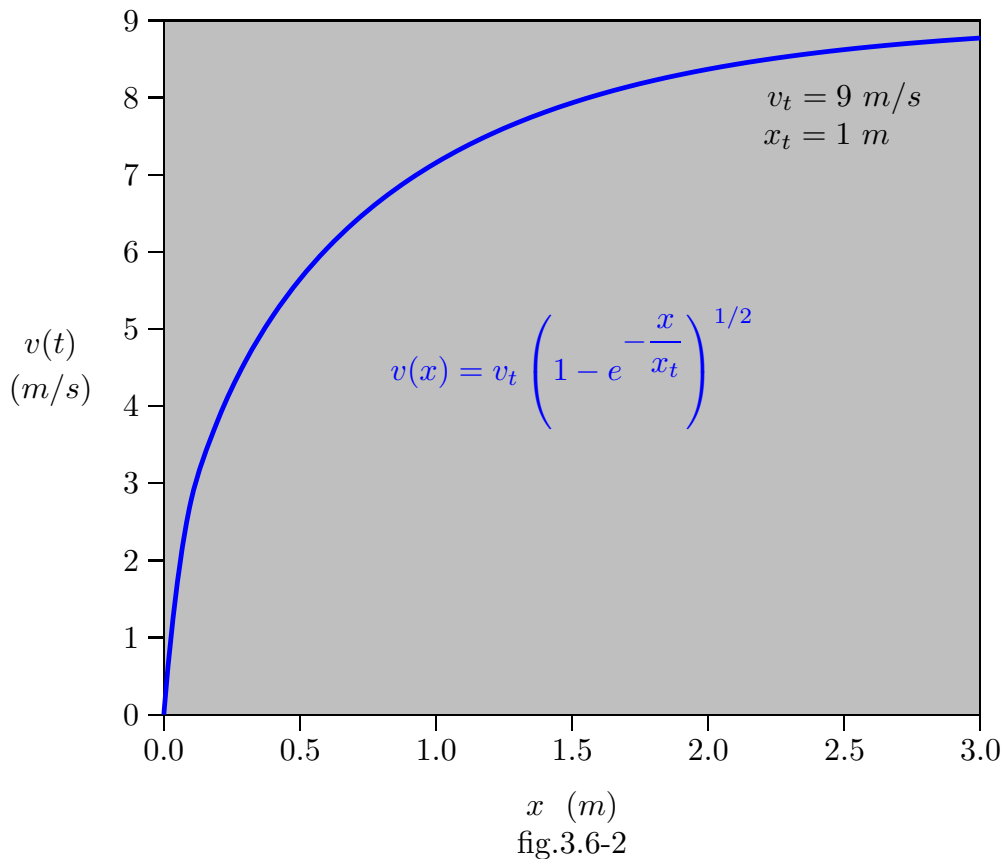


fig.3.6-1

**Velocità di caduta verticale di un oggetto in un campo gravitazionale e sottoposto ad una forza resistiva proporzionale al quadrato della velocità in funzione della distanza: equazione (3.6.26)**



**Programma in ambiente MATLAB - figura 3.6-1  
FALLING.m**

```

01 - delete(get(0,'children'));
02 - clear all
03 - t=0:0.1:+3;
04 - vt=9;
05 - g=9.81;
06 - v=vt.*tanh(g./vt.*t);
07 - plot(t,v,'r')
08 - grid on
09 - %%%Istruzioni per copiare i dati in formato TEX %%%
10 - B=[t;v];
11 - fid=fopen('pippo.tex','w');
12 - fprintf(fid,'falling\n');
13 - fprintf(fid,'%5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f\n',B);
14 - fclose(fid);

```

**Programma in ambiente MATLAB - figura 3.6-2**

### FALLING1.m

```

01 - delete(get(0,'children'));
02 - clear all;
03 - x=0:0.1:+3;
04 - vt=9;
05 - xt=1;
06 - v=vt.*(1-exp(-x./xt)).^0.5;
07 - plot(x,v,'b')
08 - grid on
09 - %%%Istruzioni per copiare i dati in formato TEX %%%
10 - B=[x;v];
11 - fid=fopen('pippo.tex','w');
12 - fprintf(fid,'falling1\n');
13 - fprintf(fid,'%5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f\n',B);
14 - fclose(fid);

```

Ne consegue, dalla figura (3.6-2), che il nostro oggetto deve cadere per una distanza dell'ordine di  $x_t$  prima di raggiungere la suo velocità terminale.

#### **Esempio 1: Moto di caduta di una goccia di pioggia in aria (moto turbolento o vorticoso)**

In questo esercizio vogliamo modellare il movimento di una goccia d'acqua, considerata come una sfera, che cade da una nuvola. Supponiamo che la goccia lascia la nuvola nella posizione  $x = 0$ , all'istante  $t = 0$  e con velocità iniziale nulla. Trascuriamo la spinta di Archimede (vedi capitolo 8, §8.12, pag.8-21).

Fra le esperienze quotidiane di caduta di un grave troviamo quella della pioggia. Se la caduta di una singola goccia avvenisse in assenza di attrito con un'accelerazione costante di  $9.81 \text{ m/s}^2$ , la goccia cadendo da un'altezza di  $500 \text{ m}$  con velocità iniziale nulla raggiungerebbe il suolo con una velocità, formula (2.6.7):

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 500} = \sqrt{9810} \simeq 99 \text{ m/s} \quad (3.6.27)$$

ossia di circa ( $356.4 \text{ km/h}$ ). Oltre alla nostra esperienza intuitiva che ci porta a pensare che la goccia cada con una bassa velocità, esistono dati sperimentali che mostrano come le gocce di pioggia arrivino al suolo con una velocità molto più ridotta che varia fra  $2 \text{ m/s}$  e  $9 \text{ m/s}$  a seconda delle sue dimensioni. È evidente che il moto della goccia di pioggia non rientra nel modello di caduta libera.

La velocità di caduta delle gocce di pioggia dipende ovviamente dalle dimensioni e dalla forma delle gocce stesse. Le gocce piccole (diametro inferiore a 300-400 millesimi di millimetro) hanno in genere forma sferica. Le gocce più grandi invece, per effetto della resistenza dell'aria, nella caduta assumono una forma schiacciata quasi ellissoidale, come una ciambella. Senza l'attrito con l'aria, la velocità è intorno a 100-300 km/ora.

Mediante le gocce di pioggia cadono da circa un migliaio di metri di altezza e siccome nella caduta, per effetto della gravità, dovrebbero aumentare la propria velocità di 9.8 metri al secondo (accelerazione di gravità), questo significa che dopo 1000 metri

di caduta dovrebbe giungere al suolo con una velocità di 100 metri al secondo (360 km all'ora!), roba da provocare danni e feriti. Per fortuna non è così!

Infatti, sempre per effetto dell'attrito con l'aria, dopo un breve tragitto in accelerazione, le gocce tendono ad assumere una velocità limite costante, perchè si fanno equilibrio la forza peso, diretta verso il basso e la forza di attrito che si oppone al moto e quindi diretta verso l'alto.

Quando il diametro della goccia supera i 5 mm, questa diviene instabile e tende a spezzarsi in gocce più piccole.

La tabella seguente fornisce alcuni valori sperimentali della velocità di arrivo al suolo della goccia di pioggia in funzione del suo diametro  $d$ :

**nebbia:**  $d = 10$  micron (1 micron = 1 millesimo di millimetro),  $v_t = 25$  cm/sec;

**nebbia piovigginosa:**  $d = 200$  micron,  $v_t = 75$  cm/sec;

**pioggia debole:**  $d = 450$  micron,  $v_t = 2$  m/sec;

**pioggia moderata:**  $d = 1$  mm;  $v_t = 4$  m/sec;

**pioggia forte:**  $d = 1.5$  mm;  $v_t = 5$  m/sec;

**acquazzone:**  $d = 2$  mm;  $v_t = 6$  m/sec;

**nubifragio:**  $d = 3$  mm;  $v_t = 8$  m/sec;

**chicco di grandine:**  $d = 1$  cm;  $v_t = 50$  m/sec = 180 km/ora

Proviamo a vedere se rientra nel modello del moto laminare ossia con una forza resistiva proporzionale alla velocità. Appliciamo la formula (3.5.29) con al posto della densità  $\rho_p$  mettiamo quella della goccia d'acqua  $\rho_{goccia}$ :

$$v_t = \frac{F}{b} = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho_{goccia}r^3g}{6\pi\eta r} = \frac{2\rho_{goccia}r^2g}{9\eta} \quad (3.6.28)$$

ossia:

$$v_t = \frac{2 \cdot 997 \cdot 9.81 \cdot r^2}{9 \cdot 1.71 \cdot 10^{-5}} = 1.27 \cdot 10^8 r^2 = 1.27 \cdot 10^8 \cdot \frac{d^2}{4} = 3.177 \cdot 10^7 d^2 \quad (3.6.29)$$

essendo  $\rho_{goccia} = \rho_{acqua} = 998 \text{ kg/m}^3$  e  $d$  il diametro della goccia.

Neppure il modello del moto laminare fornisce risultati realistici: infatti una goccia di raggio 1.5 mm raggiungerebbe una velocità limite di 288 m/s, calcolata mediante l'espressione ricavata sopra.

Proviamo una dipendenza quadratica dalla velocità della forza resistiva:  $F_{attrito} = cv^2$  e il moto si dice turbolento o vorticoso.

**In questo caso la forza di attrito viscoso del mezzo è:**

$$F_{attrito} = -\frac{1}{2}C\rho_{aria}Av^2. \quad (3.6.30)$$

dove  $A$  è l'area della sezione trasversale dell'oggetto,  $C$  è un coefficiente aerodinamico (adimensionato) che vale 0.5 per un oggetto sferico e può raggiungere anche 2 per oggetti

della forma irregolare e  $\rho_{aria}$  vale  $1.29 \text{ kg/m}^3$  è la densità dell'aria. Il coefficiente  $C$  è determinato da evidenze sperimentali.

Quindi la formula (3.6.4) per la velocità terminale si scrive:

$$v_t = \left( \frac{mg}{\frac{1}{2}C\rho_{aria}A} \right)^{1/2} \quad \text{Velocità Terminale (3.6.31)}$$

La legge di Newton quindi diventa  $ma = mg - \frac{1}{2}C\rho_{aria}Av^2$ , essendo  $m$  la massa della goccia  $m = V\rho_{goccia} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{goccia}$  dove  $V$  è il volume ed  $r$  è il raggio della goccia e  $A = \pi r^2$ . Ne segue che l'accelerazione a cui è sottoposta la goccia è:

$$a = g - \frac{3}{8} \frac{C}{r} \frac{\rho_{aria}}{\rho_{goccia}} v^2 \quad (3.6.32)$$

ossia un termine costante ed uno dipendente dal quadrato della velocità. La velocità limite si ricava dalla (3.6.31) ossia ponendo  $a = 0$  e si ottiene:

$$v_t = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{r}{C} \frac{\rho_{goccia}}{\rho_{aria}} g}. \quad (3.6.33)$$

Con i valori usuali ( $C = 0.5$  e  $\rho_{aria} = 1.29 \text{ kg/m}^3$ ) si ha (nelle unità SI)

$$v_t \simeq 200\sqrt{r} \quad (3.6.34)$$

Per una goccia di raggio  $1.5 \text{ mm}$  la velocità limite assume il valore più realistico di  $7.8 \text{ m/s}$ .

Nella caduta di un oggetto in un mezzo viscoso abbiamo esaminato due casi: nel primo la forza resistiva è proporzionale alla velocità (moto laminare, legge di Stokes), nel secondo al quadrato della velocità (moto vorticoso). Per quanto riguarda le gocce di pioggia occorre notare che già una gocciolina di nebbia ( $r = 0,05/\text{mm}$  con una velocità limite di circa  $0.25 \text{ m/s}$ ) è ai limiti del modello di moto laminare. In generale aumentando la velocità relativa fra un oggetto che cade ed il fluido in cui avviene il moto, si vengono a formare dei vortici che sottraggono energia cinetica all'oggetto aumentando di fatto la forza resistiva: in questo secondo modello rientra il caso delle grosse gocce di pioggia ( $r = 1,5\text{mm}$  con una velocità limite di circa  $8 \text{ m/s}$ ). Esistono dei dati sperimentali<sup>1)</sup> sulla velocità limite raggiunta da una goccia d'acqua che cade in aria in funzione del diametro della goccia: **nella figura (3.6-3) sono confrontati questi dati con i due modelli proposti.**

<sup>1)</sup> Ross Gunn and Gilbert D. Kinzer: The Terminal Velocity of Fall for Water Droplets in Stagnant Air - Journal of Meteorology, Vol.6, August 1949, pag.243-248.

Velocità terminale di caduta verticale di una goccia di pioggia di forma sferica in un campo gravitazionale, sottoposta a forze resistive, in funzione del diametro

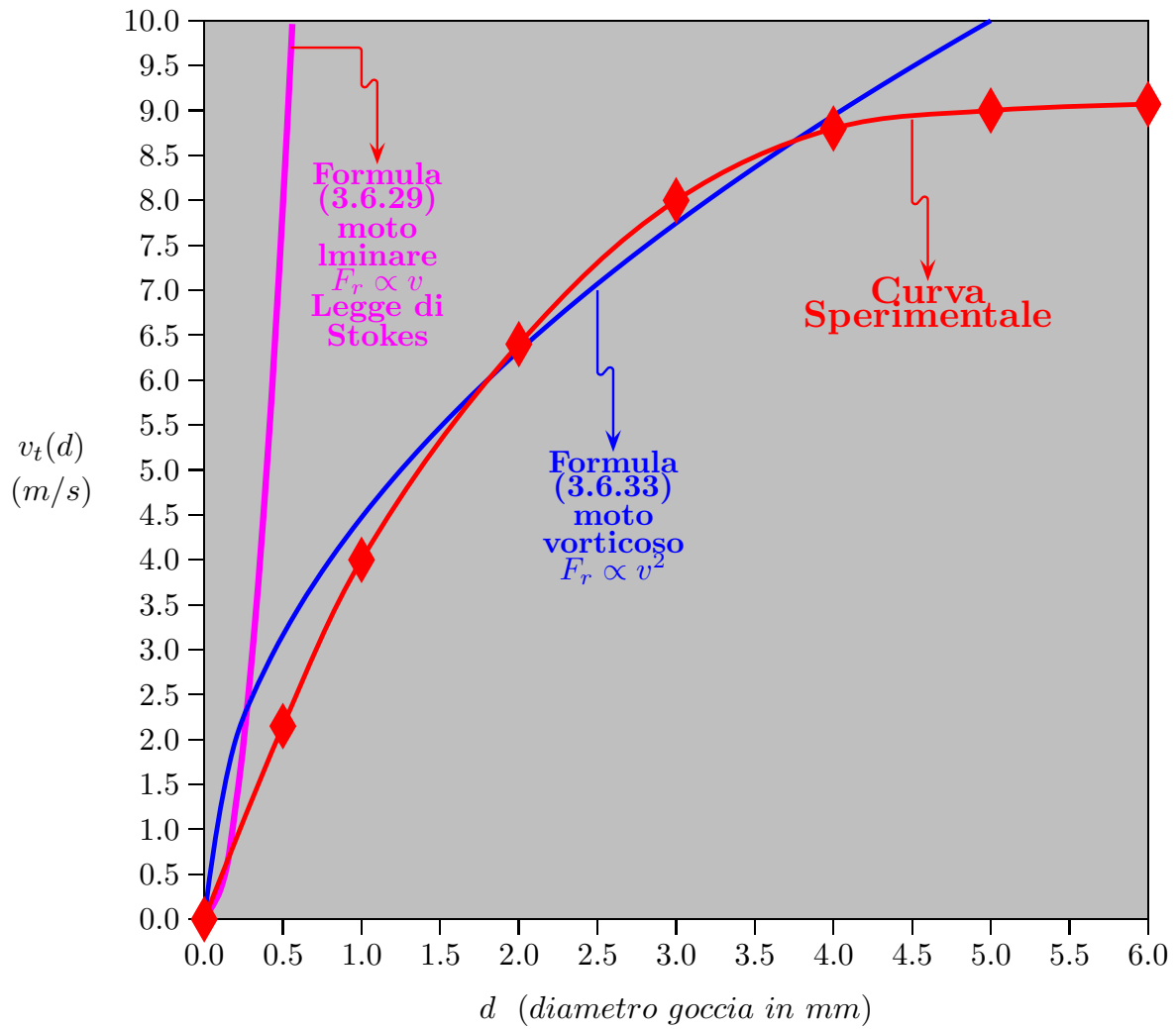


fig.3.6-3

**Esempio 2: Moto e velocità di un paracadutista<sup>1)</sup>**

Un paracadutista si lancia da una certa altezza con velocità nulla. Dopo un certo intervallo di tempo si apre il paracadute che incontra la resistenza dell'aria **con una forza resistiva proporzionale al quadrato della sua velocità**. Si vuole calcolare a quale velocità il paracadutista tocca il suolo.

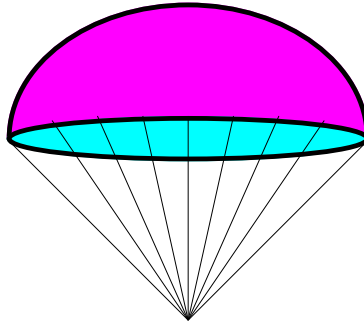


fig.3.6-4

Osserviamo che l'impatto dell'atterraggio, che generalmente si verifica alla velocità terminale per l'ultima fase del salto, si dice spesso che sia paragonabile a un salto da un muro di cinque piedi ( $\simeq 1.5\text{ m}$ ):

$$v_t = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 1.5} \simeq \underline{\underline{5.42\text{ m/s}}} \quad (3.6.35)$$

Consideriamo la formula (3.6.31) che riportiamo:

$$v_t = \left( \frac{2mg}{C\rho_{aria}A} \right)^{1/2} \quad (3.6.36)$$

essendo:

$$A = \pi r^2, \quad \rho_{aria} = 1.28\text{ kg/m}^3, \quad C = 1.2 \quad (3.6.37)$$

Vogliamo calcolare il raggio di un paracadute affinché la sua velocità terminale sia  $v_t = 5.42\text{ m/s}$ , se è insieme al paracadutista possiede una massa  $m = 70\text{ kg}$

Dalla formula (3.6.3), ricaviamo l'area  $A$  ed il raggio  $r$ :

$$A = \frac{2mg}{C\rho_{aria}v_t^2} \quad \text{da cui} \quad r = \sqrt{\frac{2mg}{\pi C\rho_{aria}v_t^2}} \quad (3.6.38)$$

ossia:

$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot 9.81}{\pi \cdot 1.2 \cdot 1.28 \cdot (5.42)^2}} \simeq \underline{\underline{3.11\text{ m}}}.$$

---

<sup>1)</sup> Douglas B. Meade, Allan A. Struthers: Differential Equations in the New Millennium: The Parachute Problem - Int. J. Engng Ed. Vol. 15 No. 6, pp. 417-424, 1999.

### 3.7 - Momento di una forza e Momento della quantità di moto (o momento angolare)<sup>1)</sup>

Consideriamo una origine  $O$  ed un punto  $P$  il cui vettore posizione è  $\vec{r}$  rispetto ad  $O$ . Si definisce **Momento di una forza il prodotto vettoriale**:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.7.1)$$

che per la (3.2.1) e la (3.2.5) si può scrivere:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{m} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.7.2)$$

Consideriamo, ora, la quantità  $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$ . Essa è una quantità nulla in quanto prodotto vettoriale fra due vettori paralleli  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  e  $\vec{p}$ . Possiamo quindi aggiungere questa quantità al secondo termine della (3.7.2). Ne segue:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \quad (3.7.3)$$

Definiamo **Momento angolare o Momento della quantità di moto il vettore  $\vec{L}$  definito da**:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (3.7.4)$$

Ne segue che la (3.7.3) si può scrivere:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (3.7.5)$$

ossia: **Il Momento di una forza è eguale alla derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto.**

**In assenza di forze esterne risulta  $\vec{L} = \text{costante}$ , che rappresenta il teorema di conservazione del momento angolare.**

### 3.8 - Baricentro di un sistema discreto di punti materiali<sup>1)</sup>

Dato un sistema  $S$  costituito da un numero finito qualsiasi di punti materiali  $P_i$  di masse  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots$ ), si consideri per ognuno di essi il rispettivo peso  $m_i \vec{g}$ . Questi pesi

<sup>1)</sup> Nearing James: Mechanics, 2008, pag.41.

<sup>1)</sup> Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi: Compendio di Meccanica Razionale, Parte Prima, 1938, pag.276.



sono rappresentati da altrettanti vettori paralleli e di egual verso. Denotando con  $O$  un qualsiasi punto (geometrico) di riferimento e con  $m = \sum_i m_i$  la massa totale del sistema, **il baricentro o centro di gravità**  $G$  è individuato dalla seguente equazione vettoriale:

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}} \quad (3.8.1)$$

Esso dipende esclusivamente dalla configurazione del sistema e dalle masse dei suoi singoli punti, onde si dice anche **centro di massa del sistema**. Si può anzi osservare che  $G$  dipende soltanto dai rapporti delle masse; e infatti, se le masse dei punti del sistema si fanno variare tutte in un medesimo rapporto, il secondo membro della (3.8.1) non cambia.

Rispetto ad un generico sistema di coordinate con l'origine in  $O$ , si ha:

$$x_G = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_G = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_G = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}, \quad (3.8.2)$$

se  $x_i, y_i, z_i$  designano le coordinate dei punti  $P_i$  del sistema e  $x_G, y_G, z_G$  quelle del baricentro  $G$ .

Se tutti i punti massa appartengono ad un medesimo piano o ad una medesima retta, lo stesso avviene del loro centro di gravità.

### 3.9 - Momenti di Inerzia<sup>2)</sup>

Siano  $P$  un punto materiale di massa  $m$ ,  $r$  una retta generica,  $\delta$  la distanza di  $P$  da  $r$ .

**Per Momento di Inerzia di  $P$  (o, come si suol dire, della sua massa  $m$ ) rispetto all'asse  $r$ , si intende il prodotto  $m\delta^2$  della massa di  $P$  per il quadrato della sua distanza dall'asse.**

Più generalmente, se è dato un sistema  $S$ , costituito da un numero (finito) qualsiasi di punti materiali  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Si chiamerà momento di inerzia del sistema rispetto all'asse  $r$ , la somma dei momenti di inerzia dei singoli suoi punti.

Indicando con  $\mathcal{I}$  tale momento di inerzia, con  $m_i$  la massa del punto generico  $P_i$  del sistema, con  $\delta_i$  la sua distanza da  $r$ , avremo per definizione:

$$\mathcal{I} = \sum_i m_i \delta_i^2, \quad (3.9.1)$$

dove la somma va manifestamente estesa a tutti i punti del sistema.

Designata al solito con  $m$  la massa totale  $\sum_i m_i$  del sistema e posto:

$$\mathcal{I} = m\delta^2, \quad (3.9.2)$$

il numero (positivo)  $\delta$  così definito, cioè

$$\delta = \sqrt{\frac{\mathcal{I}}{m}}, \quad (3.9.3)$$

---

<sup>2)</sup> Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi: Compendio di Meccanica Razionale, Parte Prima, 1938, pag.285.

viene detto *giratore o raggio di girazione di S rispetto alla retta r*.

### 3.10 - Dinamica del punto e sistemi di punti in rotazione<sup>3)</sup>

Il più semplice moto rotatorio di un punto è quello in cui il punto è costretto a ruotare attorno ad un asse fisso. Scegliamo l'asse  $z$  di un appropriato sistema di coordinate come asse di rotazione. La traiettoria di una particella  $m_i$  situata nel punto  $(x_i, y_i, z_i)$  è allora una circonferenza di raggio  $r_i = \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}$  centrata sull'asse  $z$ .

La velocità  $v_i$  della particella  $i$  è data dalla (2.4.7):

$$v_i = r_i \omega = \left[ \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right] \omega \quad (3.10.1)$$

essendo  $\omega$  la velocità angolare di rotazione. Dalla (2.4.5) o dalla (2.4.9) si deduce che le componenti della velocità della particella sono:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -v_i \sin \phi_i = -\omega y_i \\ \dot{y}_i = v_i \cos \phi_i = \omega x_i \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad (3.10.2)$$

dove  $\phi_i$  è l'angolo formato fra l'asse  $x$  ed il raggio che unisce la particella all'origine del sistema di riferimento.

Consideriamo, al solito, un sistema di particelle puntiformi. **Calcoliamo l'energia cinetica di rotazione del sistema:**

$$T_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_z \omega^2 \quad (3.10.3)$$

essendo  $\mathcal{I}_z$  il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse  $z$ .

Consideriamo, ora, il momento angolare di una singola particella ruotante intorno all'asse  $z$ ; dalla (3.7.4) si ha:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) \times m_i (\dot{x}_i \hat{x} + \dot{y}_i \hat{y}) \quad (3.10.4)$$

ossia:

$$\vec{L}_i = m_i \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_i & y_i & 0 \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & 0 \end{vmatrix} = m_i \hat{z} (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) \quad (3.10.5)$$

---

<sup>3)</sup> Grant R. Fowles and George L. Cassiday: Analytical Mechanics seventh Edition, pag.328.

Il momento angolare è, quindi diretto lungo l'asse  $z$ . Tenendo conto delle (3.10.2), si può scrivere:

$$L_{zi} = m_i(x_i^2 + y_i^2)\omega = m_i r_i^2 \omega \quad (3.10.6)$$

**La componente lungo l'asse  $z$  del momento angolare di tutto il sistema di particelle è, quindi:**

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \mathcal{I}_z \omega \quad (3.10.7)$$

Per la (3.10.5) il momento delle forze esterne diretto lungo l'asse  $z$  di rotazione risulta:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathcal{I}_z \omega) \quad (3.10.8)$$

Se  $\mathcal{I}_z$  è costante (per esempio per un corpo rigido), si ha:

$$M_z = \mathcal{I}_z \frac{d\omega}{dt} \quad (3.10.9)$$

essendo  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$  l'accelerazione angolare del sistema e si misura in  $rad/s^2$ .

L'analogia fra le equazioni riguardanti i moti traslatori e quelle riguardanti i moti rotatori attorno ad un asse fisso è mostrata nella seguente tabella:

<b>Traslazione lungo l'asse <math>x</math></b>	<b>Rotazione attorno all'asse <math>z</math></b>
Quantità di moto $p_x = mv_x$	Momento angolare $L_z = \mathcal{I}_z \omega$
Forza $F_x = m\dot{v}_x$	Momento della forza $M_z = \mathcal{I}_z \dot{\omega}$
Energia cinetica $T = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinetica $T_{rot} = \frac{1}{2}\mathcal{I}_z \omega^2$

**Così il momento di inerzia è l'analogo della massa; esso è una misura dell'inerzia rotazionale di un corpo relativa a qualche asse di rotazione fisso, così come la massa è una misura dell'inerzia traslazionale di un corpo.**

### 3.11 - Calcolo del momento di inerzia di corpi estesi<sup>4)</sup>

Per calcolare il momento di inerzia  $\sum_i m_i r_i^2$  per corpi estesi, noi possiamo sostituire la somma con un integrale sull'estensione del corpo. Così per qualunque asse possiamo scrivere:

$$\mathcal{I} = \int r^2 dm \quad (3.11.1)$$

dove l'elemento di massa  $dm$  è dato dal prodotto della densità del materiale per l'elemento di volume  $d^3r'$  oppure di superficie  $d^2r'$  o di lunghezza  $dr'$  ed  $r$  è la distanza perpendicolare dall'elemento di massa all'asse di rotazione.

---

<sup>4)</sup> Grant R. Fowles and George L. Cassiday: Analytical Mechanics seventh Edition, pag.330.

nel caso di corpo composto, dalla definizione del momento di inerzia possiamo scrivere:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \dots \quad (3.11.2)$$

dove  $\mathcal{I}_i$  sono i momenti di inerzia delle varie parti attorno al particolare asse scelto.

Calcoliamo ora i momenti di inerzia per alcuni importanti casi speciali.

**Esempio 1: Momento di inerzia di una Asta sottile**

Per un'asta uniforme, sottile di lunghezza  $a$ , densità lineare  $\lambda$  e massa  $m = \lambda a$  e  $dm = \lambda dx$ , noi abbiamo, per un asse perpendicolare alla barra ad un estremo (fig.3.11-1a):

$$\mathcal{I}_z = \int_0^a x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} \lambda a^3 = \frac{1}{3} m a^2 \quad (3.11.3)$$

Se l'asse è preso al centro della barra (fig.3.11-1b), noi abbiamo:

$$\mathcal{I}_z = \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} \lambda [x^3]_{-a/2}^{+a/2} = \frac{1}{3} \lambda \left( \frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8} \right) = \frac{1}{12} \lambda a^3 = \frac{1}{12} m a^2 \quad (3.11.4)$$

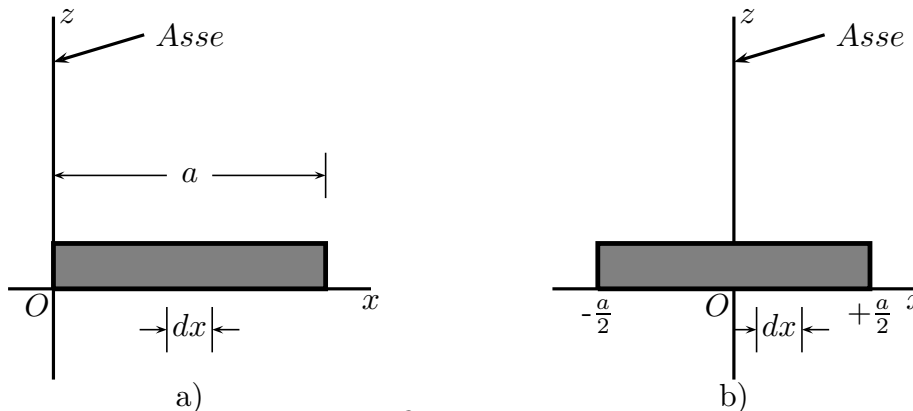


fig.3.11-1

**Esempio 2: Momento di inerzia di un Anello o di un Guscio cilindrico**

Nel caso di un sottile anello circolare o di un guscio cilindrico, tutte le particelle hanno la stessa distanza dall'asse di simmetria o asse centrale che è di rotazione. Pertanto:

$$\mathcal{I}_{asse} = m a^2 \quad (3.11.5)$$

essendo  $m$  la massa dell'anello o del guscio cilindrico e  $a$  il loro raggio.

**Esempio 3: Momento di inerzia di un Disco circolare o di un Cilindro pieno**

Per calcolare il momento di inerzia di un disco circolare uniforme di raggio  $a$  e di massa

$m$ , utilizzeremo coordinate polari. Sia  $\sigma$  la densità superficiale di massa ossia  $\sigma = \frac{dm}{d^2r}$ .

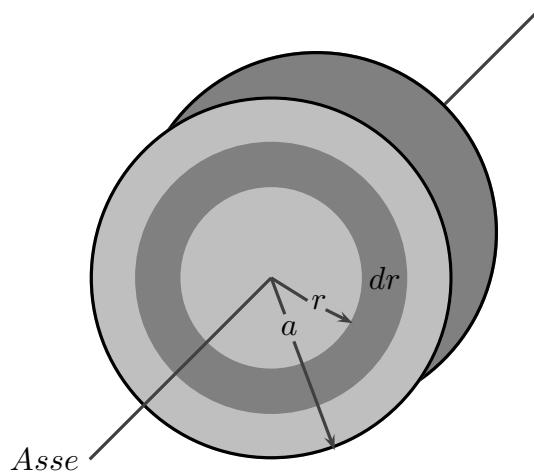


fig.3.11-2

Consideriamo un anello sottile di raggio  $r$  e spessore  $dr$  (vedi figura 3.11-2). La massa di tale elemento è:

$$dm = \sigma 2\pi r dr \quad (3.11.6)$$

essendo  $2\pi r dr$  l'area della superficie dell'anello.

Il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il centro del disco e normale alla superficie del disco stesso, si ottiene nel seguente modo:

$$\mathcal{I}_{asse} = \int_0^a r^2 \sigma 2\pi r dr = 2\pi \sigma \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} m a^2 \quad (3.11.7)$$

essendo  $m = \sigma \pi a^2$  la massa totale del disco.

L'equazione (3.11.7) si applica anche ad un cilindro circolare retto uniforme di raggio  $a$  e massa  $m$ , l'asse essendo l'asse centrale del cilindro.

#### Esempio 4: Momento di inerzia di una sfera

Troviamo il momento di inerzia di una sfera solida uniforme di raggio  $a$  e massa  $m$  attorno ad un asse (l'asse  $z$ ) passante per il centro. Dividiamo la sfera in sottili dischi circolari come mostrato in figura (3.11.3). Il momento di inerzia di uno di questi dischi di raggio  $y$ , dall'equazione (3.11.7) risulta  $\frac{1}{2} y^2 dm$ . Ma  $dm = \rho \pi y^2 dz$ , essendo  $\rho$  la densità volumica di massa ( $Kg/m^3$ ). Quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_z &= \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} \pi \rho y^4 dz = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} \pi \rho (a^2 - z^2)^2 dz = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} \pi \rho a^4 dz - \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} \pi \rho (2a^2 z^2) dz + \\ &+ \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} \pi \rho z^4 dz = \pi \rho a^5 - \frac{2}{3} \pi \rho a^5 + \frac{1}{2} \pi \rho \frac{1}{5} 2a^5 = \frac{6}{5} \pi \rho a^5 - \frac{2}{3} \pi \rho a^5 = \frac{8}{15} \pi \rho a^5 \end{aligned} \quad (3.11.8)$$

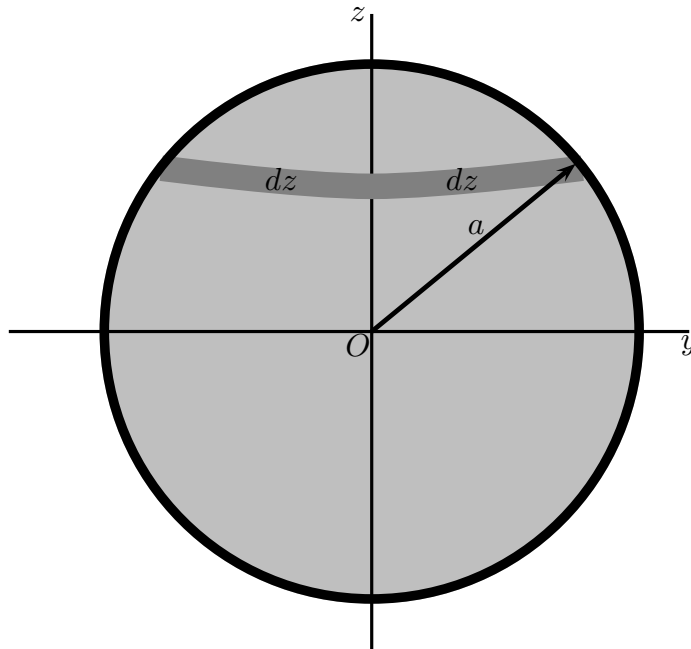


fig.3.11-3

Essendo  $m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$  risulta  $\rho = \frac{3}{4} \frac{m}{\pi a^3}$  e, quindi:

$$\boxed{\mathcal{I}_z = \frac{2}{5} m a^2} \quad (3.11.9)$$

Chiaramente risulta  $\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y$ .

### 3.12 - Pendolo (o Ruota) di Maxwell<sup>1)</sup> - (Yo-Yo)

Il dispositivo chiamato impropriamente pendolo di Maxwell fornisce un ottimo esempio del principio di conservazione della energia meccanica.

Il pendolo è costituito da un volano di acciaio sul cui asse sono avvolti due fili nello stesso verso e le cui estremità sono collegate ad un sostegno orizzontale come in figura

---

<sup>1)</sup> Classical Mechanics: MIT 8.01 Course Notes, Cap. 21, pag.497.

(3.12-1). Facendo avvolgere i fili attorno all'asse il volano si alza fino ad una certa altezza.

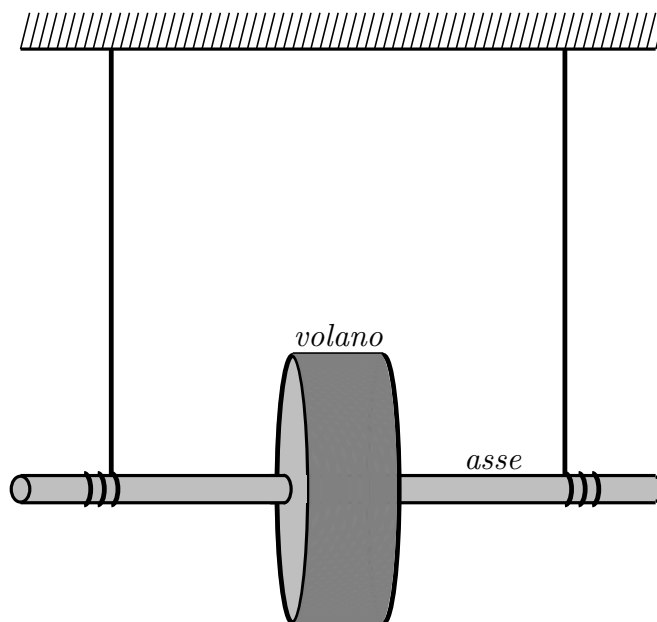


fig.3.12-1

Se lasciato andare, per gravità, il volano inizia a scendere e i fili si srotolano. Arrivato nel punto più basso consentito il pendolo fa riavvolgere i fili in verso opposto e comincia a risalire. Trascurando tutti gli attriti esso arriverebbe nello stessa posizione di partenza. Ricomincerebbe a scendere e così via. **Per determinare il periodo del pendolo, ovvero il tempo impiegato dal volano per scendere e risalire, si utilizza il principio di conservazione dell'energia totale meccanica.**

Sia  $m$  la massa del volano di raggio  $R$  e sia  $b$  il raggio dell'asse. Il momento di inerzia del volano rispetto al centro di massa è, per la (3.12.7),  $\frac{1}{2}mR^2$  e lo spessore della corda sia trascurabile. Il volano viene rilasciato dalla posizione di riposo. Il centro di massa del volano scende verticalmente mentre la corda si mantiene verticale mentre si svolge. (a) Qual è la tensione nella corda mentre il volano scende? (b) Qual è la grandezza dell'accelerazione angolare quando il volano scende e la grandezza dell'accelerazione lineare? (c) Trovare l'ampiezza della velocità angolare del volano quando raggiunge il fondo della corda, quando una lunghezza  $l$  della corda si è svolta.

La figura (3.12-2) rappresenta il sistema volano e asse visto di lato.

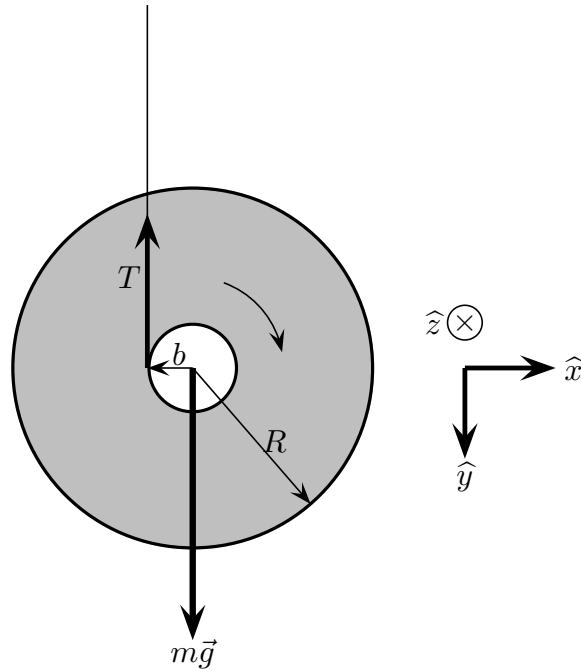


fig.3.12-2

a) Quando il volano scende esso ruota in senso orario come in figura (3.12-2). Il momento rispetto al centro di massa del volano è dovuto alla tensione  $T$  della corda, ossia la forza che lo fa ruotare e fa aumentare la sua velocità angolare. La direzione del momento è ortogonale alla pagina verso l'interno, nella direzione dell'asse  $z$  positivo. Per valutare la direzione di tale momento si può valutare o con il prodotto vettoriale come faremo vedere oppure con la seguente regola della mano destra: *si ponga il pollice della mano destra lungo la direzione del vettore  $T$ ; il verso della direzione di rotazione del palmo della mano incrociando la pagina indicherà la direzione ed il verso del momento*. Il momento della forza di tensione  $\vec{T}$  rispetto al centro di massa si scrive:

$$\vec{\tau}_{cm} = \vec{r}_{cm,T} \times \vec{T} \quad (3.12.1)$$

Risulta  $\vec{r}_{cm,T} = -b\hat{x}$  e  $\vec{T} = -T\hat{y}$ ; quindi il momento della tensione  $\vec{T}$  rispetto al centro di massa è:

$$\vec{\tau}_{cm} = \vec{r}_{cm,T} \times \vec{T} = (-b)\hat{x} \times (-T)\hat{y} = bT\hat{z} \quad (3.12.2)$$

Per la seconda legge di Newton si ha:

$$ma_y = mg - T \quad (3.12.3)$$

Analogamente per il moto rotatorio del volano, applicando la (3.12.9) si ottiene:

$$bT = \mathcal{I}_{cm} \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{I}_{cm} \alpha_z \quad (3.12.4)$$



essendo  $\alpha_z$  la componente  $z$  dell'accelerazione angolare del volano. Poichè  $v = \omega r$ , ossia  $a = \alpha r$ , nel nostro caso si ha:

$$a_y = b\alpha_z \quad (3.12.5)$$

essendo  $b$  il raggio dell'asse del volano.

Sostituendo l'equazione (3.12.5) nella (3.12.3) si ha:

$$mg - T = mb\alpha_z \quad (3.12.6)$$

Dalla (3.12.4) si ha:

$$\alpha_z = \frac{bT}{\mathcal{I}_{cm}} \quad (3.12.7)$$

Sostituendo la (3.12.7) nell (3.12.5) e successivamente nell'equazione (3.12.3), otteniamo:

$$mg - T = m \frac{b^2 T}{\mathcal{I}_{cm}} \quad (3.12.8)$$

dalla quale:

$$T = \frac{mg}{1 + m \frac{b^2}{\mathcal{I}_{cm}}} = \frac{mg}{1 + \frac{mb^2}{\frac{1}{2}mR^2}} = \frac{mg}{1 + \frac{2b^2}{R^2}} \quad (3.12.9)$$

b) Sostituiamo l'equazione (3.12.9) nella (3.12.4), ottenendo:

$$\alpha_z = \frac{bT}{\mathcal{I}_{cm}} = b \frac{mg}{\mathcal{I}_{cm} \left(1 + \frac{2b^2}{R^2}\right)} = \frac{mgb}{\frac{1}{2}mR^2 \left(1 + \frac{2b^2}{R^2}\right)} = \frac{2gb}{(R^2 + 2b^2)} \quad (3.12.10)$$

Si ha anche dalla (3.12.5):

$$a_y = ba_z = b \frac{2gb}{(R^2 + 2b^2)} = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2b^2}} = \frac{2gb^2}{(R^2 + 2b^2)} \quad (3.12.11)$$

**Si noti dall'equazione (3.12.11) che l'accelerazione di caduta del volano è molto minore di quella di un oggetto in caduta libera.**

c) Utilizziamo il teorema di conservazione dell'energia totale meccanica per calcolare la grandezza della velocità angolare del volano quando raggiunge il fondo ossia la fine della corda. Come in figura (3.12-2) la direzione verticale verso il basso come la direzione  $\hat{y}$  positiva e sia  $y = 0$  la quota del centro di massa del volano quando la corda è completamente

avvolta. Scegliamo  $U(y = 0) = 0$  l'energia potenziale di riferimento. Questa scelta comporta che l'energia potenziale gravitazionale sarà negativa decrescente man mano che il volano discende. Essa è;

$$U = -mgy \quad (3.12.12)$$

Poichè alla quota  $y = 0$  il volano è ancora fermo l'energia cinetica è zero e quindi l'energia totale meccanica ossia  $E_i = 0$  (Energia totale iniziale=0).

Indichiamo con  $v_f$  la velocità lineare del volano e con  $\omega_f$  la sua velocità angolare, entrambe nel punto  $y = l$ . Naturalmente si ha sempre  $v_f = b\omega_f$ .

L'energia cinetica è la somma dell'energia dovuta al moto rotatorio e dell'energia dovuta al moto traslatorio. Ne segue, quindi, che l'energia totale meccanica nel punto finale  $f$  quando la corda è completamente srotolata è:

$$E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_{cm}\omega^2 - mgl = \frac{1}{2}mb^2\omega_f^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega_f^2 - mgl. \quad (3.12.13)$$

Poichè il sistema è isolato (stiamo trascurando la resistenza dell'aria) l'energia totale meccanica si conserva, quindi:

$$E_f = E_i = 0. \quad (3.12.14)$$

Quindi:

$$\left(\frac{1}{2}mb^2 + \frac{1}{4}mR^2\right)\omega_f^2 = mgl. \quad (3.12.15)$$

da cui:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{4gl}{2b^2 + R^2}} \quad (3.12.16)$$

Possiamo anche utilizzare la cinematica per determinare la velocità angolare finale. Poichè l'accelerazione lineare è costante, lo spazio percorso è dato da:

$$l = \frac{1}{2}a_y t_f^2 \quad (3.12.17)$$

da cui, per la (3.12.11):

$$t_f = \sqrt{\frac{2l}{a_y}} = \sqrt{\frac{2l}{\frac{g}{1 + \frac{R^2}{2b^2}}}} = \sqrt{\frac{2l}{\frac{2gb^2}{2b^2 + R^2}}} = \sqrt{\frac{l(R^2 + 2b^2)}{gb^2}} \quad (3.12.18)$$

La velocità angolare finale é quindi, per la (3.12.10):

$$\omega_f = \alpha_z t_f = \frac{2gb}{(R^2 + 2b^2)} \sqrt{\frac{l(R^2 + 2b^2)}{gb^2}} = \sqrt{\frac{4gl}{2b^2 + R^2}} \quad (3.12.19)$$

in accordo con (3.12.16).

### 3.13 - Sfera che rotola verso il basso su un piano inclinato<sup>1)</sup>

Una sfera uniforme di raggio esterno  $R$  e di massa  $m$  con momento di inerzia rispetto al centro di massa dato dalla (3.13.9),  $\mathcal{I}_z = \frac{2}{5}mR^2$ , dalla posizione di riposo inizia a ruotare, senza scivolare, lungo un piano inclinato formante un angolo  $\beta$  con un piano orizzontale. Il centro di massa della sfera è sceso di una distanza verticale  $h$  quando raggiunge il fondo del piano inclinato (vedi figura 3.13-1). Sia  $g$  l'accelerazione gravitazionale. Supponiamo assenza di attrito fra la sfera e la superficie. Qual'è l'entità della velocità del centro di massa della sfera quando raggiunge il fondo del piano?

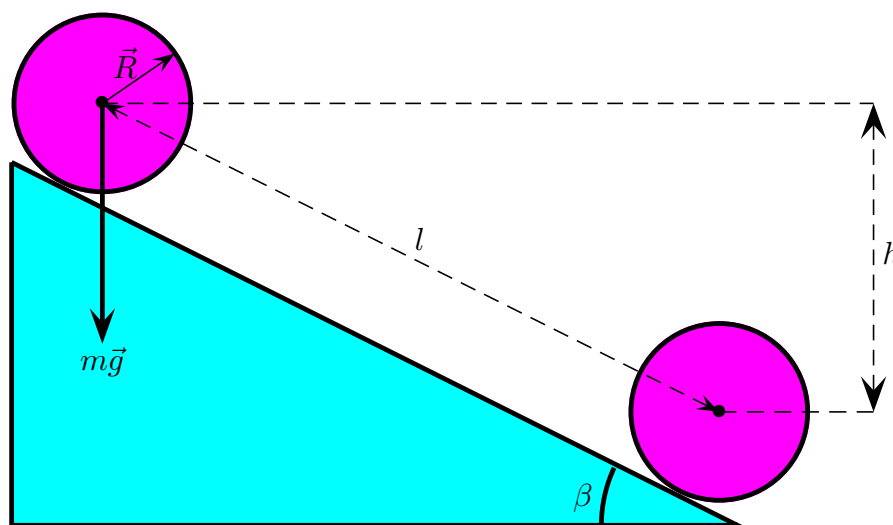


fig.3.13-1

Il moto della sfera è rototraslatorio; quindi l'energia cinetica acquistata dalla sfera, all'istante  $t$ , è la somma dell'energia cinetica competente al moto traslatorio corrispondente al baricentro e dell'energia cinetica del moto rotatorio attorno all'asse istantaneo di rotazione, che è evidentemente parallelo al piano ed orizzontale. Quindi, indicando con  $m$  la massa della sfera, con  $v$  la velocità del baricentro all'istante  $t$  e con  $\mathcal{I}_z$  il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione, e con  $\omega$  la velocità angolare intorno al medesimo asse, l'energia cinetica  $W_c$  della sfera è:

$$W_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_z\omega^2. \quad (3.13.1)$$

L'energia potenziale gravitazionale iniziale della sfera è:

$$W_p = mgh \quad (3.13.2)$$

mentre quella finale è nulla.

---

<sup>1)</sup> Nello Carrara: Fisica - R. Accademia Navale - Livorno, 1940, pag.215.

Siccome l'energia cinetica iniziale é nulla, il teorema di conservazione dell'energia totale meccanica, nello stato finale, si scrive:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_z\omega^2. \quad (3.13.3)$$

**È subito interessante osservare che se un corpo di egual peso  $mg$  slittasse (cioè non rotolasse) sul piano inclinato senza attriti lungo un tratto  $l$ , l'energia cinetica sarebbe semplicemente energia cinetica di moto traslatorio.**

Indicando con  $v'$  la velocità acquistata dal corpo slittante alla fine del tratto  $l$ , deve ora essere:

$$mgh = \frac{1}{2}mv'^2; \quad (3.13.4)$$

e dal confronto di questo con la precedente si deduce subito il risultato notevole:

$$\boxed{v' > v} \quad (3.13.5)$$

**cioè il corpo che slitta senza attrito, a pari percorso, acquista una velocità di traslazione superiore a quella acquistata dalla sfera che rotola.**

Torniamo alla sfera. Il suo momento di inerzia è:

$$\mathcal{I}_z = \frac{2}{5}mR^2 \quad (3.13.6)$$

Quindi l'energia cinetica del moto rotatorio è:

$$(W_c)_{rot} = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega^2 \quad (3.13.7)$$

Poichè:

$$v = \omega r \quad (3.13.8)$$

l'equazione (3.13.6) si scrive:

$$(W_c)_{rot} = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mv^2 \quad (3.13.9)$$

Il teorema della conservaaazione dell'energia totale meccanica (3.13.3) sdi scrive:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mv^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{5}\right)mv^2 \quad (3.13.10)$$

Si conclude che la sfera, che discende rotolando, si comporta come un corpo che slitta senza attriti, dotato di massa  $1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$  di quella della sfera; cioè il baricentro della sfera discende di moto uniformemente accelerato, con un punto materiale sottoposto ad una forza eguale a  $mg$  ed avente la massa  $\frac{7}{5}m$ .

Passiamo ad alcuni calcoli numerici.

Supponiamo che la sfera abbia una massa di  $10 \text{ kg}$ ; il suo peso é, quindi  $mg = 10 \cdot 9.8 = 98 \text{ N}$ . Se l'angolo di inclinazione  $\beta$  è  $45^\circ$ , segue  $\sin(45^\circ) = 0.707$ ; Posto  $l = 10 \text{ m}$  risulta  $h = l \cdot \sin(45^\circ) \simeq 7 \text{ m}$ , e quindi si ha:

$$mgh = 98 \cdot 7 = 686 \text{ Joule} \quad (3.13.11)$$

Dalla (3.13.10) segue:

$$v = \sqrt{2gh \frac{5}{7}} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 5} \simeq 9.9 \text{ m/s} \quad (3.13.12)$$

IL corpo di egual massa che scivola sul medesimo piano del medesimo tratto, acquista invece per la (3.13.4) la velocità:

$$v' = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 7} \simeq 11.7 \text{ m/s}. \quad (3.13.13)$$

### 3.14 - Esempi di conservazione del momento angolare<sup>1)</sup>

Immaginiamo una piattaforma girevole attorno ad un asse verticale e su di essa una persona a braccia tese. Supponiamo anche che il sistema giri con velocità angolare costante  $\bar{\omega}$  attorno all'asse verticale. Se  $\mathcal{I}_z$  è il momento di inerzia, il momento della quantità di moto (o momento angolare) è  $\mathcal{I}_z \bar{\omega}$ .

La persona abbassi le braccia: evidentemente il momento di inerzia diminuisce e quindi deve aumentare la velocità angolare, in quanto il momento angolare non deve variare perchè in assenza di momenti di forze esterne.

Non diversamente accade, che i pattinatori su ghiaccio i quali iniziano a ruotare attorno a se stessi con piccola velocità angolare, acquistano una velocità angolare molto maggiore se raccolgono braccia e gambe attorno all'asse di rotazione.

---

<sup>1)</sup> Nello Carrara: Fisica - R. Accademia Navale - Livorno, 1940, pag.213.

### 3.15 - Solidi in rapida rotazione: Giroscopio<sup>1)</sup>

La figura (3.15-1)<sup>2)</sup> rappresenta un giroscopio scientificamente realizzato. La ruota  $O\vec{f}$  che ha (per la sua dimensione) una montatura molto pesante, è libera di girare attorno al suo asse  $AA'$ , mentre il telaio in cui è montato questo asse può girare attorno all'asse  $BB'$ . Infine, la montatura in cui si trova  $BB'$  può ruotare attorno al piedistallo verticale  $C$ , dove c'è una vite (non disegnata in figura) che può essere serrata per impedire questa rotazione.<sup>3)</sup>

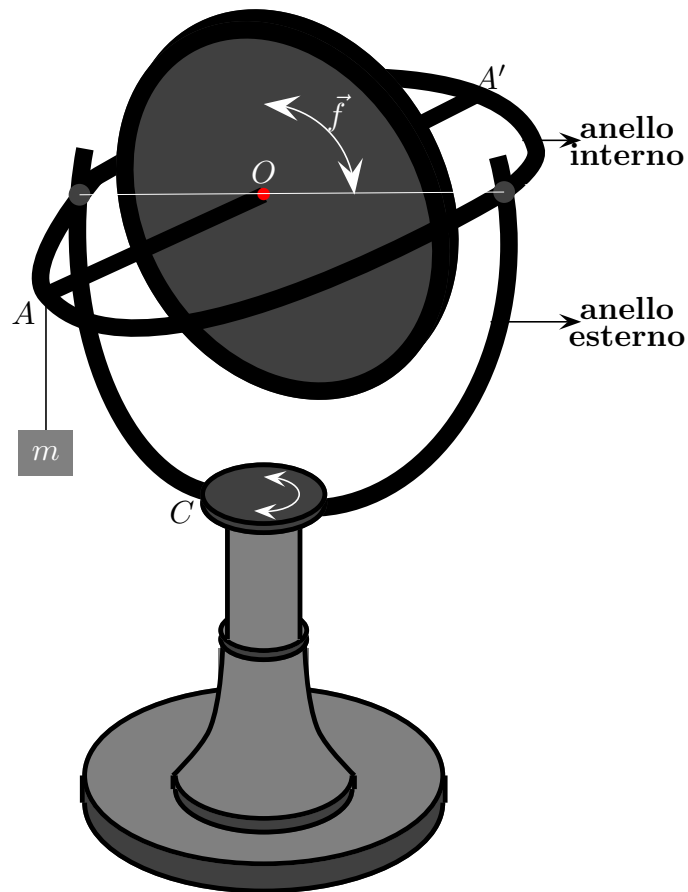


fig.3.15-1

Tale sistema corrisponde al dispositivo noto come sospensione di Cardano (o cardanica), che prende il nome dal matematico Gerolamo Cardano (Pavia, 1501 - Roma, 1576) suo presunto inventore. Esso offre un mezzo insolitamente efficace per dimostrare le

<sup>1)</sup> Arnold Sommerfeld: *Lezioni di Fisica Teorica I*, MECCANICA - Zanichelli Editore, Bologna, 1984, pag.158.

<sup>2)</sup> Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi: *Compendio di Meccanica Razionale*, seconda edizione riveduta, Parte Seconda - Nicola Zanichelli Editore, 1938, pag.163.

<sup>3)</sup> Harold Crabtree: *An Elementary Treatment of the Theory of Spinning Tops and gyroscopic motion* - Longmans, Green, and Co., London 1909, pag.10.

proprietà dei giroscopi. La sospensione è costituita da un anello esterno e uno interno. L'anello esterno ha un asse verticale imperniato sul sostegno dell'apparecchio, mentre l'anello interno ha un asse orizzontale imperniato attraverso dei cuscinetti sullo anello esterno. Sull'anello interno è fissato il volano, mediante perni la cui congiungente  $AA'$  è perpendicolare all'asse di rotazione dell'anello interno  $BB'$ . Il volano ruota con il suo asse perpendicolare all'asse di rotazione dell'anello interno. In figura (3.15-1) l'asse del volano è perpendicolare anche all'anello esterno, il che fa sì che l'anello interno si trovi su un piano orizzontale. Chiameremo questa disposizione dell'apparecchio come la sua posizione normale.

All'asse del volano è applicato un meccanismo di messa in moto che permette di imprimergli, mentre gli anelli esterno ed interno restano fermi nella posizione normale, un momento angolare mentre si trova nella sua posizione normale, con i giunti cardanici a riposo. Questo momento angolare deve essere così grande che tutti i fenomeni sono essenzialmente dominati da esso e l'effetto della massa della sospensione cardanica diventa trascurabile.

### 3.16 - Esperimenti con il Giroscopio

**Esperimento I.** Supponiamo ora che la ruota sia libera di girare attorno a tutti e tre gli assi, e che l'attrito sia così leggero da essere trascurabile. Si lasci la ruota girare nella direzione segnata in figura (una delle due) e lasciamo che un peso  $m$  sia sospeso su  $A$ . **Si scoprirà che, invece di inclinare la ruota attorno a  $BB'$ , la farà ruotare attorno alla verticale passante per  $C$  nella direzione segnata in figura. Ma se la vite in  $C$  viene serrata, la ruota girevole girerà immediatamente attorno a  $BB'$ .**

Se, quando la ruota è libera di girare su tutti e tre gli assi, noi applichiamo in  $A$  una forza che può essere rimossa più facilmente di quella del peso, come la pressione di un dito, si troverà che, quando la velocità di rotazione è piccola, la ruota si inclinerà attorno a  $BB'$  sensibilmente, e quando il dito viene rimosso l'intero sistema oscillerà violentemente. Se, tuttavia, la velocità di rotazione è elevata, sarà apprezzabile solo una minima inclinazione, se presente, mentre alla rimozione del dito le violente oscillazioni osservate in precedenza ora sono poco più di un brivido dell'asse. (Ref.<sup>3</sup>), pag.10)

**Esperimento II.** Esercitiamo una pressione sull'anello esterno. Rimane immobile, mentre l'anello interno ruota verso l'alto o verso il basso rispetto alla sua posizione orizzontale a seconda del senso in cui si esercita la pressione su quello esterno. Possiamo anche sferrare un colpo vigoroso all'anello esterno senza che ceda in modo evidente. Si percepisce in tal caso solo una rapida oscillazione conica dell'asse del volano attorno ad un asse prossimo a quello della posizione normale. L'apparato è così stabile da sopportare senza risentirne anche un forte colpo col pugno. (Ref.<sup>1</sup>), pag.159)

**Esperimento III.** Se la pressione sull'anello esterno continua in modo tale che, con la continua rotazione dell'anello interno, l'asse del volano si avvicina alla verticale, notiamo che la resistenza dell'anello esterno si indebolisce sempre di più. Allora è possibile far girare rapidamente l'anello esterno senza sforzo, ma solo nel senso che corrisponde alla direzione della pressione originariamente esercitata sull'anello. Se si tenta di ruotare l'anello esterno in senso contrario, il volano "si ribella"; il suo asse tende improvvisamente

nella direzione opposta, facendo ruotare l'anello interno di un angolo di  $180^0$ . Ora possiamo girare l'anello esterno senza sforzo in questa direzione opposta, ma si verifica un altro ribaltamento del volano se torniamo al senso di rotazione originale. (Ref.<sup>1</sup>), pag.159)

**Esperimento IV.** Questa è la *tendenza degli spin ad allinearsi parallelamente tra loro* che fu enfatizzata da Foucault. L'asse del volano è stabile in posizione verticale purchè la sua rotazione sia omologa (= nello stesso senso) a quella dell'anello esterno. Se le rotazioni sono antiparallele, questa posizione è invece molto instabile e l'asse si ferma solo quando è stata raggiunta la direzione opposta; in quest'ultima direzione prevale ancora il parallelismo omologo dei due assi di rotazione. Se esercitiamo una pressione sui lati alterni dell'anello esterno al ritmo corretto, possiamo far ruotare continuamente la parte superiore attorno all'asse dell'anello interno. (Ref.<sup>1</sup>), pag.159)

**Esperimento V.** Se la ruota viene tolta dai cuscinetti in B e B', e il telaio è tenuto nelle mani in A e A', si osserverà un violento tentativo di inclinazione attorno all'asse BB', e a meno che non venga prestata la dovuta attenzione, il risultato è che la ruota scivola completamente dalle mani per lo stesso motivo per cui, se montato correttamente, poco fa ruotava attorno all'asse verticale.

È chiaro che variando la direzione di rotazione della ruota in senso opposto o qualsiasi tentativo di farlo inclinare nella direzione opposta, produce una direzione opposta di rotazione attorno all'asse verticale. (Ref.<sup>3</sup>), pag.11)

**Esperimento VI.** Prendiamo ora il giroscopio quando la ruota non gira e il suo asse AA' è inclinato ad un certo angolo rispetto alla verticale come in Fig. 3.15-1, la vite in C non blocca la rotazione.

Se il piedistallo del giroscopio viene tenuto in mano e fatto oscillare lentamente, si troverà che AA' gira attorno alla verticale e punta nella stessa direzione della mano. Ma diamo una rotazione alla ruota, e subito si vedrà che, sebbene la mano gira intorno al corpo, AA' rimane sempre puntato nella stessa direzione in cui esso puntava originariamente.

**Questa stabilità dell'asse del giroscopio può essere utilizzata per dimostrare la rotazione della Terra.** Per ipotesi la rotazione viene mantenuta durante un periodo di diverse ore per mezzo di energia elettrica e che il giroscopio è posto in una stanza con il suo asse puntato verso qualche oggetto particolare nella stanza. Dopo qualche ora si scoprirà che l'asse non è più puntato verso quell'oggetto; mostrando, non che l'asse ha cambiato posizione nello spazio, ma che la stanza è in una diversa posizione nello spazio a causa della rotazione della Terra.

**Pertanto, se l'asse è posizionato in orizzontale puntando verso est, sei ore dopo punterà a sud (e verso l'alto), mentre dopo altre sei ore sarà puntato verso ovest (e in orizzontale).** (Ref.<sup>3</sup>), pag.11)

### 3.17 - La spiegazione fisica di alcuni esperimenti

La spiegazione di tutti questi fenomeni è contenuta nella legge fondamentale (3.7.5),

$$d\vec{L} = \vec{M}dt \quad (3.17.1)$$

Ci limitiamo a spiegare i primi due esperimenti:



**Esperimento I.** Se noi esercitiamo una pressione sull'anello interno,  $\vec{M}$  ha direzione orizzontale, coincidente con l'asse di rotazione dell'anello interno BB'. Il momento angolare  $d\vec{L}$  nella nostra figura 3.15-1 è diretto quindi verso sinistra o destra della figura e pertanto il momento angolare  $\vec{L}$  subisce una deflessione laterale.

Se dunque possiamo supporre che l'asse del volano che inizialmente coincideva con quello del momento angolare, lo segua istante per istante, risulta chiarita la deviazione laterale dell'asse, cioè la rotazione dell'anello esterno. Si può dimostrare che questa ipotesi sia effettivamente verificata purchè il momento angolare sia abbastanza grande. (Ref.<sup>1</sup>), pag.160)

**Esperimento II.** Per una sollecitazione sull'anello esterno,  $\vec{M}$  è diretto verticalmente. Il momento angolare, avente inizialmente orientamento orizzontale verso destra o verso sinistra, subirà pertanto una variazione verso l'alto o verso il basso. Ne risulta dunque, sotto la stessa ipotesi di prima, una rotazione dell'anello interno. Se diamo un colpo molto forte contro l'anello esterno, la nostra ipotesi riguardante la coincidenza del momento angolare e dell'asse del volano è solo soddisfatta approssimativamente; si ha allora l'accennata piccola oscillazione conica che rivela una piccola differenza fra l'asse del volano e il momento angolare. (Ref.<sup>1</sup>), pag.160)