Cap. 11

Moto di particelle in un campo gravitazionale[1)]

Uno degli argomenti più affascinanti della Fisica è stato, sin dal diciottesimo secolo, lo studio della possibile deflessione di un raggio di luce da parte di un forte campo gravitazionale.

Infatti la storia delle idee sulla deviazione della luce dovuta all'attrazione gravitazionale dei corpi celesti risale ai tempi di Isaac Newton (1642-1726).

Nel suo libro *Scritti di Ottica*[2)] (nome originale *Opticks*) Egli nel Libro Terzo della Ottica, parte I pone due Questioni importanti:

QUESTIONE n. 1: *I corpi non agiscono a distanza sulla luce, e per effetto della loro azione non incurvano i raggi di essa; e questa azione non è (a parità delle altre cose) massimamente forte alla minima distanza*?

QUESTIONE n. 29: I raggi di luce non sono corpi molto piccoli emessi da sostanze luminose?

Il primo calcolo pubblicato che affronta questo tipo di deviazione della luce, per mezzo della Meccanica Newtoniana, risale all'astronomo tedesco e geodèta Johann Georg von Soldner (1776-1833)[3)] nel 1801.

Riportiamo di seguito la traduzione dell'articolo di Soldner.[4)] Non abbiamo apportato alcuna variazione o correzione tranne qualche nota esplicativa e qualche sviluppo più dettagliato di formule.

11.1 - Articolo di Soldner

Sulla deflessione di un raggio di luce dal suo moto rettilineo,
dovuta all'attrazione di un corpo celeste al quale passa vicino.
Joh Soldner
Berlin, March 1801, (pubblicazione del 1804).

Allo stato attuale, così perfezionato dell'astronomia pratica, diventa più necessario sviluppare dalla teoria (cioè dalle proprietà generali e dalle interazioni della materia) tutte le circostanze che possono avere un'influenza su un corpo celeste; trarre vantaggio da una buona osservazione, per quanto possa dare.

---

1) Karl-Heinz Lotze and Silvia Simionato: Henry Cavendish and the effect of gravity on propagation of light: a postscript - The European Physical Journal H 2021,46:24.

2) Newton Isaac: Scritti di Ottica a cura di Alberto Pala - Classici della Scienza, UTET, 1978, Vol. II, Libro Terzo dell'Ottica, parte I, Questione 1 a pagina 552 e Questione 29 a pagina 577.

3) Johann Georg von Soldner (Feuchtwangen, Germania, 16 luglio 1776 - Monaco di Baviera, Germania, 13 maggio 1833): "Ueber die Ablenkung eines Lichtstrals von seiner geradlinigen Bewegung", ("Sulla deviazione di un raggio di luce dal suo moto rettilineo"), Berliner Astronomisches Jahrbuch, 1804, pp.161-172.

4) Stanley L. Jaki: Johann Georg yon Soldner and the Gravitational Bending of Light, with an English Translation of His Essay on It Published in 1801 - Foundation of Physics, Vol.8, n.11/12, p.939, (1978).

Sicuramente è vero che possiamo renderci conto di notevoli deviazioni da una regola presa dall'osservazione e dal caso: come nel caso dell'aberrazione della luce. **Tuttavia possono esistere deviazioni che sono così piccole, tale che è difficile decidere se esse sono vere deviazioni o errori osservazionali**. Possono esistere anche deviazioni che sono infatti considerevoli - ma se esse sono combinate con grandezze la cui determinazione non è ancora completamente terminata, esse possono sfuggire all'attenzione di un osservatore esperto. **Di questo ultimo genere può anche essere la deflessione di un raggio di luce dalla linea retta, quando si avvicina a un corpo celeste, e quindi sperimenta considerevolmente la sua attrazione**. Poichè noi possiamo facilmente vedere che questa deflessione è massima quando (come visto sulla superficie del corpo attratto) il raggio di luce arriva in direzione orizzontale, e diventa zero in direzione perpendicolare, allora la grandezza della deflessione sarà una funzione dell'altezza. Tuttavia, poichè anche il raggio rifratto è una funzione dell'altezza, ne segue che queste due quantità devono essere reciprocamente combinate: quindi può essere possibile, che la deflessione ammonterebbe a parecchi secondi d'arco nel suo massimo, sebbene finora non possa essere determinato da osservazioni.

Queste sono quasi le considerazioni che mi hanno spinto a pensare ancora alla perturbazione dei raggi di luce, che per quanto ne so non è stata studiata da nessuno.

Prima di cominciare lo studio, desidero ancora fare alcune osservazioni generali, in base alle quali il calcolo sarà semplificato. Poichè all'inizio voglio solo specificare il massimo di una tale deflessione, considero il passaggio orizzontalmente della luce nella posizione di osservazione (sulla superficie del corpo attrattivo), o presumo che la stella da cui proviene, sia apparentemente nascente. **Per convenienza dello studio assumiamo che il raggio di luce non arriva nel posto di osservazione, ma viene emesso da esso**. Possiamo facilmente vedere che questo è irrilevante per la determinazione della figura della traiettoria. Inoltre se un raggio di luce arriva su un punto della superficie del corpo attraente nella direzione orizzontale, e poi di nuovo continua la sua traiettoria (all'inizio di nuovo orizzontalmente): allora noi possiamo facilmente vedere, che con questa continuazione descrive la stessa linea curva, che essa ha seguita fin qui. Se noi disegnassimo attraverso il posto di osservazione ed il centro del corpo attraente una linea retta, allora questa linea sarà l'asse maggiore della linea curva per la traiettoria della luce; descrivendo sopra e sotto questa linea due lati completamente congruenti della linea curva.

Consideriamo la figura 1.

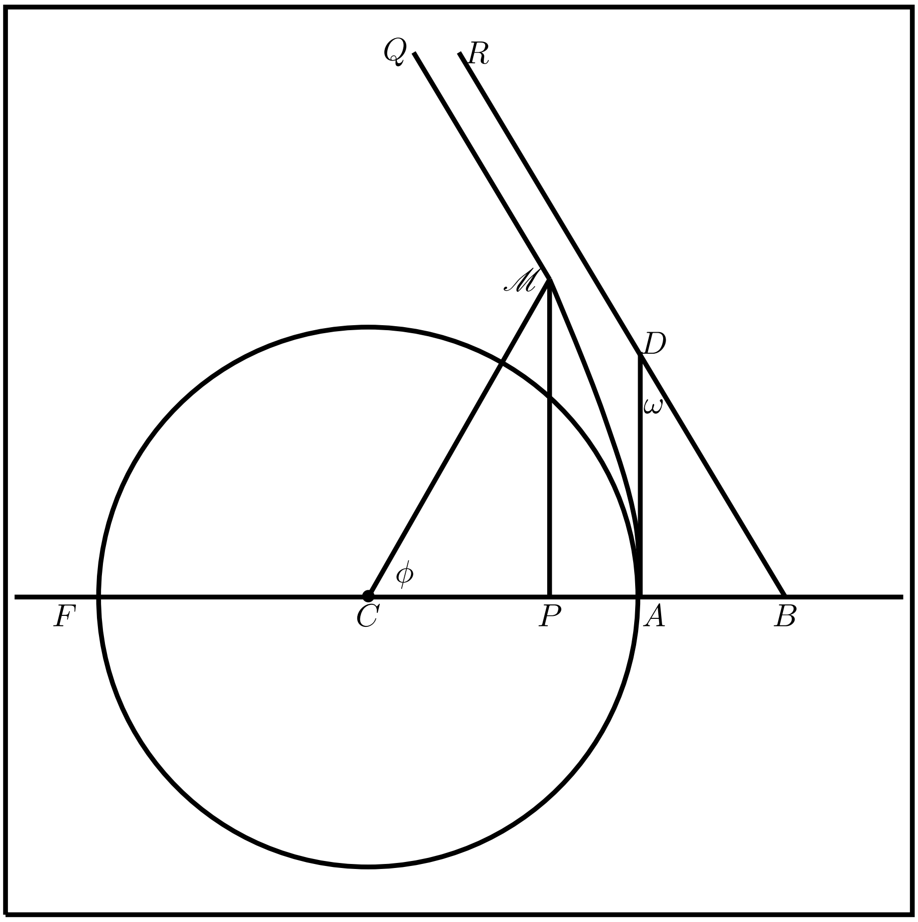

Figura 1: Figura originale di Soldner dove la luce viene da Q e finisce in A nell'occhio dell'osservatore

Sia C il centro del corpo che attrae, A è la posizione sulla superficie. Da A un raggio di luce va nella direzione AD o nella direzione orizzontale con velocità v. Il raggio di luce, invece di viaggiare in linea retta nella direzione AD, sarà forzato dal corpo celeste a descrivere una linea curva $A\mathscr{M}Q$ la cui natura sarà da noi studiata. Su questa linea curva dopo un certo tempo (calcolato dall'istante di emanazione da A), il raggio di luce si trova in $\mathscr{M}$, a distanza $C\mathscr{M} = r$ dal centro del corpo attrattivo. Inoltre sia $CP = x$, $\mathscr{M}P = y$ e l'angolo $\mathscr{M}CP = \phi$. La forza dalla quale la luce in $\mathscr{M}$ sarà attratta dal corpo nella direzione $\mathscr{M}C$, sarà $2gr^{-2}$.[5] Questa forza può essere decomposta in due altre forze,

$$2g/r^2 \cos\phi \quad e \quad 2g/r^2 \sin\phi,$$

[5] A questo proposito non sarà inutile osservare che la g di Soldner non indica quella che attualmente è nota come accelerazione di gravità, ma la distanza percorsa da un grave nel primo secondo di caduta libera, cioè la sua metà (vedi Ledo Stefanini: Un Equivoco di Soldner nell'interpretazione della deviazione gravitazionale della luce - Lettera Matematica, Ottobre 2016, 98, pag.39-43).

nella direzione x e y; otteniamo così le seguenti due equazioni (vedi Traitè de Mecanique celeste par Laplace, Tome I, pag. 21):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2g\cos\phi/r^2 \qquad (I)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2g\sin\phi/r^2 \qquad (II)$$

Se noi moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $-\sin\phi$, la seconda per $\cos\phi$ e sommiamo membro a membro, otteniamo:

$$(d^2y\cos\phi - d^2x\sin\phi)/dt^2 = 0 \qquad (III)$$

Moltiplichiamo ora la prima equazione per $\cos\phi$, la seconda per $\sin\phi$ e sommiamo membro a membro. Si ottiene:

$$(d^2y\sin\phi + d^2x\cos\phi)/dt^2 = -2g/r^2 \qquad (IV)$$

Per ridurre in queste equazioni il numero di quantità variabili, desideriamo esprimere x e y in funzione di r e ϕ. Facilmente vediamo che:

$$x = r\cos\phi; \quad y = r\sin\phi$$

Differenziando, si ha:

$$dx = \cos\phi dr - r\sin\phi d\phi, \quad dy = \sin\phi dr + r\cos\phi d\phi$$

Differenziando di nuovo:

$$d^2x = \cos\phi d^2r - \sin\phi d\phi dr - \sin\phi d\phi dr - r\cos\phi(d\phi)^2 - r\sin\phi d^2\phi$$

$$d^2y = \sin\phi d^2r + \cos\phi d\phi dr + \cos\phi d\phi dr - r\sin\phi(d\phi)^2 + r\cos\phi d^2\phi$$

che, semplificando, si scrivono:

$$d^2x = \cos\phi d^2r - 2\sin\phi d\phi dr - r\sin\phi d^2\phi - r\cos\phi(d\phi)^2$$

$$d^2y = \sin\phi d^2r + 2\cos\phi d\phi dr + r\cos\phi d^2\phi - r\sin\phi(d\phi)^2$$

Se noi sostituiamo queste ultime espressioni al posto di quelle che figurano nella equazione (III), si ottiene:

$$\Big(\cancel{\sin\phi\cos\phi d^2r} + 2\cos^2\phi d\phi dr + r\cos^2\phi d^2\phi - \cancel{r\sin\phi\cos\phi(d\phi)^2}$$
$$- \cancel{\sin\phi\cos\phi d^2r} + 2\sin^2\phi d\phi dr + r\sin^2\phi d^2\phi + \cancel{r\sin\phi\cos\phi(d\phi)^2}\Big) \Big/ dt^2 = 0$$

ossia:

$$(2d\phi dr + rd^2\phi)/dt^2 = 0 \tag{V}$$

Analogamente dalla equazione (IV) si ottiene:

$$\Big(\sin^2\phi d^2r + \cancel{2\cos\phi\sin\phi d\phi dr} + \cancel{r\cos\phi\sin\phi d^2\phi} - r\sin^2\phi(d\phi)^2$$
$$+ \cos^2\phi d^2r - \cancel{2\sin\phi\cos\phi d\phi dr} - \cancel{r\sin\phi\cos\phi d^2\phi} - r\cos^2\phi(d\phi)^2 \Big) \Big/ dt^2 = -2g/r^2$$

ossia:

$$\Big(d^2r - r(d\phi)^2 \Big) \Big/ dt^2 = -2g/r^2 \tag{VI}$$

Per rendere l'equazione (V) una vera quantità differenziale, moltiplichiamo ciascun membro della (V) per rdt, così abbiamo:

$$(2rd\phi dr + r^2d^2\phi)/dt = 0$$

che si può scrivere:

$$d\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right) = 0$$

da cui:

$$r^2d\phi = Cdt$$

dove C è una grandezza costante arbitraria. Per specificare C, **osserviamo che $r^2d\phi = r(rd\phi)$ è il doppio dell'area del piccolo triangolo descritto dal raggio vettore r nel tempo dt**. Il doppio dell'area del triangolo che è descritto nel primo secondo di tempo è allora[6)]: $AC \cdot v$; così noi abbiamo $C = AC \cdot v$. E se noi assumiamo il raggio AC del corpo attraente come unitario, cosa che faremo anche nel seguito, allora $C = v$. Se noi sostituiamo questo valore di C nella precedente equazione avremo:

$$r^2d\phi = vdt$$

da cui:

$$d\phi = \frac{vdt}{r^2} \tag{VII}$$

Sostituendo questo valore nell'equazione (VI), si ha:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{v^2}{r^3} = -\frac{2g}{r^2}$$

6) Infatti $rd\phi/dt = v$ e, quindi, dall'equazione precedente, risulta $rv = C$. Nel primo secondo di tempo $r = AC$.

Moltiplicando ciascun membro per $2dr$:

$$\frac{2drd^2r}{dt^2} - \frac{2v^2dr}{r^3} = -\frac{4gdr}{r^2}$$

che possiamo scrivere (e questa è una nota personale non riscontrabile nell'originale):

$$2\frac{dr}{dt}d\frac{dr}{dt} - \frac{2v^2dr}{r^3} = -\frac{4gdr}{r^2}$$

Integrando:

$$2\int \frac{dr}{dt}d\frac{dr}{dt} - \int \frac{2v^2dr}{r^3} = -\int \frac{4gdr}{r^2}$$

il cui risultato è:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{v^2}{r^2} = \frac{4g}{r} + D$$

(Nell'articolo di Soldner il primo termine era scritto come $\frac{dr^2}{dt^2}$). D è una grandezza costante, che dipende dalle grandezze costanti che sono contenute nella equazione. Da questa equazione possiamo eliminare il tempo, quindi:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{D + \frac{4g}{r} - \frac{v^2}{r^2}}}$$

Sostituendo questa espressione nella (VII) si ha:

$$d\phi = \frac{vdr}{r^2\sqrt{D + \frac{4g}{r} - \frac{v^2}{r^2}}}$$

Per integrare questa equazione, aggiungiamo e sottraiamo la quantità $4g^2/v^2$ allo interno della radice quadrata:

$$d\phi = \frac{vdr}{r^2\sqrt{D + \frac{4g^2}{v^2} - \left(\frac{v}{r} - \frac{2g}{v}\right)^2}}$$

Poniamo:

$$\frac{v}{r} - \frac{2g}{v} = z$$

Differenziando:

$$\frac{vdr}{r^2} = -dz$$

Sostituendo nell'equazione per $d\phi$, questa diviene:

$$d\phi = -\frac{dz}{\sqrt{D + \dfrac{4g^2}{v^2} - z^2}}$$

Tenendo conto che (per angoli nel primo e secondo quadrante):[7)]

$$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

ne segue:

$$\phi = \arccos \frac{z}{\sqrt{D + \dfrac{4g^2}{v^2}}} + \alpha$$

dove α è una grandezza costante. Si ha, quindi:

$$\cos(\phi - \alpha) = \frac{z}{\sqrt{D + \dfrac{4g^2}{v^2}}}$$

Sostituendo a z il suo valore, si ottiene:

$$\cos(\phi - \alpha) = \frac{\dfrac{v}{r} - \dfrac{2g}{v}}{\sqrt{D + \dfrac{4g^2}{v^2}}}$$

ossia:

$$\cos(\phi - \alpha) = \frac{v^2 - 2gr}{r\sqrt{v^2 D + 4g^2}}$$

$\phi - \alpha$ sarebbe l'angolo che r forma con l'asse maggiore della linea curva che deve essere specificato. Poichè inoltre ϕ è l'angolo che r forma con la linea AF (l'asse delle coordinate x e y), allora α deve essere l'angolo che l'asse maggiore forma con la linea AF. Tuttavia, poichè AF va attraverso il punto di osservazione ed il centro del corpo attraente, allora AF deve essere l'asse maggiore e, quindi, anche α è zero, e così:

$$\cos\phi = \frac{v^2 - 2gr}{r\sqrt{v^2 D + 4g^2}}$$

Per $\phi = 0$ deve essere $r = AC = 1$, ottenendo così:

$$\sqrt{v^2 D + 4g^2} = v^2 - 2g$$

[7)] Herbert Bristol Dwight: Tables of Integrals and Others Mathematical Data, pag.121, n.512.2.

Quindi, sostituendo nella precedente equazione:

$$\cos\phi = \frac{v^2 - 2gr}{r(v^2 - 2g)}$$

che si può scrivere:

$$rv^2 \cos\phi - 2gr\cos\phi = v^2 - 2gr$$

Dividendo per $2g$, si ha:

$$\frac{v^2}{2g} r\cos\phi - r\cos\phi = \frac{v^2}{2g} - r$$

ossia:

$$r + \left(\frac{v^2}{2g} - 1\right) r\cos\phi = \frac{v^2}{2g}$$

e, ancora:

$$r + \left(\frac{v^2 - 2g}{2g}\right) r\cos\phi = \frac{v^2}{2g} \qquad (VIII)$$

Da questa equazione finita fra r e ϕ, possiamo specificare la linea curva. Per fare questo in modo più conveniente, riduciamo le equazioni nelle coordinate $x = AP$ e $y = MP$ (vedi figura 1). Si ottiene:

$$\begin{aligned} x &= 1 - r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned} x - 1 &= -r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned}$$

Quadrando e sommanso:

$$(x-1)^2 + y^2 = r^2$$

ossia:

$$r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Sostituendo questa equazione nella (VIII), si ha:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \left(\frac{v^2 - 2g}{2g}\right)\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\cos\phi = \frac{v^2}{2g}$$

Poichè:

$$\cos\phi = \frac{1 - x}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

possiamo scrivere:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \left(\frac{v^2 - 2g}{2g}\right)(1 - x) = \frac{v^2}{2g}$$

ossia:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \frac{v^2}{2g} - \left(\frac{v^2-2g}{2g}\right)(1-x)$$

Elevando al quadrato:

$$y^2 = \left(\frac{v^2}{2g}\right)^2 + \left[\left(\frac{v^2-2g}{2g}\right)^2 - 1\right](1-x)^2 - 2\left(\frac{v^2}{2g}\right)\left(\frac{v^2-2g}{2g}\right)(1-x)$$

e, ancora:

$$y^2 = \left(\frac{v^2}{2g}\right)^2 + \left(\frac{v^4}{4g^2} - \frac{v^2}{g}\right)(1-x)^2 - \left(\frac{v^4}{2g^2} - \frac{v^2}{g}\right)(1-x)$$

$$y^2 = \cancel{\frac{v^4}{4g^2}} + \cancel{\frac{v^4}{4g^2}} + \underline{\underline{\frac{v^4}{4g^2}x^2}} - \cancel{\frac{v^4}{2g^2}x} - \cancel{\frac{v^2}{g}} - \underline{\underline{\frac{v^2}{g}x^2}} + \underline{\frac{2v^2}{g}x} - \cancel{\frac{v^4}{2g^2}} + \cancel{\frac{v^4}{2g^2}x} + \cancel{\frac{v^2}{g}} - \underline{\frac{v^2}{g}x}$$

In definitiva:

$$\boxed{y^2 = \frac{v^2}{g}x + \frac{v^2(v^2-4g)}{4g^2}x^2} \qquad \text{(IX)}$$

Poichè questa equazione è di secondo grado, allora la linea curva è una sezione conica, che può essere studiata più attentamente ora.

Se p è il parametro ed a il semiasse maggiore, allora (se noi calcoliamo l'ascissa con il suo inizio nel vertice) l'equazione generale per tutte le sezioni coniche è:

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2$$

Questa equazione contiene le proprietà della parabole, quando il coefficiente di x^2 è zero; quelle dell'ellisse quando esso è negativo; e quelle dell'iperbole quando esso è positivo. L'ultimo è evidentemente il caso della nostra equazione (IX). **Poichè per tutti i conosciuti corpi celesti $4g$ è più piccolo di v^2, allora il coefficiente di x^2 deve essere positivo**.

Se così un raggio di luce passa vicino ad un corpo celeste, esso sarà forzato dalla attrazione del corpo a descrivere una iperbole il cui lato concavo è diretto verso il corpo attraente invece di viaggiare in linea retta.

La condizione, sotto cui il raggio di luce descriverebbe un'altra sezione conica, può ora facilmente essere specificata. Esso descriverebbe una parabola quando $4g = v^2$, una ellisse quando $4g$ è più grande di v^2, e una circonferenza quando $2g = v^2$. Poichè noi non conosciamo alcun corpo celeste la cui massa è così grande che essa può generare una tale accelerazione sulla sua superficie, allora il raggio di luce descrive sempre una iperbole nel nostro mondo conosciuto.

Ora, rimane da investigare, in che misura il raggio di luce sarà deflesso dalla sua linea retta; o quanto grande sia l'angolo perturbato (che è il modo con cui desidero chiamarlo).

Poichè la figura della traiettoria è ora specificata, possiamo considerare il raggio di luce come se arrivasse da lontano. E poichè all'inizio desideravo specificare solo il massimo dell'angolo perturbato, assumo che il raggio di luce viene da una distanza infinitamente grande. Il massimo deve prendere posto in questo caso, perchè il corpo attraente agisce più a lungo sul raggio di luce quando esso viene da una più grande distanza che da una distanza più piccola. Se il raggio di luce proviene da una distanza infinita, allora la sua direzione iniziale è quella dell'asintoto BR (vedi figura 1) dell'iperbole, perchè ad una distanza infinitamente grande l'asintoto coincide con la tangente. Ancora il raggio di luce arriva nell'occhio dell'osservatore nella direzione DA, così ADB sarà l'angolo perturbato. Se noi indichiamo questo angolo con ω. abbiamo, poichè il triangolo ABD in A è rettangolo:

$$\tan\omega = \frac{AB}{AD}$$

Tuttavia è noto dalla natura dell'iperbole, che AB è il semiasse maggiore, e AD il semiasse laterale. Così questa grandezza deve anche essere specificata. Quando a è il semiasse maggiore, e b il semiasse laterale, allora il parametro è:

$$p = \frac{2b^2}{a}$$

Se noi sostituiamo questo valore nell'equazione generale dell'iperbole $y^2 = px + \dfrac{p}{2a}x^2$, essa diventa:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$$

Se noi compariamo questi coefficienti x e x^2 con quelli della (IX), otteniamo il valore del semiasse maggiore:

$$a = \frac{2g}{v^2 - 4g} = AB$$

e il semiasse laterale:

$$b = \frac{v}{\sqrt{v^2 - 4g}} = AD$$

Se noi sostituiamo questi valori per AB e AD nell'espressione per $\tan\omega$, si ha:

$$\boxed{\tan\omega = \frac{2g}{v\sqrt{v^2 - 4g}}.}$$

Noi ora desideriamo dare una applicazione di questa formula sulla Terra, e investigare, fino a che punto un raggio di luce è deflesso dalla sua linea retta, quando esso passa in prossimità della superficie terrestre. Sotto il presupposto che la luce richiede

$564''$, 8 *secondi decimali di tempo*[8] per venire dal Sole alla Terra, noi troviamo che esso attraversa 15,562085 raggi terrestri in un decimo di secondo. Se noi prendiamo sotto la latitudine geografica il suo quadrato del seno (1/3) (che corrisponde ad una latitudine di $35^0 16'$), il raggio della Terra di 6369514 metri, e l'accelerazione di gravità di 3,66394 metri (vedi Traitè de Mecanique celeste, Tome I, pag. 118): allora, espresso in raggi terrestri, g=0.000000575231. Io uso questa disposizione, per prendere le più recenti e le più affidabili specifiche della dimensione del raggio terrestre e dell'accelerazione di gravità, senza riduzione specifica dal Trattato di Meccanica Celeste. Da quello, niente sarà cambiato nel risultato finale, perchè è soltanto sulla relazione della velocità della luce alla velocità di un corpo che cade sulla Terra. Il raggio della Terra e l'accelerazione di gravità devono quindi essere prese sotto il menzionato grado di latitudine, poichè la terra sferoide (per quanto riguarda il suo contenuto fisico) è eguale ad una sfera il cui raggio terrestre (o 6369514 metri) è come il suo raggio.

Se noi sostituiamo questi valori per v e g nell'equazione di $\tan\omega$, allora noi otteniamo (in secondi sessagesimali) $\omega = 0''.0009798$, o in numeri pari $0''.001$. Poichè questo massimo è totalmente insignificante, sarebbe superfluo andare oltre, o specificare come questo valore diminuisce con l'altezza sopra l'orizzonte, e da quel valore esso diminuisce, quando la distanza della stella da cui il raggio di luce proviene, è assunto come finito ed eguale ad una certa dimensione. Una specificazione che sopporterebbe nessuna difficoltà.

Se noi desideriamo investigare dalla formula data, in quale misura un raggio di luce è deflesso dalla luna quando esso passa vicino la luna, e arriva sulla Terra, allora noi dobbiamo (dopo che le grandezze rilevanti sono sostituite ed il raggio della luna è preso come unitario) doppiare il valore che era trovato dalla formula; perchè il raggio di luce che passa vicino alla luna e cade sulla Terra, descrive due rami di iperbole. Ma nonostante il massimo deve essere molto più piccolo di quello della Terra; perchè la massa della luna, e così g, è molto più piccolo.

L'inflessione deve quindi derivare solo dalla coesione, scattering della luce, e della atmosfera della luna; l'attrazione generale non contribuisce qualcosa di significativo.

Se noi sostituiamo nella formula per $\tan\omega$ l'accelerazione di gravità sulla superficie del Sole, e assumiamo il raggio di questo corpo come unitario, allora noi troviamo ω=$0''.84$. Se fosse possibile osservare le stelle fisse molto vicine al Sole, noi avremmo preso queste in considerazione. Tuttavia come è ben noto che questo non accade, allora anche la perturbazione del Sole deve essere trascurata. Per i raggi di luce che provengono da Venere (che fu osservato da Vidal solo due minuti dal bordo del Sole, s. Hr. O. L. v. Zachs monatilche Correspondenz etc. II. Band pag.87) importa molto meno; perchè non può assumere la distanza di Venere e della Terra dal Sole

[8] Il tempo decimale è basato sulle seguenti considerazioni in voga in Francia per alcuni anni a partire dal 1792 durante la Rivoluzione francese fino al secolo diciottesimo; il giorno era costituito da 10 ore, un'ora da 100 minuti e un minuto da 100 secondi. Pertanto per trasformare un tempo sessagesimale ad un tempo decimale (o viceversa) va fatta la seguente proporzione: $24 \cdot 3600 : 10 \cdot 10000 = 1 : x$ ossia $x = (10 \cdot 10000)/(24 \cdot 3600) = 1.15$. Ossia un secondo decimale è uguale a circa 1.1574 secondi sessagesimale. Infatti la luce del Sole, come sappiamo oggi,impiega circa 8 minuti e 19 secondi per arrivare sulla Terra (=499 secondi sessagesimali) che corrispondono a $499 * 1.1574 \simeq 577.54$ secondi decimali.

come infinitamente grande.

Per combinazione di diversi corpi, che possono essere incontrati dai raggi di luce, sul loro cammino, i risultati sarebbero piuttosto più grandi, ma certamente sempre impercettibili per le nostre osservazioni.

Così è provato che non è necessario almeno, almeno nel corrente stato dell'Astronomia pratica, considerare la perturbazione dei raggi di luce dall'attrazione dei corpi celesti.

Ora io devo anticipare diverse obiezioni, che possibilmente potrebbero nascere contro di me.

Si noterà che mi sono allontanato dal metodo ordinario, perchè ho specificato diverse proprietà generali delle linee curve prima del calcolo; che è ciò che di solito accade solo dopo, e che potrebbe anche essere successo in questo posto. Eppure il calcolo è stato accorciato molto da questo, e perchè dovremmo calcolare, quando ciò che deve essere dimostrato, può essere mostrato molto più evidente da un piccolo ragionamento?

Spero che nessuno lo trovi problematico, che io tratti un raggio di luce quasi come un corpo ponderabile. I raggi di luce possiedono tutte le proprietà assolute della materia, possono essere visti al fenomeno dell'aberrazione, che è possibile solo quando i raggi di luce sono veramente materiali. Inoltre, non possiamo pensare a cose che esistono e che agiscono sui nostri sensi, senza avere le proprietà della materia.

Non v'è nulla che si possa dire disgiunta
da ogni corpo e separata dal vuoto, e che
risulti costituente quasi una terza natura.
Lucretius: De rerum natura I, 431

Inoltre, non penso che sia necessario per me scusarmi, che ho pubblicato questa indagine; dal momento che il risultato porta alla impercettibilità di tutte le perturbazioni. Perchè deve anche essere quasi altrettanto importante per noi sapere che cosa esiste secondo la teoria, ma che non è percepibile nella pratica; Per quanto riguarda noi, ciò che ha davvero un'influenza rispetto alla pratica. La nostra conoscenza sarà ugualmente estesa da entrambi. Ad esempio, dimostriamo che l'aberrazione diurna, il disturbo della rotazione della terra e altre cose simili in aggiunta, sono impercettibilmente piccole.

11.2 - Gli errori di Soldner[9)]

Johann Georg Soldner, un assistente dell'Astronomo reale prussiano J. Bode, era un personaggio curioso. Autodidatta, raggiunse un posizione di rilievo all'Osservatorio di Monaco. È ben noto in geodesia per il suo metodo per misurare la lunghezza degli archi su diversi km con un errore inferiore a 1 cm, e ha anche pubblicato alcuni lavori "cosmologici" sul moto delle stelle all'interno della Via Lattea e sulle stelle invisibili (Laplace-Michell) (vedi [10)]per resoconto dettagliato).

---

9) David Valls-Gabaud: The conceptual origins of gravitational lensing - Albert Einstein Century International Conference, AIP Conference Proceedings, Volume 861, pp. 1163-1171 (2006).

10) Stanley L. Jaki: Johann Georg von Soldner and the Gravitational Bending of Light,

Gli obiettivi che Soldner si prefigge nel suo scritto sono chiari dal titolo:

Sulla deviazione di un raggio luminoso dal suo moto lungo una linea retta dovuta all'attrazione di un corpo celeste al quale passa vicino [...] derivare tutte le circostanze che esercitano un'influenza sulla posizione vera o media di un corpo celeste dalle proprietà generali e dalle interazioni della materia

Egli considera il caso di una stella all'orizzonte e si chiede quale sia l'effetto, oltre alla rifrazione, che cambierà la posizione apparente. L'attrazione prodotta dalla Terra piegherà chiaramente la traiettoria ed Egli vuole calcolare il corrispondente errore astrometrico. È un articolo difficile da leggere, con una confusa notazione dove ad esempio l'accelerazione definita come $g = s/t^2$ (invece di $2s/t^2$) e quindi $v = 2gt$ (invece di $v = gt$. Inoltre le unità non sono consistenti (ad esempio, la velocità è misurate in unità di lunghezza).

Fondamentalmente ci sono due errori di un fattore due che si annullano fortuitamente alla fine. L'aspetto più importante, tuttavia, è che è concettualmente sbagliato. In contrasto con i calcoli di Cavendish, prende la velocità della luce al minimo impatto parametro, cioè più vicino al Sole, dove la teoria newtoniana prevede che la luce sarà accelerata e quindi la sua velocità sarà molto maggiore che all'infinito.

L'errore che fa Soldner è presumere che il raggio che se ne va tangenzialmente la superficie della stella avrà la stessa velocità del raggio che, venendo dall'infinito, raggiungerà la stella. Le traiettorie sono quasi le stesse, ma non sono gli equivalenti invertiti nel tempo poichè la velocità della luce aumenterà nel caso decrescente e decrescente in quello emergente. Tuttavia, dà il primo risultato quantitativo: $0.''001$ per il Terra e $0.''84$ al lembo del Sole. Egli conclude che anche se la combinazione di più corpi che un raggio di luce potrebbe incontrare nel suo cammino, sarebbe un risultato più ampio, per le nostre osservazioni è tuttavia impercettibile. Quindi è chiaro che niente fa è necessario, almeno allo stato attuale dell'astronomia pratica, che si tenga conto della perturbazione dei raggi luminosi attirando i corpi celesti.

L'articolo di Soldner sarebbe riapparso più di un secolo dopo durante la famigerata campagna antisemita e antirelativista condotta dal premio Nobel Lenard, che pubblicò estratti dell'articolo di Soldner nel 1924 e accusò Einstein di plagio.

11.3 - Henry Cavendish, Johann von Soldner e Albert Einstein[1)]

La deflessione della luce da parte di un corpo gravitante è un concetto che di solito evoca il nome di Albert Einstein. **Nel novembre del 1915, Egli calcolò ciò che ora consideriamo la previsione corretta per questo effetto usando la teoria della relatività generale**. La deflessione prevista per la luce che passa vicino il Sole è stata confermata nel 1919 dagli astronomi britannici che hanno misurato le posizioni delle deflessioni dovute alle stelle durante un'eclissi solare totale. Durante la fine degli anni '60 e l'inizio degli anni '70, la deflessione da parte del Sole delle onde radio

---

with an English Translation of His Essay on It Published in 1801 - Foundation of Physics, Vol.8, n.11/12, p.927, (1978).

[1)] Cliff M. Will: Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light - American Journal of Physics 56, 413-415, (1988).

provenienti da quasar lontani fu misurata da una lunga interferometria radio di base e verificò la previsione di Einstein all'1.5%.[2),3)]

Oggi, la misura di tali effetti come la deflessione della luce è usata per distinguere fra la teoria della relatività generale ed altre teorie relativistiche della gravitazione, ad esempio la teoria scalare-tensoriale Brans-Dicke,[4)] **ma, nel 1919, il problema era la distinzione fra la deflessione relativistica generale, nessuna deflessione, e quello che era chiamato la deflessione ″Newtoniana″**. La deflessione Newtoniana era esattamente la metà del valore di quella relativistica generale ed è stata calcolata da Einstein nel 1911 usando un argomento basato sul principio di equivalenza, ma senza le piene equazioni della relatività generale.[5)] Era stato anche calcolato circa 100 anni prima da un astronomo bavarese di nome Johann Georg von Soldner (1776-1833), usando la teoria della gravitazione Newtoniana, e trattando la luce come composta da corpuscoli che si muovano come particelle ordinarie in un campo gravitazionale, tranne che essi si muovano alla velocitá della luce.[6)] Ma il calcolo di von Soldner, sebbene pubblicato in un importante giornale astronomico, fu in gran parte dimenticato fino a quando non fu resuscitato nel 1921, in un tentativo, da parte dei simpatizzanti nazisti in Germania, di discreditare la teoria della relativitá "giudaica" di Einstein.[7),8)]

Non è così ben noto che la deflessione newtoniana della luce fu calcolata anche prima, probabilmente attorno al 1794, nientemeno che da Henry Cavendish (1731-1810), meglio conosciuto per la sua scoperta della natura composta dell'acqua, per l'identificazione dell'idrogeno come sostanza separata e per "l'esperimento Cavendish", che misurava la densità della Terra e la costante gravitazionale. Cavendish si interessa all'effetto della gravità sulla luce attraverso il suo buon amico John Michell (1724-1793), un geologo, astronomo e filosofo naturale. Nel 1783, Mitchell spedì a Cavendish un articolo che egli aveva scritto su un metodo per misurare la massa delle stelle rivelando la riduzione della velocitá della luce per effetto della gravitá Newtoniana quando i corpuscoli di luce si propagano dal campo gravitazionale della stella alla Terra.[9),10)] Questo articolo e la conseguente corrispondenza tra Cavendish e Michell portarono evidentemente Cavendish a considerare la deviazione della traiettoria della luce, possibilmente come un metodo alternativo per pesare le stelle

---

[2)] E. B. Fomalont and R. A. Sramek, Comments Astrophys. Space Phys. 7, 19 (1977

[3)] C. M. Will: Theory and Experiment in Gravitational Physics (Cambridge University Press, London, 1981), Sec, 7.1.

[4)] C. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. 124, 925 (1961); per un compendio sulle teorie relativistiche della gravità, vedi Ref. 2, Cap. 5.

[5)] A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig) 35, 898 (1911).

[6)] J. G. von Soldner, in Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1804 (Späthen, Berlin, 1801), p. 161.

[7)] P. Lenard, Ann. Phys. (Leipzig) 65, 593 (1921).

[8)] Per la storia dell'articolo di Von Soldner, insieme ad una traduzione di esso, vedi S. L. Jaki, Found. Phys. 8, 927, (1978).

[9)] J. Michell, Philos. Trans. R. Soc. London 74, 35 (1784).

[10)] R. McCormmach, Br. J. Hist. Sci. 4, 126 (1968).

(un'idea non dissimile dalle attuali proposte per studiare le distribuzioni di densità di galassie e ammassi che agiscono come lenti gravitazionali).[11)]

Nel corso del suo articolo del 1783, Michell fece notare che un corpo sufficientemente denso e massiccio poteva fermare completamente la luce che emetteva, e sarebbe quindi invisibile, tranne forse per la sua attrazione gravitazionale su una stella vicina. Questa osservazione è ora ampiamente citata nei resoconti popolari della storia dell'idea dei buchi neri.[12)] È ironico che Pierre Simon Laplace, nel 1796, completamente indipendente da Michell, abbia eseguito la stessa stima,[13)] e che sia stata la discussione di Laplace a motivare il calcolo di von Soldner della flessione della luce intorno al 1801 (vedi Capitolo 3, pagina 3-12).

Cavendish non pubblicò mai i suoi calcoli sulla deflessione della luce (infatti, egli pubblicò soltanto una piccola parte del suo lavoro). L'unica prova che abbiamo che ha fatto il calcolo é stato un singolo articolo trovato all'inizio di questo secolo tra le sue carte, che erano in possesso del Duca di Devonshire, durante un progetto di completare la compilazione e la pubblicazione della sua opera. Gli articoli di Cavendish sull'elettricità sono stati editati e pubblicati nel 1879 da James Clerk Maxwell; il secondo progetto, di editare gli articoli di chimica e di dinamica, non iniziò fino a poco prima della prima guerra mondiale e fu completato nel 1920.[14)] L'Astronomo Reale Britannico, Sir Frank Dyson, che aveva guidato lo sforzo di inviare squadre di astronomi per misurare la deflessione di luce di Einstein nel 1919, era responsabile dei documenti astronomici inediti e aveva definito l'articolo come "un frammento isolato sulla flessione di un raggio di luce per gravitazione, che è interessante, poichè [questa] possibilitá ... sta attualmente attirando l'attenzione, anche se Cavendish stava lavorando su una teoria corpuscolare".[14)] Il pezzo di articolo stabilisce:

Per trovare la flessione di un raggio di luce che passa vicino alla superficie di qualsiasi corpo dovuta all'attrazione di quel corpo.

Sia s il centro di un corpo ed a un punto della superficie. Sia la velocitá del corpo che gira in un cerchio ad una distanza as dal corpo sia alla velocitá della luce come 1: u, allora il seno di mezza flessione del raggio sar uguale a $1/(1+u^2)$.

Si scopre che questa risposta non è esattamente la stessa di quella ottenuta da Soldner, sebbene al primo ordine di approssimazione esse sono in accordo e danno la metà del valore

---

11) Ce n'era un altro per il prodotto della loro amicizia. Michell voleva anche misurare il peso (più precisamente la densità) della Terra e costruire un dispositivo di bilancia di torsione per questo scopo. Tuttavia, morì prima che potesse completare gli esperimenti; Cavendish si impossessò dello strumento, lo ricostruì e compì i famosi esperimenti che portano il suo nome per misurare la densità della Terra e la costante di gravitazione.

12) Vedi, per esempio, S. Detweiler, Am. J. Phys. 49, 394 (1981).

13) P. S. Laplace *Exposition du Systéme du monde* (Cercle-Social, Paris, 1796), p. 305; per una traduzione correlata, vedi S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge U. P., London, 1973), p.365.

14) H. Cavendish, *The Scientific Papers of the Honourable Henry Cavendish, F. R. S., Vol. II: Chemical and Dynamical*, edited by E. Thorpe (Cambridge U. P., London, 1921), pp.433-437.

relativistico generale. **È interessante provare a riprodurre la risposta di Cavendish (in assenza dei suoi calcoli dettagliati) e scoprire la ragione della differenza**.

II - Deflessione della luce nella teoria della gravitazione Newtoniana

Un modo per ottenere la deflessione Newtoniana della luce é quello di assumere, nello spirito dell'Ottica Newtoniana, che la luce sia composta di corpuscoli materiali che sono attratti dalla gravitá proprio come lo sono i corpuscoli ordinari. Secondo il principio di equivalenza, l'accelerazione di un corpo in un campo gravitazionale é indipendente dalla sua massa, dalla sua struttura, o dalla sua composizione, e cosí un corpuscolo di luce sará soggetto ad una accelerazione data da:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{Gm\vec{x}}{r^3},$$

dove $\vec{x}$ é la posizione del corpuscolo, $\equiv |\vec{x}|$ é la distanza fra il corpuscolo ed un corpo di massa m, t é il tempo, e G é la costante gravitazionale. Poiché la velocitá della luce é cosí grande, la sua orbita nel campo di un corpo debolmente gravitante come il Sole o la Terra sará non chiusa. La soluzione dell'equazione del moto é quindi un'orbita iperbolica, che puó essere espressa parametricamente come:[14)]

$$r = R(1+e)/(1+e\cos\phi), \tag{2}$$

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = \left[GmR(1+e)\right]^{1/2}, \tag{3}$$

dove ϕ é l'angolo nel piano $x-y$ misurato dall'asse x, e é l'eccentricvitá, e R é il raggio del punto piú vicino, scelto giacere lungo l'asse x (vedi Fig. 1). Con questa scelta dell'asse, il vettore $\vec{x}$ é dato da:

$$\vec{x} = r(e_x\cos\phi + e_y\sin\phi), \tag{4}$$

e la velocitá v é data da:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{Gm}{R(1+e)}\right)^{1/2}\left[-e_x\sin\phi + e_y(\cos\phi + e)\right], \tag{5}$$

$$v^2 = \frac{Gm}{R(1+e)}(1 + 2e\cos\phi + e^2). \tag{6}$$

[14)] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1965), Sec.3.6.

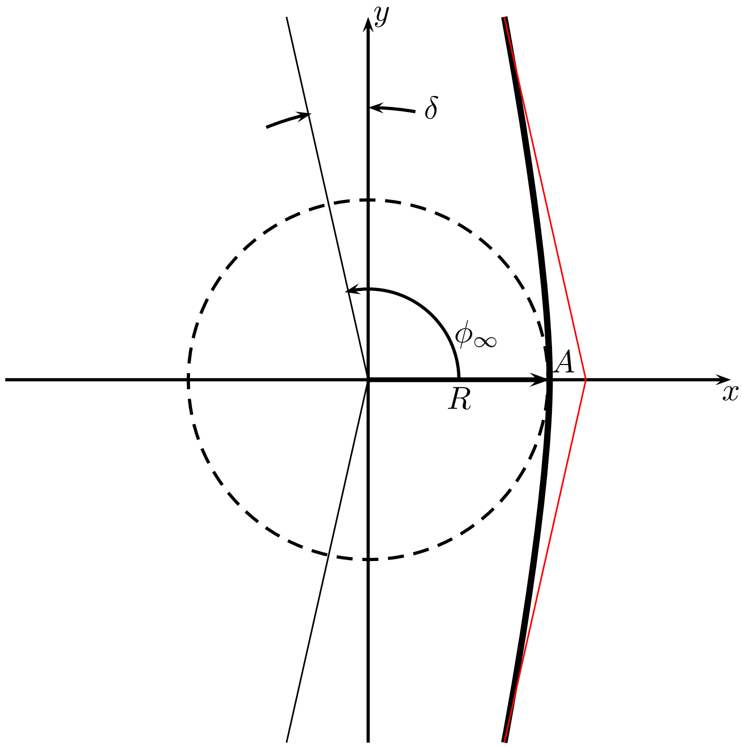

Fig. 1 - Traiettoria di un raggio di luce radente un corpo massivo ad - una distanza minima R. Le linee parallele agli asintoti della - traiettoria formano un angolo ϕ_∞ con l'asse x, ed un angolo - δ con l'asse y. L'angolo di deflessione netta é 2δ

Per $r \to \infty$, la traiettoria si avvicina agli asintoti che formano un angolo ϕ_m con l'asse x; questo accade quando $\cos\phi_\infty = -1/e$. Se noi definiamo $\phi_\infty \equiv \pi/2+\delta$, dove δ é la metá dell'angolo di deflessione, allora:

$$\sin\delta = 1/e \tag{7}$$

Ora dobbiamo determinare l'eccentricitá e. Il problema trattato da von Soldner era di calcolare la deflessione di un corpuscolo emesso in A in una direzione tangente alla superficie del corpo gravitante (cioé perpendicolare all'asse x) e propagantesi all'infinito. Egli assumeva che la particella avesse la velocitá standard della luce c nel punto A. Cosí:

$$c^2 = v^2\Big|_{\phi=0} = Gm(1+e)/R \tag{8}$$

e

$$e = (Rc^2/GM) - 1, \tag{9}$$

cosicché:

$$\sin\delta = \epsilon/(1-\epsilon), \tag{10}$$

dove:

$$\epsilon = Gm/R^2.$$

Questo differisce dalla risposta data da Cavendish. La velocitá di un'orbita circolare di raggio $as = R$ é $(Gm/R)^{1/2}$, cosí il simbolo di Cavendish u é dato da $u = (Rc^2/Gm)^{1/2} = e^{-1/2}$. Quindi il risultato di Cavendish é:

$$\sin\delta = \epsilon/(1+\epsilon), \tag{11}$$

Qual'é l'origine della differenza fra l'equazione (10) e l'equazione (11)? La spiegazione piú semplice é che Cavendish assumeva che la velocitá della luce era c, non in A, ma all'infinito. Sotto l'ipotesi di Cavendish,

$$c^2 = v^2\bigg|_{\phi=\phi_\infty} = [Gm/R(1+e)]\,(e^2-1) = Gm(e-1)/R \tag{12}$$

Cosí:

$$e = (Rc^2/Gm) + 1 \tag{13}$$

e noi otteniamo il valore di Cavendish per $\sin\delta$, eq. (11).

III - Discussione

Nella visione Newtoniana dell'Ottica, la velocitá della luce doveva essere presa come c rispetto all'emettitore, dovunque essa potesse essere (in contrasto con la visione relativistica, in cui la velocitá della luce é c misurata da qualsiasi osservatore liberamente in caduta o inerziale, indipendentemente dall'emettitore). Von Soldner non capí che la situazione fisica di un raggio emesso in A con velocitá c e ricevuto all'infinito non era esattamente l'inversione temporale del caso di un raggio emesso all'infinitocon velocitá c e ricevuto in A, a causa della variazione Newtoniana della velocitá lungo l'orbita. Cosí il suo risultato differisce leggermente dalla risposta di Cavendish, che é basata sull'assunzione di un raggio emesso all'infinito. Naturalmente, la variazione frazionaria della velocitá del raggio di luce lungo l'orbita é $O(\epsilon)$, e cosí la differenza relativa fra le due deflessioni é $O(\epsilon)$. In termini pratici, questa differenza é insignificante perché per un raggio che é radente al Sole, $\epsilon \simeq 2\cdot 10^{-6}$, cosí solo il termine di primo ordine é importante e, in entrambi i casi,il risultato per la ddeflessione totale é 2δ o:

$$\Delta\theta \equiv 2\delta \simeq 2\sin\delta \simeq 2\epsilon = 2Gm/Rc^2 \tag{14}$$

dando $0^{''}.875$ per un raggio radente il Sole.

La relativitá generale raddoppia questo effetto, essenzialmente aggiungendo ad esso l'effetto della curvatura dello spazio vicino al corpo gravitante, un fenomeno che la teoria Newtonianaé ncapace di trattare da se stessa.[15] Questa predizione fa parte di quella che viene chiamata approssimazione post-Newtoniana della relativitá generale (perché si deve

[15] Per una elementare descrizione di questo effetto, vedi C. M. Will, *Was Einstein right* (Basic, New York, 1986), pp. 70-75; per le derivazioni tecniche della deflessione della luce nello spazio-tempo curvo, vedi Ref. 2, Secs. 6.1 e 7.1.

andare oltre, o "postare", la gravitá newtoniana per vedere gli effetti della curvatura).[16] In aggiunta, vi sono contributi di piú alto ordine alla deflessione, che sono chiamati post-post effetti Newtoniani. Cosí la predizione relativistica generale é usualmente scritta approssimativamente come:

$$\Delta\theta_{GR} \simeq 4Gm/Rc^2 + O(Gm/Rc^2)^2. \tag{15}$$

I termini post-post-Newtoniani sono sstati calcolati dai teorici[17] e, sebbene essi portano contributi solo al livello del μarcsecondo, essi possono un giorno essere rivelabili da tali dispositivi come interferometri ottici orbitanti. In queso stesso spirito, uno puó allora ricapitolare i calcoli di Cavendish e von Soldner come portanti alla deflessione:

$$\Delta\theta_{NEW} \simeq 2Gm/Rc^2 + O(Gm/Rc^2)^2. \tag{16}$$

Naturalmente, questi calcoli Newtoniani non sono piú rilevanti dal punto di vista sperimentale perché danno il risultato sbagliato nell'ordine piú basso; tuttavia, é interessante notare che questi due grandi scienziati, ognuno dei quali é meglio conosciuto per lavorare al di fuori del campo di gravitá, indipendentemente dal fatto che si trattasse della flessione della luce piú di un secolo prima di Einstein.

11.4 - Storia e conseguenze dell'articolo di Soldner[9] - Confronto con la Teoria della Relatività Generale di Albert Einstein

Nel primo anno del diciannovesimo secolo apparve nella rivista largamente letta *Astronomisches Jahrbuch* un articolo di **Johann Georg Soldner**[3] sulla deflessione gravitazionale della luce, **un argomento che nel ventesimo secolo è stato abitualmente preso per un segno distintivo di ciò che è eccezionalmente originale nella moderna fisica**. Per tutto il diciannovesimo e fino al ventesimo secolo Soldner è stato ricordato per altri contributi scientifici, un fatto suggestivo dell'ironia che è più volte evidente nel percorso seguito dal progresso della scienza. L'ironia era in agguato sullo sfondo quando Einstein dichiarò nel 1907 in un tono di inconfondibile originalità che la gravitazione deve avere un influenza sul percorso della luce e ha dato una formula per la sua deviazione per centimetro.[10] Più ironia era in serbo quando nel 1911 Einstein calcolò la curvatura della luce intorno al sole, perchè gli venne in mente che l'effetto potrebbe essere osservato durante l'eclissi solare totale. **Nè Einstein, nè i molti lettori del suo articolo su Annalen der Physik, si sono resi conto che cento e dieci anni prima quasi esattamente lo stesso valore, $0''.84$ contro $0''.83$ come dato da Einstein,[11] era già stato calcolato da SoIdner**.

[16] Per una descrizione dell'approssimazione post-Newtoniana, vedi Ref. 2, cap. 4.

[17] R. Epstein and I. I. Shapiro, Phys. Rev. D 22, 2947 (1980); . Fishbach and B. Freeman, Phys. Rev. D 22, 2950 (1980); G. W. Richter and R. A. Matzner, Phys. Rev. D 26, 1219 (1982); 26, 2549 (1982).

[10] A. Einstein, Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, Jahrbuchfiir Radioaktivität und Elektronik 4, 411-62 (1908); esp. pp. 459-62.

[11] A. Einstein, Über den Einflusz der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes, Annalen der Physik 35, pp. 898-908 (1911); English translation: On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light, in H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and

La prima reazione alla previsione di Einstein fu quasi altrettanto completa di silenzio come la totale indifferenza che accolse la pubblicazione dell'articolo di Soldner. Nel marzo 1914 **Erwin Freundlich**, un giovane astronomo tedesco, ha richiamato l'attenzione sulle opportunità offerte dall'eclissi totale del 21 agosto 1914, ma le sue parole non suscitarono interesse. Una delle ragioni principali per questo potrebbe essere stata la realizzazione che il valore previsto era molto vicino ai limiti della precisione osservativa. **Invece, la risposta è stata nettamente diversa quando nel 1915 Einstein raddoppiò il valore previsto. Con il nuovo valore, $1''.7$, la fattibilità di testare la previsione è aumentata così tanto da mettere in moto una catena di eventi che nel giro di pochi anni ha prodotto notizie scientifiche che hanno elettrizzato non solo il corpo scientifico ma anche il pubblico in generale**.

Il primo anello di quella catena è stato un articolo pubblicato nel marzo 1917 in *Monthly Notices* in cui si richiamava l'attenzione sulla eclissi totale del 29 maggio 1919, un'eclissi che si verifica su uno sfondo molto luminoso di stelle. Nell'ottobre del 1917 furono richiesti fondi governativi dalla Royal Society e l'8 marzo 1919, **Sir Arthur Stanley Eddington e altri tre astronomi britannici si imbarcarono su una nave per installare stazioni di osservazione al di fuori della città di Sobral nel nord del Brasile e sull'isola di Principe al largo della costa occidentale dell'Africa**. I risultati delle osservazioni hanno fatto la storia della scienza quando l'articolo che rendeva conto delle spedizioni e dei risultati fu presentato da **Sir Frank W. Dyson**, l'Astronomo Reale per l'Inghilterra, alla riunione della Royal Society il 6 novembre 1919. **Quando il gruppo di Sobral misurò una deflessione di $1''.98 \pm 0''.12$ e il gruppo di Principe di $1''.61 \pm 0''.30$, la conclusione dell'articolo fu che ″i risultati ... possono lasciare pochi dubbi sul fatto che una deviazione della luce prende posto nelle vicinanze del Sole e che è della quantità richiesta dalla teoria della relatività generale di Einstein, attribuibile al campo gravitazionale del Sole″. L'incontro fu immortalato da Whitehead in un passo ben noto di cui qui occorre ricordare due particolari. Uno fu la sua osservazione che ″una grande avventura del pensiero [la relatività generale] era finalmente giunta sana e salva a riva″, l'altro era il suo riferimento alla figura di Newton in sottofondo ″per ricordarci che la più grande generalizzazione scientifica [la teoria della gravitazione di Newton] stava ora, dopo più di due secoli, per ricevere le sue prime modifiche″**.

La vera situazione era meno sicura di quanto stimato da Whitehead, e per due ragioni: primo, per il prossimo mezzo secolo ulteriori misurazioni della deflessione della luce durante le eclissi solari non hanno ridotto in modo apprezzabile il probabile errore della prima prova. La situazione è cambiata in meglio solo all'inizio degli anni 1970 quando le misurazioni con i radiotelescopi diedero un risultato che era **0.96 ± 0.05** volte il valore previsto dalla relatività generata.

L'altro motivo riguarda la figura di Newton. Come sostenitore di almeno una teoria parzialmente corpuscolare della luce, Newton avrebbe potuto naturalmente pensare e

---

H Weyl, The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity, with notes by A. Sommerf ld (Methuen, London, 1923; Dover, New York, 1952), pp. 99-108.

anche calcolare la deflessione della luce in un campo gravitazionale. Egli, naturalmente, aveva in mente la riflessione, la rifrazione e la diffrazione mentre...annotava nel 1704 la QUESTIONE n. 1: *I corpi non agiscono a distanza sulla luce, e per effetto della loro azione non incurvano i raggi di essa; e questa azione non è (a parità delle altre cose) massimamente forte alla minima distanza*? Eppure questa Questione, che implica una risposta affermativa, è stata formulata, anche se inconsapevolmente, in tale modo di generalità da accogliere anche l'idea della deflessione gravitazionale di luce. Spiegare quell'idea e affrontarla quantitativamente sarebbe stato più naturale per un Newton che ha affrontato cose molto più intricate, problemi di dinamica celeste, rispetto a quello della flessione della luce. La formulazione e la soluzione di tale problema giunsero, però, solo nel 1801 e anche allora non da uno scienziato professionista ma da un uomo in gran parte autodidatta, Soldner, apprendista assistente di **Johann Elert von Bode**, astronomo reale per la Prussia ed editore di Astronomisches Jahrbuch. Ma l'articolo di Soldner non ha fatto scalpore nel mondo scientifico. Divenne presto così dimenticato che i suoi biografi, nessuno di loro astronomi e cosmologi, difficilmente potrebbero essere affascinati dal suo titolo e scoprirne il significato. Non c'è da stupirsi che la figura di Soldner's non era in evidenza in quella memorabile riunione della Royal Society, anche se il suo ricordo sarebbe stato appropriato come quello della figura di Newton.

Astronomi e fisici hanno intravisto Soldner, solo per essere presto dimenticato, attraverso una serie di eventi innescati nientemeno che da Eddington, una figura chiave nella spedizione del 1919. Nel suo *Report on the Relativity Theory of Gravitation*, pubblicato per la prima volta nel 1918, Eddington ha sottolineato i fattori che nella teoria di Einstein portavano a un valore della curvatura della luce due volte più grande di quanto previsto dalla teoria newtoniana. Ma Eddington non ha menzionato Soldner, nè E. Lihotzky, un fisico della famosa azienda di ottica Leitz in Wetzlar, che ha studiato il rapporto di Eddington e ha deciso di elaborare in dettaglio un confronto tra le due teorie in un articolo stampato con ovvia fretta nel numero del 1 gennaio 1921 della Physikalische Zeitschrift. La conclusione tecnica era che la differenza tra il calcolo newtoniano e le previsioni einsteiniane non erano una netta differenza tra due valori diversi del 100 %; piuttosto la differenza variava in funzione della distanza dal centro del corpo attrattore e ad una certa distanza da questo centro i due valori coincidevano. A questa conclusione tecnica, che agli occhi di Lihotzky danneggiavano, anche se non fatalmente, la teoria di Einstein, aggiunse una conclusione filosofica che avallava di nascosto l'accusa che la relatività si fondava su presupposti complessi che rasentavano le contraddizioni. La verità di una teoria, sosteneva Lihotzky, alla fine si basava sul suo essere libera dalle contraddizioni: ″se fa un certo numero di contraddizioni esistenti a scomparire senza introdurne di nuovi allora dobbiamo attribuirgli un maggiore contenuto di verità″.

Il giornale di Lihotzky fu sequestrato da **Philipp Lenard (forte nazionalista e futuro accanito nazista antisemita)**, leader della crociata anti-Einstein condotta da diversi eminenti fisici tedeschi, mentre scriveva un articolo su questioni relative alla velocità della luce e soprattutto con l'incidenza su di esso dell'esperimento di Michelson-Morley. L'articolo era polemico anti-einsteiniano e Lenard trovò, nello stile dei polemisti, tutto per portare acqua al suo mulino. Sebbene l'articolo di Lihotzky non aveva nulla a che fare con l'argomento dell'articolo di Lenard, Lenard si riferiva ad esso in una lunga nota, usandola come un'altra prova che la teoria di Einstein non solo non dava previsioni veramente diverse da quelle della teoria di Newton, ma era anche molto meno semplice di tutte le grandi teorie della fisica ed era quindi...non necessaria.

Lenard ha ovviamente discusso il contenuto del suo articolo con l'astronomo Max Wolf, suo collega all'Università di Heidelberg, perchè il 22 aprile, due giorni dopo aver inviato il suo articolo all'Astronomische Nachrichten, ricevette notizia da Wolf di un'informazione che quest'ultimo aveva appena ottenuto da Martin Näbauer, allora professore di geodesia al Technische Hochschule di Kartsruhe. Secondo tali informazioni, la curvatura della luce era stata discussa e calcolata da Soldner più di cento anni prima di Einstein. Non dovrebbe essere difficile da immaginare l'euforia di Lenard dopo aver sentito quella notizia su Soldner, notizia che a quanto pare ora si stava diffondendo. Infatti, la pubblicazione all'inizio di giugno dell'articolo di Lenard ha indotto Hugo yon Seeliger, professore di astronomia all'Università di Monaco, a scrivere a Lenard di Soldner. Quel che Seeliger ha imparato da Wolf su Soldner, o dallo stesso Näbauer, è una possibilità concreta. Quello che Näbauer sapeva dell'impresa di Soldner può essere spiegato dal fatto che mentre ricevendo il suo dottorato di ricerca in geodesia presso l'Università di Monaco di Baviera, Näbauer potrebbe facilmente sviluppare un interesse per la vita e l'opera di Soldner, la cui memoria era viva tra i geodeti bavaresi e nella loro organizzazione, il Bayerische Landesvermessungsamt.

Sulla comunicazione su Soldner di Wolf e Seeliger a Lenard quest'ultima è la nostra fonte di informazioni in una lunga nota a piè di pagina di un suo articolo pubblicato il 27 settembre 1921 su AnnaIen der Physik. Quell'articolo stampato rapidamente indica che Lenard ha lavorato con tutta la velocità possibile per rendere pubblico quello che riguardo la sua previsione della deflessione della luce, e che Einstein ebbe un predecessore straordinariamente accurato e originale. L'articolo di Lenard di 11 pagine aveva per titolo il titolo stesso dell'articolo di Soldner dal nome di Soldner. Questo potrebbe solo dare l'impressione che il sottotitolo, "Con un'osservazione introduttiva di P. Lenard", non eclisserebbe il contributo di Soldner. In realtà, l'″Osservazione introduttiva″ è stata tanto lunga, se non di più, come lo spazio riservato all'articolo di Soldner, di cui solo le prime due e difficilmente più importanti pagine sono state riprodotte alla lettera, il resto dato in sintesi. Chiaramente, Lenard era interessato solo a Soldner nella misura in cui quest'ultimo potrebbe essere usato o meglio abusato come munizioni anti-einsteiniane. Soldner è stato abusato almeno indirettamente quando Lenard lo ha presentato come un precursore della teoria quantistica della luce di Planck, senza sottolineare che fu sotto l'impatto della persistente argomentazione di Einstein che...Planck finalmente accettò l'idea che non solo l'emissione di la luce avviene in quanti, ma anche nella sua propagazione la luce rimane quantizzata. La quantizzazione della luce era un'idea tanto lontana dalla mente di Soldner quanto... era l'equivalenza massa-energia su cui Lenard era ansioso di sottolineare che Hasenöhrl, senza usare le assunzioni della relatività, derivò la formula $E = Mc^2$, nel 1904, un anno prima di Einstein. Quelle ipotesi furono prese da Lenard tanto alla leggera quanto le ragioni che spinsero Einstein nel 1915 per rivedere il suo calcolo della deflessione della luce come dato nel 1911. Soldner è stato chiaramente abusato quando Lenard ha dichiarato con un occhio al suo lavoro che ″o la teoria della relatività (1911) è nel suo contenuto identica alla semplice ipotesi [newtoniana] ... o è inventata e connessa solo in aspetto con il risultato.″ Lo stesso era vero quando, dopo aver discusso a lungo la questione dell'avanzata del perielio di Mercurio, Lenard ha dichiarato che ″l'introduzione per la sua spiegazione di una teoria ingombrante, come la teoria della relatività, che, come mostrato, non ha da nessuna parte un fondamento sicuro nell'esperienza, può finora apparire arbitrario e inquietante″.

Fine del Cap 11