Cap. 7

Deduzione del campo magnetico via relativitá ristretta

7.1 - Trasformazioni relativistiche di grandezze cinematiche e delle forze

Siano $\mathbf{S} \equiv (\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ ed $\mathbf{S}\,' \equiv (\mathbf{O}\,', \mathbf{x}\,', \mathbf{y}\,', \mathbf{z}\,', \mathbf{t}\,')$ due sistemi di riferimento che si muovono di moto rettilineo uniforme in modo che gli assi si mantengano sempre paralleli ed, in particolare, l'asse $\vec{x}$ coincida con l'asse $\vec{x}\,'$; all'istante t=0 le due origini siano coincidenti. Sia $\vec{v} = v\widehat{x}$ la loro velocitá relativa.

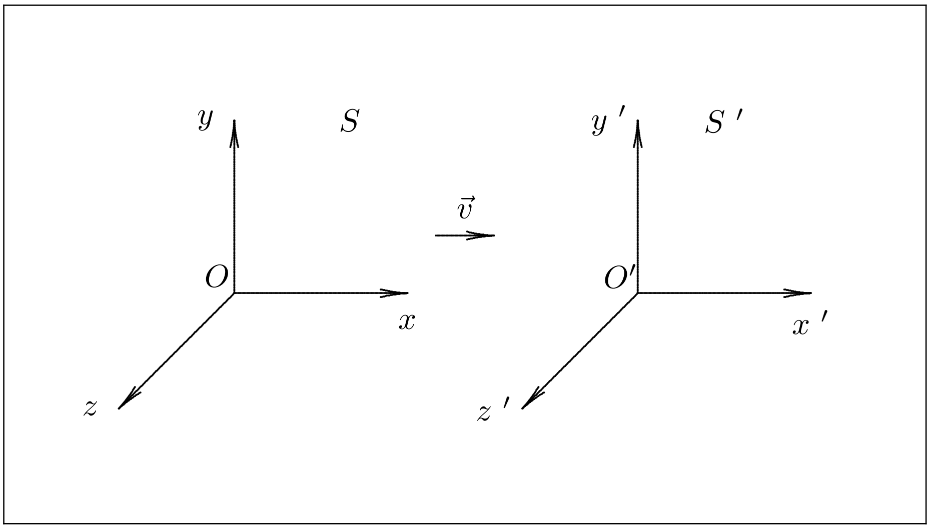

fig.7.1-1

In queste condizioni le trasformazioni di Lorentz si scrivono:

$$
\begin{aligned}
x\,' &= \gamma(x - vt) \\
y\,' &= y \\
z\,' &= z \\
t\,' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)
\end{aligned}
\tag{7.1.1}
$$

Le trasformazioni inverse sono:

$$
\begin{aligned}
x &= \gamma(x\,' + vt\,') \\
y &= y\,' \\
z &= z\,' \\
t &= \gamma\left(t\,' + \frac{vx\,'}{c^2}\right)
\end{aligned}
\tag{7.1.2}
$$

dove:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{7.1.3}$$

Siano $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{u}}\,'$ le velocitá di un punto materiale relative al sistema $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{S}\,'$ rispettivamente.

$$\begin{aligned} \vec{u} &\equiv (u_x, u_y, u_z) \\ \vec{u}\,' &\equiv (u\,'_x, u\,'_y, u\,'_z) \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

Ci si propone di correlare le due velocitá. Per definizione, si ha:

$$\begin{aligned} u\,'_x &= \frac{dx\,'}{dt\,'} \qquad & u_x &= \frac{dx}{dt} \\ u\,'_y &= \frac{dy\,'}{dt\,'} \qquad & u_y &= \frac{dy}{dt} \\ u\,'_z &= \frac{dz\,'}{dt\,'} \qquad & u_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \tag{7.1.5}$$

Applicando le trasformazioni di Lorentz, si ha:

$$\begin{aligned} u\,'_x &= \frac{dx\,'}{dt\,'} = \frac{d}{dt\,'}[\gamma(x - vt)] = \gamma\left(\frac{dx}{dt\,'} - v\frac{dt}{dt\,'}\right) = \gamma\left(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dt\,'} - v\frac{dt}{dt\,'}\right) = \\ &= \gamma(u_x - v)\frac{dt}{dt\,'} = \gamma^2(u_x - v)\left(1 + u\,'_x\frac{v}{c^2}\right) = \gamma^2(u_x - v) + \gamma^2(u_x - v)u\,'_x\frac{v}{c^2} \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

Portando al primo membro tutti i termini in $u\,'_x$:

$$u\,'_x - \gamma^2 u\,'_x u_x\frac{v}{c^2} + \gamma^2 u\,'_x\frac{v^2}{c^2} = \gamma^2(u_x - v)$$

Mettendo in evidenza u'_x, segue:

$$u\,'_x\left(1 - \gamma^2 u_x\frac{v}{c^2} + \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^2(u_x - v)$$

da cui:

$$u\,'_x = \frac{u_x - v}{\frac{1}{\gamma^2} - u_x\frac{v}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - u_x\frac{v}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}}$$

In definitiva si ottiene:

$$u\,'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x\frac{v}{c^2}} \tag{7.1.7}$$

Per ottenere la trasformazione inversa della (7.1.7) basta scambiare la posizione delle grandezze $u\,'_x$ e u_x e v con $-v$; per verificare quanto detto, risolviamo la (7.1.7) in u_x:

$$u_x = \frac{u\,'_x + v}{1 + u\,'_x\frac{v}{c^2}} \tag{7.1.8}$$

Analogamente per le altre componenti:

$$u\,'_y = \frac{dy\,'}{dt\,'} = \frac{dy}{dt\,'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt\,'} = u_y\gamma\left(1 + u'_x\frac{v}{c^2}\right)$$

Sostituendo al posto di $u\,'_x$ la formula (7.1.7), si ha:

$$u\,'_y = \gamma u_y\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{u_x - v}{1 - u_x\frac{v}{c^2}}\right) = \gamma u_y\frac{c^2 - u_xv + u_xv - v^2}{c^2 - u_xv} = \gamma u_y\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - u_x\frac{v}{c^2}}$$

che si puó scrivere:

$$u\,'_y = \frac{\frac{u_y}{\gamma}}{1 - u_x\frac{v}{c^2}} \tag{7.1.9}$$

La trasformazione inversa é:

$$u_y = \frac{\frac{u\,'_y}{\gamma}}{1 + u\,'_x\frac{v}{c^2}} \tag{7.1.10}$$

Per la componente $u\,'_z$ si ha:

$$u\,'_z = \frac{dz\,'}{dt\,'} = \frac{dz}{dt\,'} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dt\,'} = u_z\gamma\left(1 + u\,'_x\frac{v}{c^2}\right)$$

Effettuando le stesse trasformazioni per $u\,'_y$, si ottiene:

$$u\,'_z = \frac{\frac{u_z}{\gamma}}{1 - u_x\frac{v}{c^2}} \tag{7.1.11}$$

La trasformazione inversa é:

$$u_z = \frac{\frac{u\,'_z}{\gamma}}{1 + u\,'_x\frac{v}{c^2}} \tag{7.1.12}$$

7.2 - Calcolo di una relazione ausiliaria

Consideriamo i moduli delle velocitá nei due sistemi di riferimento:

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \qquad e \qquad u\,'^2 = u\,'^2_x + u\,'^2_y + u\,'^2_z \tag{7.2.1}$$

Vogliamo esprimere u^2 in funzione di u'_x, u'_y, u'_z applicando la (7.1.8), la (7.1.10) e la (7.1.12).

$$u^2 = \frac{(u'_x + v)^2 + (u'^2_y + u'^2_z)/\gamma^2}{\left(1 + u'_x \frac{v}{c^2}\right)^2} = \frac{(u'_x + v)^2 + (u'^2 - u'^2_x)/\gamma^2}{\left(1 + u'_x \frac{v}{c^2}\right)^2} \tag{7.2.2}$$

Posto:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \qquad \gamma'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \tag{7.2.3}$$

Si vuole provare la relazione:

$$\gamma_1 = \gamma\gamma'_1 \left(1 + u'_x \frac{v}{c^2}\right) \tag{7.2.4}$$

ossia che:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1 + u'_x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$$

Quadrando ed invertendo:

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + u'_x \frac{v}{c^2}\right)^2} \tag{7.2.5}$$

Verificare la (7.2.4) é equivalente dimostrare che il primo membro della (7.2.5) si puó scrivere come il secondo membro della (7.2.5).

Applicando la (7.2.2), il primo membro della (7.2.5) si puó scrivere:

$$\mathbf{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 1 - \frac{(u'_x + v)^2 + (u'^2 - u'^2_x)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1 + u'_x \frac{v}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(1 + u'_x \frac{v}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{u'_x}{c} + \frac{v}{c}\right)^2 - \left(\frac{u'^2}{c^2} - \frac{u'^2_x}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + u'_x \frac{v}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2u'_x \frac{v}{c^2} + u'^2_x \frac{v^2}{c^4} - \frac{u'^2_x}{c^2} - 2u'_x \frac{v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u'^2}{c^2} + \frac{u'^2_x}{c^2} + \frac{u'^2 v^2}{c^4} - u'^2_x \frac{v^2}{c^4}}{\left(1 + u'_x \frac{v}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u'^2}{c^2} + \frac{u'^2 v^2}{c^4}}{\left(1 + u'_x \frac{v}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{u'^2}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + u'_x \frac{v}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(\mathbf{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)\left(\mathbf{1 - \frac{u'^2}{c^2}}\right)}{\left(\mathbf{1 + u'_x \frac{v}{c^2}}\right)^2} \tag{7.2.6}$$

come volevasi dimostrare.

7.3 - Trasformazioni relativistiche delle forze

Nel sistema di riferimento **S** la forza agente su una particella é definita come:

$$F_x = \frac{d}{dt}(mu_x) = m_0\frac{d}{dt}(\gamma_1 u_x) \tag{7.3.1}$$

$$F_y = \frac{d}{dt}(mu_y) = m_0\frac{d}{dt}(\gamma_1 u_y) \tag{7.3.2}$$

$$F_z = \frac{d}{dt}(mu_z) = m_0\frac{d}{dt}(\gamma_1 u_z) \tag{7.3.3}$$

dove:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma_1 m_0 \tag{7.3.4}$$

con m_0 che indica la massa a riposo della particella.

Analogamente nel sistema **S** $'$ le componenti della forza sono:

$$F\,'_x = \frac{d}{dt\,'}(m\,'u\,'_x) = m_0\frac{d}{dt\,'}(\gamma\,'_1 u\,'_x) \tag{7.3.5}$$

$$F\,'_y = \frac{d}{dt\,'}(m\,'u\,'_y) = m_0\frac{d}{dt\,'}(\gamma\,'_1 u\,'_y) \tag{7.3.6}$$

$$F\,'_z = \frac{d}{dt\,'}(m\,'u\,'_z) = m_0\frac{d}{dt\,'}(\gamma\,'_1 u\,'_z) \tag{7.3.7}$$

Vediamo, ora, di effettuare l'analisi comparativa delle forze espresse in sistemi di riferimento diversi.

$$F_x = m_0\frac{d}{dt}(\gamma_1 u_x) = m_0\frac{d}{dt'}(\gamma_1 u_x)\frac{dt\,'}{dt} \tag{7.3.8}$$

Dalle (7.1.1) e dalla (7.1.8) si ha:

$$\begin{aligned}\frac{dt\,'}{dt} = \gamma - \gamma\frac{v}{c^2}u_x = \gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\frac{u\,'_x+v}{1+u\,'_x\frac{v}{c^2}}\right) &= \\ = \gamma\left[\frac{c^2+u\,'_x v - u\,'_x v - v^2}{c^2\left(1+u\,'_x\frac{v}{c^2}\right)}\right] &= \\ = \gamma\left[\frac{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1+u\,'_x\frac{v}{c^2}\right)}\right] = \frac{\mathbf{1}}{\gamma\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{u\,'_x v}}{\mathbf{c^2}}\right)}\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

Consideriamo, ora, il termine $\frac{d}{dt'}(\gamma_1 u_x)$ contenuto nel secondo membro della (7.3.8) e in esso sostituiamo la (7.2.4) e la (7.1.8). Si ha:

$$\frac{d}{dt'}(\gamma_1 u_x) = \frac{d}{dt'}\left[\gamma\gamma_1'\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right)\frac{u_x'+v}{\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right)}\right] = \gamma\frac{d}{dt'}\left[\gamma_1'(u_x'+v)\right] \tag{7.3.10}$$

Sostituendo la (7.3.10) e la (7.3.9) nella (7.3.8) si ottiene:

$$F_x = \frac{m_0}{\gamma\left(1+u_x'\frac{v}{c^2}\right)}\gamma\frac{d}{dt'}\left[\gamma_1'(u_x'+v)\right] = \frac{m_0}{1+u_x'\frac{v}{c^2}}\frac{d}{dt'}(\gamma_1'u_x') + \frac{m_0 v}{1+u_x'\frac{v}{c^2}}\frac{d\gamma_1'}{dt'} \tag{7.3.11}$$

Aggiungiamo e sottraiamo la quantitá:

$$\frac{m_0 u_x' v/c^2}{1+u_x'v/c^2}\frac{d}{dt'}(\gamma_1'u_x') \tag{7.3.12}$$

La (7.3.11) diventa:

$$\begin{aligned} F_x = & \frac{m_0}{1+u_x'v/c^2}\frac{d}{dt'}(\gamma_1'u_x') + \frac{m_0 v}{1+u_x'v/c^2}\frac{d\gamma_1'}{dt'} + \\ & \frac{m_0 u_x'v/c^2}{1+u_x'v/c^2}\frac{d}{dt'}(\gamma_1'u_x') - \frac{m_0 u_x'v/c^2}{1+u_x'v/c^2}\frac{d}{dt'}(\gamma_1'u_x') = \\ & = \frac{m_0}{1+u_x'v/c^2}\left(1+u_x'\frac{v}{c^2}\right)\frac{d}{dt'}(\gamma_1'u_x') + \\ & \frac{m_0 v}{1+u_x'v/c^2}\left[\frac{d\gamma_1'}{dt'} - \frac{u_x'}{c^2}\frac{d}{dt'}(\gamma_1'u_x')\right] = \\ & = F_x' + \frac{m_0 v}{1+u_x'v/c^2}\left[\frac{d\gamma_1'}{dt'} - \frac{u_x'^2}{c^2}\frac{d\gamma_1'}{dt'} - \frac{u_x'\gamma_1'}{c^2}\frac{du_x'}{dt'}\right] = \\ & = F_x' + \frac{m_0 v}{1+u_x'v/c^2}\left[\frac{d\gamma_1'}{dt'}\left(1-\frac{u_x'^2}{c^2}\right) - \gamma_1'\frac{u_x'}{c^2}\frac{du_x'}{dt'}\right] \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

Consideriamo il termine $\left(1-\frac{u_x'^2}{c^2}\right)$; esso si puó cosí trasformare:

$$\mathbf{1}-\frac{\mathbf{u_x'^2}}{\mathbf{c^2}} = 1-\frac{u'^2-u_y'^2-u_z'^2}{c^2} = \left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)+\frac{u_y'^2}{c^2}+\frac{u_z'^2}{c^2} = \frac{\mathbf{1}}{\gamma_{\mathbf{1}}'^{\mathbf{2}}}+\frac{\mathbf{u_y'^2}}{\mathbf{c^2}}+\frac{\mathbf{u_z'^2}}{\mathbf{c^2}} \tag{7.3.14}$$

Differenziamo l'espressione (7.3.14) (il primo e ultimo termine) rispetto a t':

$$-2\frac{u_x'}{c^2}\frac{du_x'}{dt'} = 2\frac{u_y'}{c^2}\frac{du_y'}{dt'} + 2\frac{u_z'}{c^2}\frac{du_z'}{dt'} - \frac{2}{\gamma_1'^3}\frac{d\gamma_1'}{dt'} \tag{7.3.15}$$

Moltiplicando per $\gamma\,'_1$ e dividendo per 2 si ottiene:

$$-\gamma\,'_1\frac{u\,'_x}{c^2}\frac{du\,'_x}{dt\,'}=\gamma\,'_1\frac{u\,'_y}{c^2}\frac{du\,'_y}{dt\,'}+\gamma\,'_1\frac{u\,'_z}{c^2}\frac{du\,'_z}{dt\,'}-\frac{1}{\gamma\,'^2_1}\frac{d\gamma\,'_1}{dt\,'} \tag{7.3.16}$$

Sostituendo la (7.3.14) e la (7.3.16) nella (7.3.13) si ha:

$$\begin{aligned}F_x = F\,'_x+ &\\ \frac{m_0v}{1+u\,'_xv/c^2}\left[\left(\frac{1}{\gamma\,'^2_1}+\frac{u\,'^2_y}{c^2}+\frac{u\,'^2_z}{c^2}\right)\frac{d\gamma\,'_1}{dt\,'}+\gamma\,'_1\frac{u\,'_y}{c^2}\frac{du\,'_y}{dt\,'}+\gamma\,'_1\frac{u\,'_z}{c^2}\frac{du\,'_z}{dt\,'}-\frac{1}{\gamma\,'^2_1}\frac{d\gamma\,'_1}{dt\,'}\right]&=\\ =F\,'_x+\frac{m_0v}{1+u\,'_xv/c^2}\left[\frac{u\,'^2_y}{c^2}\frac{d\gamma\,'_1}{dt\,'}+\frac{\gamma\,'_1u\,'_y}{c^2}\frac{du\,'_y}{dt\,'}+\frac{u\,'^2_z}{c^2}\frac{d\gamma\,'_1}{dt\,'}+\frac{\gamma\,'_1u\,'_z}{c^2}\frac{du\,'_z}{dt\,'}\right]&=\\ =F\,'_x+\frac{m_0v}{c^2\left(1+u\,'_xv/c^2\right)}\left[u\,'_y\frac{d}{dt\,'}(\gamma\,'_1u\,'_y)+u\,'_z\frac{d}{dt\,'}(\gamma\,'_1u\,'_z)\right]&\end{aligned} \tag{7.3.17}$$

In definitiva abbiamo ottenuto:

$$\mathbf{F_x=F\,'_x+u\,'_y\frac{v}{c^2+u\,'_xv}F\,'_y+u\,'_z\frac{v}{c^2+u\,'_xv}F\,'_z} \tag{7.3.18}$$

La relazione inversa é:

$$\mathbf{F\,'_x=F_x-u_y\frac{v}{c^2-u_xv}F_y-u_z\frac{v}{c^2-u_xv}F_z} \tag{7.3.19}$$

Analogamente a quanto fatto per F_x, possiamo procedere al calcolo di F_y ed F_z.

$$F_y=m_0\frac{d}{dt}(\gamma_1u_y)=m_0\frac{d}{dt\,'}(\gamma_1u_y)\frac{dt\,'}{dt}=\frac{m_0}{\gamma(1+u\,'_xv/c^2)}\frac{d}{dt\,'}(\gamma_1u_y) \tag{7.3.20}$$

Consideriamo l'espressione (7.2.4):

$$\gamma_1=\gamma\gamma\,'_1\left(1+u\,'_x\frac{v}{c^2}\right)$$

e moltiplichiamo ambo i membri per u_y

$$u_y\gamma_1=u_y\gamma\gamma\,'_1\left(1+u\,'_x\frac{v}{c^2}\right) \tag{7.3.21}$$

Sostituiamo al secondo membro dell'equazione (7.3.21) l'espressione di u_y data dalla (7.1.10):

$$u_y=\frac{u\,'_y/\gamma}{1+u\,'_xv/c^2}$$

L'equazione (7.3.21), allora, diventa:

$$\mathbf{u_y}\gamma_\mathbf{1} = \frac{u\ '_y/\gamma}{1+u\ '_x v/c^2}\gamma\gamma\ '_1\left(1+u\ '_x\frac{v}{c^2}\right) = \gamma\ '_\mathbf{1}\mathbf{u}\ '_\mathbf{y} \tag{7.3.22}$$

Sostituendo l'equazione (7.3.22) nell'espressione (7.3.20), si ha:

$$\mathbf{F_y} = \frac{m_0}{\gamma(1+u\ '_x v/c^2)}\frac{d}{dt\ '}(\gamma\ '_1 u\ '_y) = \frac{\mathbf{1}}{\gamma(\mathbf{1}+\mathbf{u}\ '_\mathbf{x}\mathbf{v}/\mathbf{c^2})}\mathbf{F}\ '_\mathbf{y} \tag{7.3.23}$$

L'espressione (7.3.23) puó esprimersi in altra forma, esplicitando γ e moltiplicando numeratore e denominatore per c^2. Si ha:

$$\mathbf{F_y} = \frac{\mathbf{c^2}\sqrt{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{c^2}}}}{\mathbf{c^2}+\mathbf{u}\ '_\mathbf{x}\mathbf{v}}\mathbf{F}\ '_\mathbf{y} \tag{7.3.24}$$

Analogamente per F_z, si ottiene:

$$\mathbf{F_z} = \frac{\mathbf{c^2}\sqrt{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{c^2}}}}{\mathbf{c^2}+\mathbf{u}\ '_\mathbf{x}\mathbf{v}}\mathbf{F}\ '_\mathbf{z} \tag{7.3.25}$$

Le espressioni inverse sono:

$$\mathbf{F}\ '_\mathbf{y} = \frac{\mathbf{1}}{\gamma(\mathbf{1}-\mathbf{u_x}\mathbf{v}/\mathbf{c^2})}\mathbf{F_y} \tag{7.3.26}$$

$$\mathbf{F}\ '_\mathbf{z} = \frac{\mathbf{1}}{\gamma(\mathbf{1}-\mathbf{u_x}\mathbf{v}/\mathbf{c^2})}\mathbf{F_z} \tag{7.3.27}$$

oppure:

$$\mathbf{F}\ '_\mathbf{y} = \frac{\mathbf{c^2}\sqrt{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{c^2}}}}{\mathbf{c^2}-\mathbf{u_x}\mathbf{v}}\mathbf{F_y} \tag{7.3.28}$$

$$\mathbf{F}\ '_\mathbf{z} = \frac{\mathbf{c^2}\sqrt{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{c^2}}}}{\mathbf{c^2}-\mathbf{u_x}\mathbf{v}}\mathbf{F_z} \tag{7.3.29}$$

7.4 - Espressione della legge di trasformazione delle forze in forma compatta

Si puó verificare che la legge di trasformazione delle forze in sistemi di riferimento diversi, **comunque in moto rettilineo uniforme**, é:

$$\vec{\mathbf{F}}\ ' = \frac{\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{v^2}}\vec{\mathbf{v}} + \gamma\left(\frac{\vec{\mathbf{v}}\times(\vec{\mathbf{F}}\times\vec{\mathbf{v}})}{\mathbf{v^2}} + \frac{\vec{\mathbf{u}}\ '\times(\vec{\mathbf{F}}\times\vec{\mathbf{v}})}{\mathbf{c^2}}\right) \tag{7.4.1}$$

La verifica é facile nel caso, da noi studiato, in cui $\vec{v} = v\widehat{x}$.

Ricapitolando, le formule che esprimono le componenti della forza in sistemi di riferimento inerziali sono:

$$\mathbf{F_x} = \mathbf{F}\,'_{\mathbf{x}} + \mathbf{u}\,'_{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c^2} + \mathbf{u}\,'_{\mathbf{x}}\mathbf{v}} \mathbf{F}\,'_{\mathbf{y}} + \mathbf{u}\,'_{\mathbf{z}} \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c^2} + \mathbf{u}\,'_{\mathbf{x}}\mathbf{v}} \mathbf{F}\,'_{\mathbf{z}} \tag{7.4.2}$$

$$\mathbf{F_y} = \frac{\mathbf{1}}{\gamma(\mathbf{1} + \mathbf{u}\,'_{\mathbf{x}}\mathbf{v}/\mathbf{c^2})} \mathbf{F}\,'_{\mathbf{y}} \tag{7.4.3}$$

$$\mathbf{F_z} = \frac{\mathbf{1}}{\gamma(\mathbf{1} + \mathbf{u}\,'_{\mathbf{x}}\mathbf{v}/\mathbf{c^2})} \mathbf{F}\,'_{\mathbf{z}} \tag{7.4.4}$$

Quelle inverse sono:

$$\mathbf{F}\,'_{\mathbf{x}} = \mathbf{F_x} - \mathbf{u_y} \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c^2} - \mathbf{u_x}\mathbf{v}} \mathbf{F_y} - \mathbf{u_z} \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c^2} - \mathbf{u_x}\mathbf{v}} \mathbf{F_z} \tag{7.4.5}$$

$$\mathbf{F}\,'_{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{1}}{\gamma(\mathbf{1} - \mathbf{u_x}\mathbf{v}/\mathbf{c^2})} \mathbf{F_y} \tag{7.4.6}$$

$$\mathbf{F}\,'_{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{1}}{\gamma(\mathbf{1} - \mathbf{u_x}\mathbf{v}/\mathbf{c^2})} \mathbf{F_z} \tag{7.4.7}$$

In forma compatta, si ha:

$$\vec{\mathbf{F}}\,' = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{v^2}} \vec{\mathbf{v}} + \gamma \left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \times (\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{v}})}{\mathbf{v^2}} + \frac{\vec{\mathbf{u}}\,' \times (\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{v}})}{\mathbf{c^2}} \right) \tag{7.4.8}$$

7.5 - Invarianza della carica

Esiste una evidenza sperimentale decisiva secondo la quale la carica totale di un sistema non viene alterata dal moto dei portatori di carica. Per dimostrarlo possiamo riferirci alla esatta neutralitá degli atomi e delle molecole.

In un esperimento molto sensibile fu inviato un fascio di atomi di cesio molto ben collimato, sotto vuoto spinto, attraverso un intenso campo elettrico. Dall'assenza di una qualsiasi deflessione apprezzabile si poté concludere che la carica netta di un atomo deve essere inferiore a $10^{-16}e$. Un esperienza con sensibilitá ancora piú spinta é stata realizzata sull'idrogeno sempre con esito negativo.

7.6 - Validitá della legge di Coulomb nel caso di moto della carica test

Gli esperimenti di Coulomb e altri stabiliscono che la forza che una carica stazionaria q_1 esercita su una carica stazionaria q_2 é:

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\widehat{e}_r \tag{7.6.1}$$

Se la particella carica test q_2 é in moto mentre la carica q_1 é stazionaria come per esempio accade se si lancia la carica q_2 fra le armature di un condensatore, misure sperimentali di deflessione della particella mostrano che la forza sulla carica in moto é ancora data dalla legge $\vec{F} = q_2\vec{E}$. Questo rimane vero qualunque sia la velocitá della particella test, anche prossima a quella della luce.

Quando, tuttavia, esiste un moto delle cariche sorgenti, una particella carica in moto é sottoposta ad una forza:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q_2}\vec{\mathbf{E}} + \mathbf{q_2}\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad \textbf{sistema S.I.} \tag{7.6.2}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q_2}\vec{\mathbf{E}} + \frac{\mathbf{q_2}}{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad \textbf{sistema C.G.S.} \tag{7.6.3}$$

$\vec{B}$ viene chiamato vettore **induzione magnetica** o talvolta campo magnetico.

Poiché tutti i sistemi di riferimento inerziali sono fisicamente equivalenti, la distinzione fra gli effetti dovuti a cariche in moto non puó essere accettata come fondamentale. É una distinzione che dipende dal particolare sistema di riferimento usato. Una carica test che si muove rispetto ad un sistema, e quindi sottoposta ad una forza magnetica, é stazionaria rispetto ad un altro sistema di riferimento e quindi ivi non é sottoposta ad alcuna forza magnetica. Analogamente in un sistema di riferimento in cui la carica sorgente é ferma e la carica test é in moto.

7.7 - Forza fra carica sorgente in moto e carica test stazionaria.

Caso I - La carica sorgente q_1 si muove con velocitá costante $(v, 0, 0)$ rispetto ad un sistema di riferimento S, e per $t = 0$ si trovi nell'origine di S. La carica test q_2 é stazionaria sull'asse x nel punto $(x, 0, 0)$.

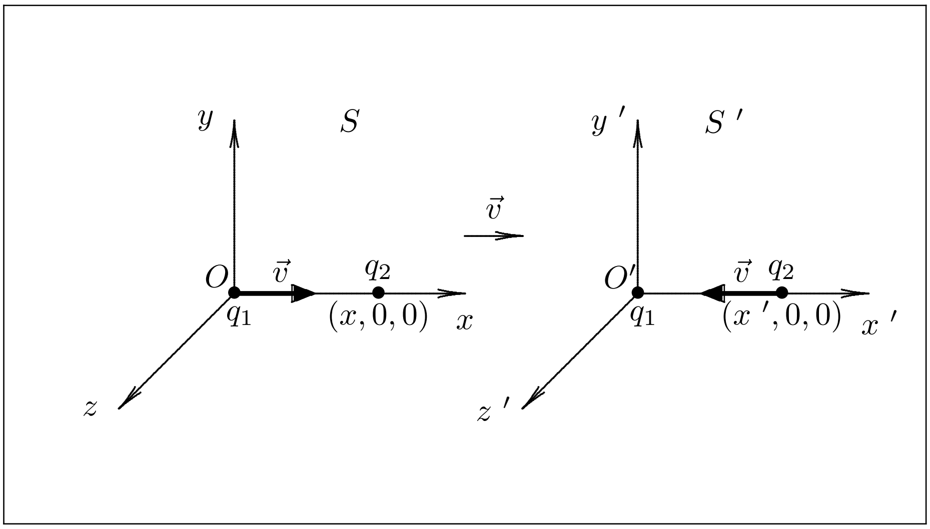

fig.7.7-1

Non possiamo direttamente applicare la legge di Coulomb $F_x = k\frac{q_1 q_2}{x^2}$ per trovare la forza che agisce su q_2, perché q_1 si muove e la validitá della legge di Coulomb **non puó essere assunta quando la carica sorgente é in moto**.

Consideriamo quindi un sistema di riferimento $S\,'$ che si muove con velocitá $\vec{v} \equiv (v, 0, 0)$ rispetto ad S. In $S\,'$ la carica sorgente q_1 é a riposo nell'origine e la carica test q_2 si muove lungo l'asse $\vec{x}\,'$ con velocitá $\vec{u}\,' = (-v, 0, 0)$.

Le coordinate spazio - temporali della carica q_2 nei due sistemi di riferimento sono:

$$\textit{In } S: \qquad (x, 0, 0, 0) \qquad\qquad \textit{In } S\,': \qquad (x\,', 0, 0, t\,') \tag{7.7.1}$$

Le coordinate spazio - temporali della carica q_1 nei due sistemi di riferimento sono:

$$\textit{In } S: \qquad (0, 0, 0, 0) \qquad\qquad \textit{In } S\,': \qquad (0, 0, 0, 0) \tag{7.7.2}$$

Le trasformazioni di Lorentz competenti ai nostri due sistemi di riferimento sono:

$$x\,' = \gamma(x - vt), \quad y\,' = y, \quad z\,' = z, \quad t\,' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \tag{7.7.3}$$

Lo spirito del nostro calcolo é quello di valutare la forza fra q_1 e q_2 quando nel sistema di riferimento S é $t = 0$.

Ponendo $t = 0$ nelle formule (7.7.3), le trasformazioni da applicare diventano:

$$x\,' = \gamma x, \quad y\,' = y, \quad z\,' = z, \quad t\,' = -\gamma \frac{vx}{c^2} \tag{7.7.4}$$

La forza $\vec{F}$ che si esercita fra q_1 e q_2 in $S\,'$ é descritta dalla legge di Coulomb perché ivi la carica sorgente é ferma; si ha:

$$F\,'_x = k\frac{q_1 q_2}{x\,'^2}, \qquad F\,'_y = 0, \qquad F\,'_z = 0 \tag{7.7.5}$$

Trasformiamo queste relazioni con riferimento al sistema S usando le trasformazioni delle forze da noi calcolate precedentemente.

Tenendo conto che:

$$u\,'_x = -v, \quad u\,'_y = 0, \quad u\,'_z = 0$$

otteniamo:

$$F_x = F\,'_x = k\frac{q_1 q_2}{x\,'^2}, \qquad F_y = 0, \qquad F_z = 0 \tag{7.7.6}$$

In questo caso, la forza su q_2 misurata in S al tempo $t = 0$ ha lo stesso valore di quella misurata in $S\,'$ al tempo $t\,'$. Ma la distanza fra q_1 e q_2 misurata in $S\,'$ al tempo $t = 0$ é correlata alla corrispondente distanza in S dalla relazione $\mathbf{x}\,' = \gamma\mathbf{x}$; quindi:

$$F_x = k\frac{q_1 q_2}{\gamma^2 x^2} \tag{7.7.7}$$

Questo vuol dire che la forza che agisce fra due cariche quando la carica sorgente si muove lungo la direzione x é $\frac{1}{\gamma^2}$ volte minore di quella che agisce se le due cariche fossero stazionarie.

Riportiamo nella seguente tabella i valori di γ corrispondenti ad alcuni valori della velocitá.

$\mathbf{\frac{v}{c}}$	γ	$\boldsymbol{\gamma^2}$	$\mathbf{\frac{1}{\gamma^2}}$
0	1		
.1	1.005037		
.2	1.020620		
.3	1.048	1.098	.91
.4	1.091	1.19047	.84
.5	1.1547	1.33	.75
.6	1.25	1.5625	.64
.7	1.40	1.96	.51

A titolo di esempio calcoliamo γ per $v = 100$ Km/h= $27.77 m/s$. Risulta: $\frac{v}{c} = 9.25 \cdot 10^{-8} \rightarrow \gamma \simeq 1$

Caso II - Consideriamo una seconda situazione in cui la carica test q_2 é stazionaria sull'asse y nel punto $(0, y, 0)$. La sorgente q_1 si muova lungo l'asse x con velocitá $(v, 0, 0)$ rispetto a S, e al tempo $t = 0$ é posta nell'origine.

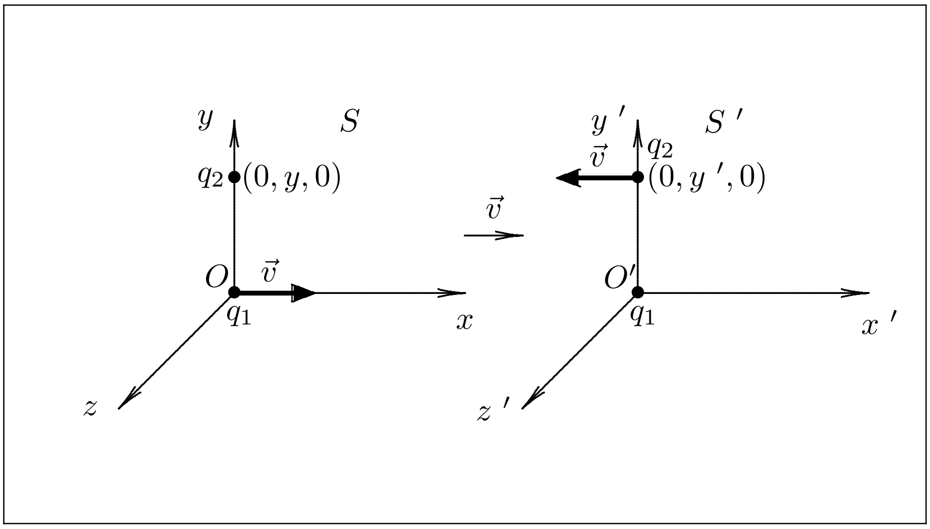

fig.7.7-2

In $S\,'$, che si muove con velocitá $(v,0,0)$ rispetto ad S, le coordinate di q_2 al tempo $t=0$ sono:

$$Per\ t=0 \qquad\qquad x\,'=0,\ y\,'=y,\ z\,'=0,\ t\,'=0 \tag{7.7.8}$$

In $S\,'$ q_1 é a riposo e quindi vale la legge di Coulomb:

$$F\,'_x=0, \quad F\,'_y=k\frac{q_1q_2}{y\,'^2}, \quad F\,'_z=0 \tag{7.7.9}$$

Applicando la trasformazione delle forze, tenendo conto che $u\,'_x=-v$, $u\,'_y=0$, e $u\,'_z=0$ si ha:

$$F_x=0, \quad \mathbf{F_y}=\frac{\dfrac{F\,'_y}{\gamma}}{1+\dfrac{u\,'_xv}{c^2}}=\frac{F\,'_y}{\gamma\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}=\gamma F\,'_y=\gamma k\frac{q_1q_2}{y\,'^2}=\gamma\mathbf{k}\frac{\mathbf{q_1q_2}}{\mathbf{y^2}}, \quad F_z=0 \tag{7.7.10}$$

In contrasto con il caso I, in cui la forza era diminuita di $\frac{1}{\gamma^2}$, in questo caso essa aumenta di un fattore γ.

Caso III - Nei casi 1 e 2 la carica test assume delle posizioni speciali rispetto alla carica sorgente. Sia, ora, q_2 stazionaria e situata nel punto generico x,y,z. Sia q_1 la carica sorgente che si muove con velocitá $\vec{v}$ lungo l'asse $\vec{x}$.

Quando $t=0$ in S, la particella q_2 in $S\,'$ avrá le coordinate

$$x\,'=\gamma x, \quad y\,'=y, \quad z\,'=z, \quad t\,'=-\gamma v\frac{x}{c^2} \tag{7.7.11}$$

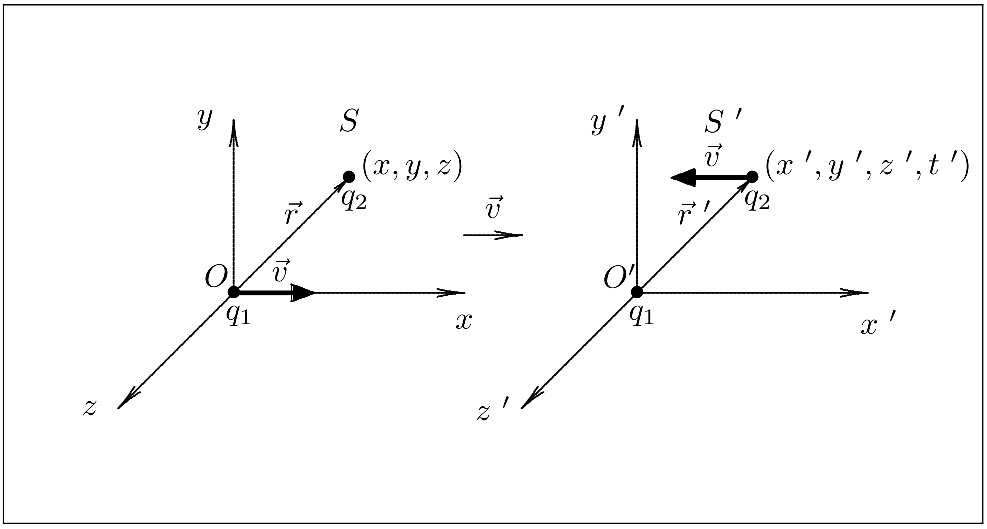

fig.7.7-3

In S' q_1 é stazionaria, pertanto possiamo sfruttare la legge di Coulomb:

$$F'_x = kq_1q_2\frac{x'}{r'^3}, \quad F'_y = kq_1q_2\frac{y'}{r'^3}, \quad F'_z = kq_1q_2\frac{z'}{r'^3} \tag{7.7.12}$$

Dalle equazioni di trasformazione delle forze, tenedo conto che: $u'_x = -v$, $u'_y = 0$, $u'_z = 0$, si ha:

$$F_x = F'_x, \quad F_y = \gamma F'_y, \quad F_z = \gamma F'_z \tag{7.7.13}$$

Cosí:

$$F_x = kq_1q_2\frac{x'}{r'^3}, \quad F_y = k\gamma q_1q_2\frac{y'}{r'^3}, \quad F_z = k\gamma q_1q_2\frac{z'}{r'^3} \tag{7.7.14}$$

Tenendo presente che:

$$r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} = (\gamma^2x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \tag{7.7.15}$$

le forze nel sistema di riferimento S si scrivono:

$$\begin{aligned} F_x &= kq_1q_2\frac{\gamma x}{(\gamma^2x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ F_y &= kq_1q_2\frac{\gamma y}{(\gamma^2x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ F_z &= kq_1q_2\frac{\gamma z}{(\gamma^2x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{7.7.16}$$

Questo risultato puó essere combinato in una singola equazione vettoriale:

$$\vec{F} = kq_1q_2\frac{\gamma\vec{r}}{(\gamma^2x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.7.17}$$

Ne segue che **il campo elettrico $\vec{E}$ dovuto alla carica q_1 in moto** é:

$$\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{kq_1}\frac{\gamma\vec{\mathbf{r}}}{(\gamma^2\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.7.18}$$

Esaminiamo il campo $\vec{\mathbf{E}}$ nel piano xy, cioé poniamo $z=0$ nell'equazione (7.7.18):

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,y,0) &= kq_1\frac{\gamma\vec{r}}{\left[\gamma^2\left(x^2+\dfrac{y^2}{\gamma^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} = kq_1\frac{\vec{r}}{\gamma^2\left(x^2+y^2-y^2+\dfrac{y^2}{\gamma^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= kq_1\frac{\vec{r}}{\gamma^2\left\{r^2\left[1-\dfrac{y^2}{r^2}\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)\right]\right\}^{\frac{3}{2}}} = kq_1\frac{\vec{r}}{\gamma^2 r^3\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\dfrac{y^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{7.7.19}$$

dove: $r^2 = x^2+y^2$

Il campo é sempre radiale ma di intensitá variabile a seconda della direzione; infatti se θ é l'angolo fra il vettore posizione $\vec{r}$ e l'asse x, possiamo scrivere: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e, quindi il modulo di $\vec{E}$ si scrive:

$$E = k\frac{q_1}{r^2}\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.7.20}$$

Per velocitá piccole rispetto a quella della luce risulta, ovviamente, dalla (7.7.18) che il campo é: $\simeq k\dfrac{q_1}{r^2}$ cioé esso é a simmetria sferica circa prossimo a quello di un campo statico.

Tuttavia se $\dfrac{v^2}{c^2}$ non é piú trascurabile rispetto a 1, il campo non é piú a simmetria sferica ma é piú intenso nella direzione perpendicolare al moto che non nella direzione del moto. Se dovessimo indicare l'intensitá del campo per mezzo della densitá delle sue linee di forza, come si fa spesso, queste tenderebbero a concentrarsi in una calotta quasi piatta, perpendicolare alla direzione del moto.

Grafichiamo la funzione:

$$F(\theta) = \frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.7.21}$$

che ci fornisce il diagramma polare dell'intensitá del campo elettrico in funzione dell'angolo θ di osservazione rispetto alla direzione di velocitá della particella carica.

$\beta = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}} = .4$

θ	$\mathbf{F}(\theta)$
0	0.840
30^0	0.893
45^0	0.952
60^0	1.017
75^0	1.070
90^0	1.091

$\beta = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}} = .8$

θ	$\mathbf{F}(\theta)$
0	0.360
30^0	0.468
45^0	0.642
60^0	0.960
75^0	1.408
90^0	1.666

Campo elettrico generato da carica puntiforme in moto rettilineo uniforme

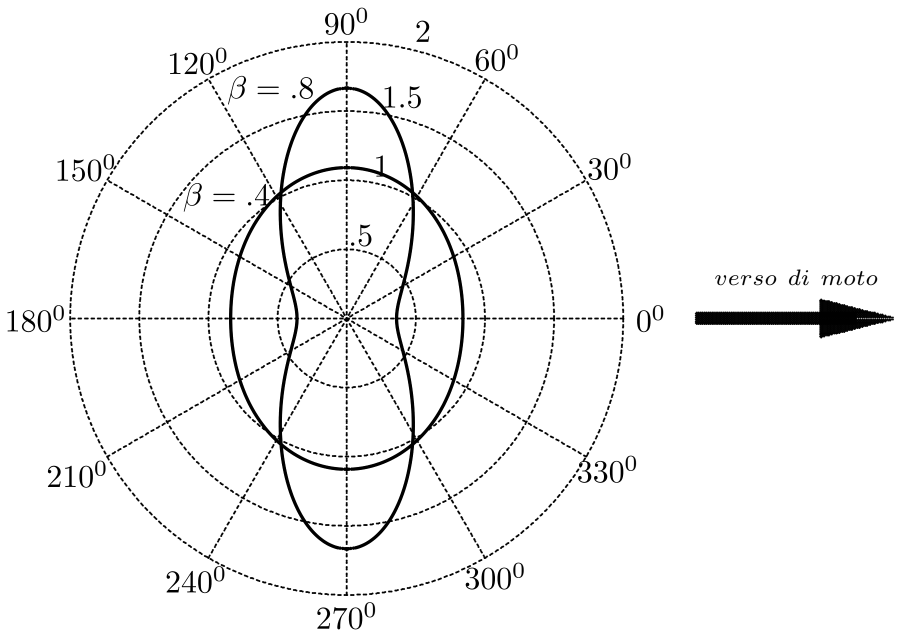

fig.7.7-4

É importante osservare che per particelle fortemente relativistiche, il campo é molto piú intenso nelle direzioni ortogonali alla direzione di moto rispetto all'intensitá lungo la direzione di moto.

7.8 - Forza fra carica sorgente in moto e carica test in moto

Caso I - Sia q_1 la carica sorgente e q_2 la carica test entrambe in moto con la stessa velocitá $(v, 0, 0)$ rispetto al sistema S. All'istante $t = 0$ q_1 si trova nell'origine e q_2 sull'asse y nel punto di coordinate (0,y,0). Non possiamo, come al solito, applicare la legge di Coulomb in quanto la carica sorgente é in moto.

Consideriamo un sistema $S\,'$ solidale ad entrambe le cariche.

Le trasformazioni di Lorentz:

$$x\,' = \gamma(x - vt), \quad y\,' = y, \quad z\,' = z, \quad t\,' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

calcolate per $t = 0$, $x = 0$ e $z = 0$, diventano:

$$\textbf{Posizione di } \mathbf{q_1} \qquad \{x\,' = 0 \; y\,' = 0 \; z\,' = 0 \; t\,' = 0\}$$

$$\textbf{Posizione di } \mathbf{q_2} \qquad \{x\,' = 0 \; y\,' = y \; z\,' = 0 \; t\,' = 0\}$$

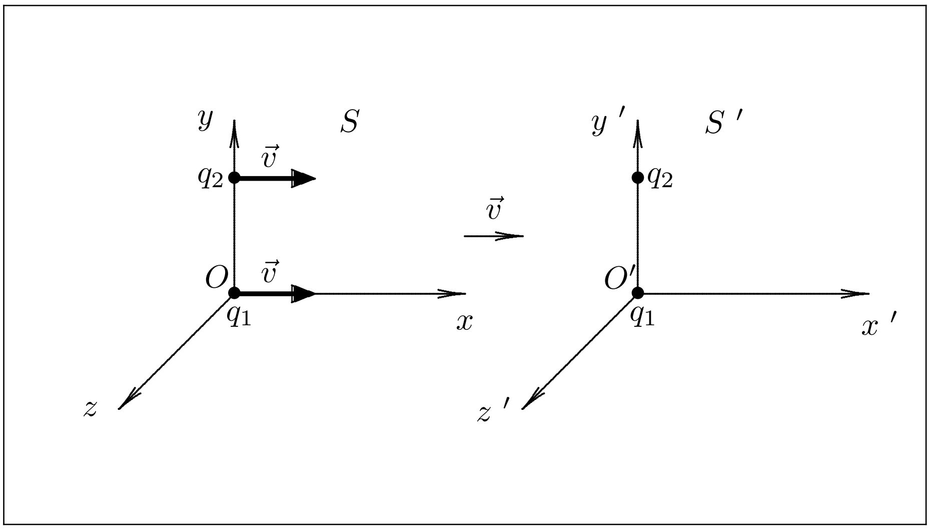

fig.7.8-1

In **S** $'$ possiamo applicare la legge di Coulomb in quanto le cariche sono entrambe stazionarie; si ha:

$$F\,'_x = 0, \qquad F\,'_y = k\frac{q_1 q_2}{y\,'^2}, \qquad F\,'_z = 0 \tag{7.8.1}$$

Effettuiamo, ora, la trasformazione delle forze applicando la (7.4.2), la (7.4.3) e la (7.4.4) che, per comoditá trascriviamo:

$$\mathbf{F_x} = \mathbf{F\,'_x} + \mathbf{u\,'_y}\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c^2} + \mathbf{u\,'_x v}}\mathbf{F\,'_y} + \mathbf{u\,'_z}\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c^2} + \mathbf{u\,'_x v}}\mathbf{F\,'_z} \tag{7.8.2}$$

$$\mathbf{F_y} = \frac{\mathbf{1}}{\gamma(\mathbf{1} + \mathbf{u}\ '_{\mathbf{x}}\mathbf{v}/\mathbf{c^2})}\mathbf{F}\ '_{\mathbf{y}} \tag{7.8.3}$$

$$\mathbf{F_z} = \frac{\mathbf{1}}{\gamma(\mathbf{1} + \mathbf{u}\ '_{\mathbf{x}}\mathbf{v}/\mathbf{c^2})}\mathbf{F}\ '_{\mathbf{z}} \tag{7.8.4}$$

Poiché in $\mathbf{S}\ '$ $u\ '_x = u\ '_y = u\ '_z = 0$, si ha:

$$F_x = 0, \qquad F_y = \frac{1}{\gamma}F\ '_y = \frac{1}{\gamma}k\frac{q_1 q_2}{y^2}, \qquad F_z = 0 \tag{7.8.5}$$

Confrontiamo, ora, questo risultato con quello ottenuto nel caso di "Forza agente fra carica sorgente in moto e carica test stazionaria".

Troviamo un risultato affascinante:

$$\mathbf{F_{y_{q_2\ stazionaria\ in\ (0,y,0)}}} = \gamma\mathbf{k}\frac{\mathbf{q_1 q_2}}{\mathbf{y^2}} \tag{7.8.6}$$

$$\mathbf{F_{y_{q_2\ in\ moto\ in\ (0,y,0)}}} = \frac{\mathbf{1}}{\gamma}\mathbf{k}\frac{\mathbf{q_1 q_2}}{\mathbf{y^2}} \tag{7.8.7}$$

cioé:

$$\mathbf{F_{q_2\ in\ moto}} = \mathbf{F_{q_2\ staz.}} - \frac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{c^2}}\gamma\mathbf{k}\frac{\mathbf{q_1 q_2}}{\mathbf{y^2}} \tag{7.8.8}$$

Il termine differenza che si manifesta nella (7.8.8) rappresenta una **"nuova forza" dovuta all'effetto del moto di** q_2. Essa prende il nome di **forza magnetica** (esercitata sulla carica test in moto dalla carica sorgente anch'essa in moto).

Se q_1 e q_2 sono dello stesso segno, la forza magnetica é di **attrazione** fra cariche che viaggiano nella stessa direzione.

Caso II - Consideriamo, ora, un problema identico al Caso I eccetto per il fatto che la carica q_2 ha una velocitá u_x diversa da v ma ancora parallela ad essa.

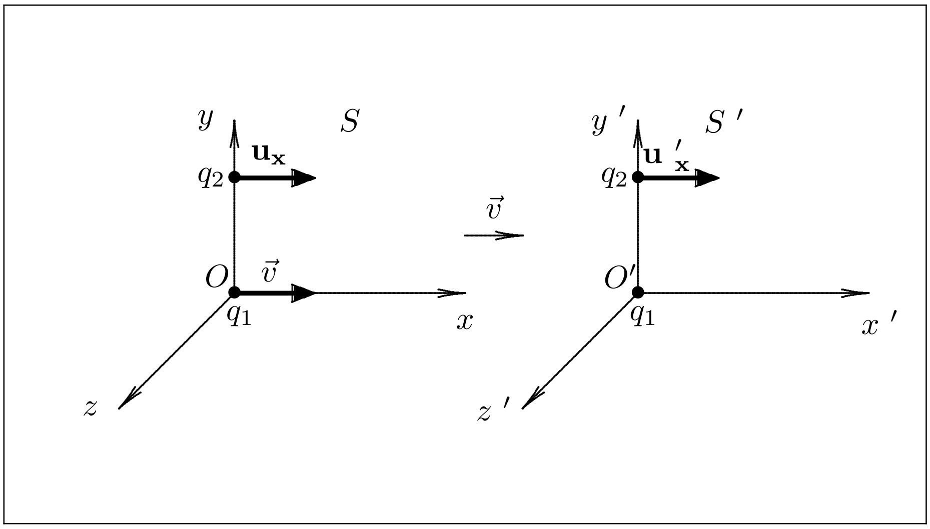

fig.7.8-2

In **S** $'$ possiamo applicare la legge di Coulomb ottenendo:

$$F'_x = 0, \qquad F'_y = k\frac{q_1 q_2}{y'^2}, \qquad F'_z = 0 \tag{7.8.9}$$

Applichiamo le leggi di trasformazione delle forze, tenendo conto che in **S** $'$ risulta:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = u'_z = 0$$

Pertanto le forze trasformate sono:

$$\begin{aligned} F_x &= 0, \\ F_y &= \frac{1}{\gamma\left(1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}\right)} F'_y = \frac{1}{\gamma\left[\dfrac{c^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)}\right]} F'_y = \\ &= \gamma F'_y\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) = \gamma k\frac{q_1 q_2}{y^2}\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right), \\ F_z &= 0 \end{aligned} \tag{7.8.10}$$

In questo caso la forza **magnetica** é:

$$F_{magn} = -\gamma\frac{vu_x}{c^2} k\frac{q_1 q_2}{y^2} = -\frac{vu_x}{c^2} F_{elettrica} \tag{7.8.11}$$

ed é diretta **lungo l'asse y**.

Caso III - Poniamo, ora, la carica q_2 sempre sull'asse y nel punto (0,y,0) rispetto ad S ed assumiamo, peró, che si muova lungo l'asse y con velocitá $\vec{u} \equiv (0, u_y, 0)$.

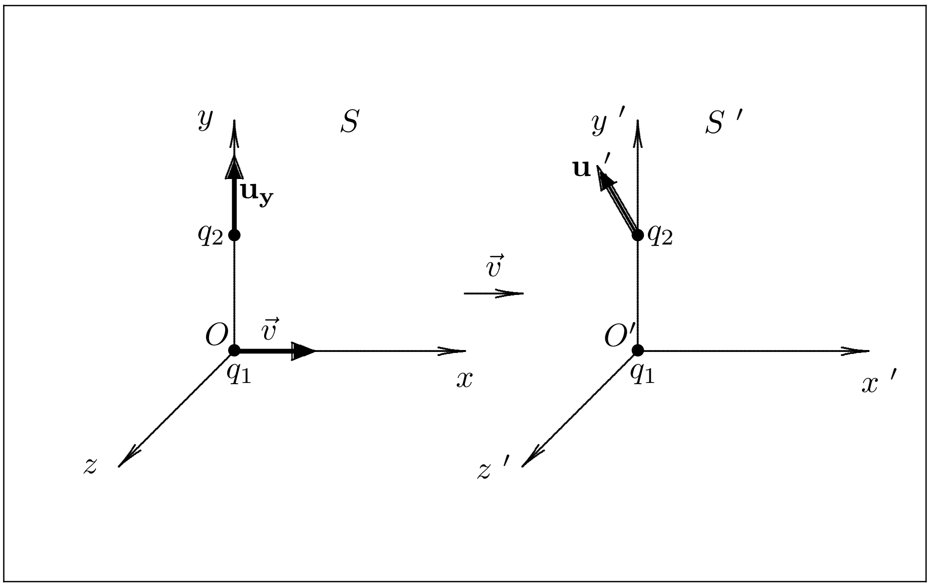

fig.7.8-3

Consideriamo, al solito, un sistema di riferimento $\mathbf{S}\,'$ che si muova lungo l'asse x rispetto al sistema S con velocitá v in modo che la carica sorgente q_1 é stazionaria rispetto ad $S\,'$.

Rispetto ad $S\,'$ le forze sono, allora, date dalla legge di Coulomb:

$$F\,'_x = 0, \qquad F\,'_y = k\frac{q_1 q_2}{y\,'^2}, \qquad F\,'_z = 0 \tag{7.8.12}$$

Applichiamo le leggi di trasformazione delle forze, tenendo conto che in $S\,'$ le componenti della velocitá di q_2 risultano:

$$u\,'_x = -v, \qquad u\,'_y = \frac{u_y}{\gamma}, \qquad u\,'_z = 0$$

Pertanto le forze trasformate sono:

$$\begin{aligned} F_x = \frac{v u_y}{\gamma\,(c^2 - v^2)} k \frac{q_1 q_2}{y^2} = \frac{v u_y}{c^2}\gamma k \frac{q_1 q_2}{y^2}, \\ F_y = \gamma k \frac{q_1 q_2}{y^2}, \\ F_z = 0 \end{aligned} \tag{7.8.13}$$

In questo caso osserviamo che la forza **magnetica é diretta lungo l'asse x**.

Caso IV - Poniamo, ora, la carica q_2 sempre sull'asse y nel punto $(0, y, 0)$ ed assumiamo, peró, che si muova lungo l'asse z.

Consideriamo, al solito, un sistema di riferimento $\mathbf{S}\,'$ che si muova lungo l'asse x rispetto al sistema S con velocitá v in modo che la carica sorgente q_1 é stazionaria rispetto ad $S\,'$.

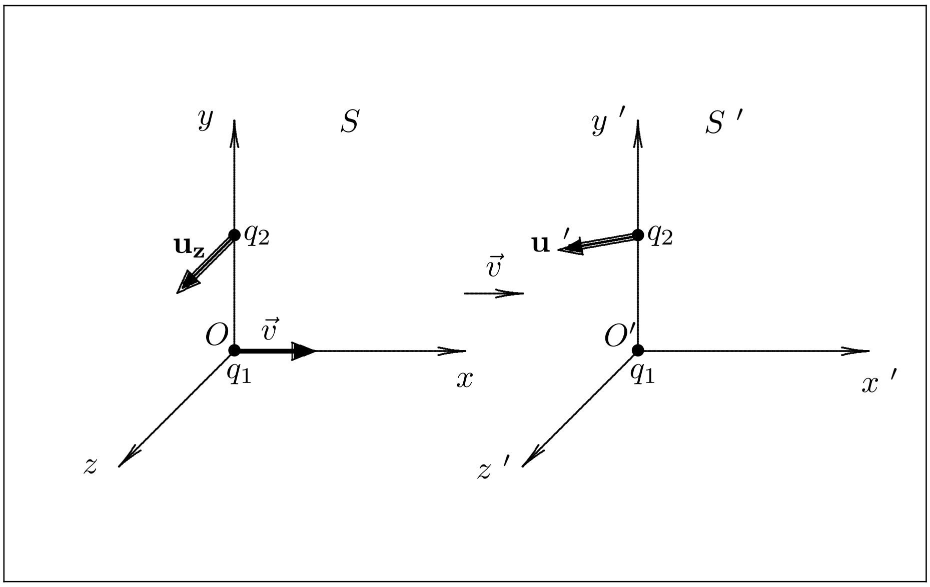

fig.7.8-4

Rispetto ad $S\,'$ le forze sono, allora, date dalla legge di Coulomb:

$$F\,'_x = 0, \quad F\,'_y = k\frac{q_1 q_2}{y\,'^2}, \quad F\,'_z = 0 \tag{7.8.14}$$

Applichiamo le leggi di trasformazione delle forze, tenendo conto che in $S\,'$ le componenti della velocitá di q_2 risultano:

$$u\,'_x = -v, \qquad u\,'_y = 0, \qquad u\,'_z = \frac{u_z}{\gamma}$$

Pertanto le forze trasformate sono:

$$F_x = 0, \quad F_y = \gamma F\,'_y = \gamma k\frac{q_1 q_2}{y^2}, \quad F_z = 0 \tag{7.8.15}$$

Questo risultato é sorprendente, in quanto stabilisce che quando la carica test si muove lungo l'asse z **la forza di natura magnetica sparisce**.

I risultati deducibili da tutti e quattro i casi esaminati si possono distinguere in due classi:

1) Esiste **sempre** una forza **elettrica** che agisce lungo la direzione q_1q_2 di grandezza pari a $k\gamma\frac{q_1q_2}{r^2}$.

2) Esiste una forza **magnetica** che agisce sulla carica test **nella direzione ortogonale alla direzione di moto** proporzionale alla forza elettrica e ad entrambe le velocitá delle particelle q_1 e q_2. Esiste una particolare direzione di moto (l'asse z) per cui tale forza é nulla.

Dopo aver fissato la posizione della particella e fatto variare la direzione della sua velocitá, continuiamo la nostra analisi variando la posizione della particella q_2 fissandone la direzione di moto (per esempio lungo l'asse $\vec{y}$); vogliamo cosí verificare se e come la posizione della carica test influisce sulla forza magnetica.

Caso V - Sia q_1, come al solito, la carica sorgente posta nell'origine di **S** all'istante $t = 0$ e sia $\vec{v} \equiv (v, 0, 0)$ la sua velocitá. Al medesimo istante q_2 é nel punto $(x, y, 0)$ e si muove lungo l'asse y, con velocita $\vec{u} \equiv (0, u_y, 0)$.

Consideriamo, al solito, un sistema di riferimento **S** $'$ che si muova lungo l'asse $\vec{x}$ rispetto al sistema S con velocitá v in modo che la carica sorgente q_1 é stazionaria rispetto ad $S\,'$.

Rispetto ad **S** $'$ le forze sono, allora, date dalla legge di Coulomb:

$$F\,'_x = kq_1q_2\frac{x\,'}{r\,'^3}, \quad F\,'_y = kq_1q_2\frac{y\,'}{r\,'^3}, \quad F\,'_z = 0 \tag{7.8.16}$$

Applichiamo le leggi di trasformazione delle forze, tenendo conto che in $S\,'$ le componenti della velocitá di q_2 risultano:

$$u\,'_x = -v, \qquad u\,'_y = \frac{u_y}{\gamma}, \qquad u\,'_z = 0$$

e che per $t = 0$ si ha: $x\,' = \gamma x$, $y\,' = y$, $z\,' = 0$.

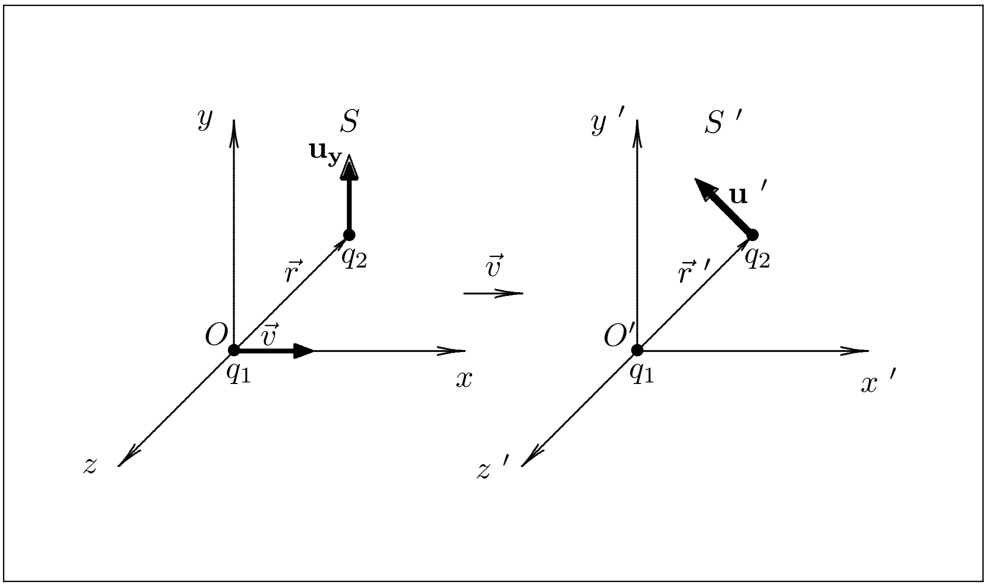

fig.7.8-5

Pertanto le forze trasformate sono:

$$F_x = \gamma k \frac{q_1 q_2}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left(x + \frac{v u_y}{c^2} y \right), \quad F_y = \gamma k q_1 q_2 \frac{y}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_z = 0 \qquad (7.8.17)$$

Dalla (7.8.17) si deduce, chiaramente, che le componenti della forza elettrica sono:

$$F_{x elettrica} = \gamma k \frac{q_1 q_2}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x, \quad F_{y elettrica} = \gamma k q_1 q_2 \frac{y}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_{z elettrica} = 0 \qquad (7.8.18)$$

mentre la forza **magnetica** é:

$$\vec{F}_{magnetica} = \gamma k \frac{q_1 q_2}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{v u_y}{c^2} y \widehat{x} \qquad (7.8.19)$$

Viene, quindi confermata, l'ortogonalitá della forza magnetica rispetto alla direzione di moto indipendentemente dalla posizione della particella q_2.

L'analisi precedente é sufficiente per stabilire che la **forza magnetica** soddisfa una legge vettoriale del tipo:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{magn.}} = \mathbf{q_2} \vec{\mathbf{u}} \times \mathbf{B} \widehat{\mathbf{z}} \qquad (7.8.20)$$

dove B é la quantitá:

$$B = \gamma k \frac{q_1 v y}{c^2 \left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (7.8.21)$$

A sua volta, da una attenta analisi della (7.8.21) si deduce che l'espressione $B\widehat{z}$ si puó scrivere come prodotto vettoriale:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \left(\gamma \frac{kq_1\vec{r}}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tag{7.8.22}$$

La quantitá fra parentesi nella (7.8.22) non é altro che il campo elettrico generato dalla carica in moto q_1, quindi possiamo scrivere:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\left(\vec{v} \times \vec{E}\right) \tag{7.8.23}$$

essendo $\vec{v}$ la velocitá della particella q_1.

In generale, quindi, la forza totale agente su una particella in moto da parte di un'altra particella in moto si puó scrivere come:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q_2}\vec{\mathbf{E}} + \mathbf{q_2}\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{7.8.24}$$

Il vettore $\vec{B}$ prende il nome di vettore induzione magnetica generato dalla particella in moto q_1.

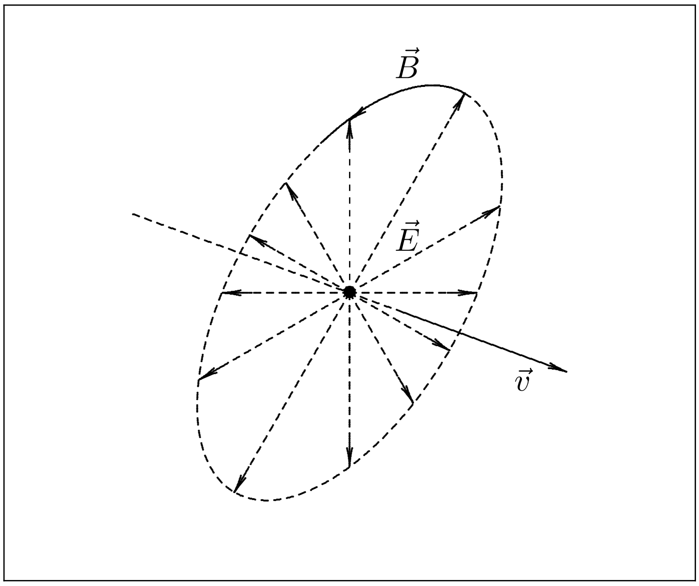

fig.7.8-6

Esso risulta perpendicolare sia al vettore velocitá della carica q_1 che al vettore $\vec{E}$ prodotto da q_1 e **non dipende dallo stato cinematico della carica test**. Chiaramente esso si annulla quando la particella sorgente é in quiete. **La forza magnetica, invece,**

dipende anche dallo stato cinematico della carica test; essa si annulla se la carica test é in quiete.

Le linee di forza di $\vec{B}$ sono quindi delle linee circolari chiuse giacenti nel piano perpendicolare alla direzione di moto della carica producente il campo magnetico e concentriche a codesta direzione stessa.

7.9 - Campo di una distribuzione lineare di cariche in moto

Consideriamo una distribuzione lineare di cariche di densitá λ infinitamente estesa.

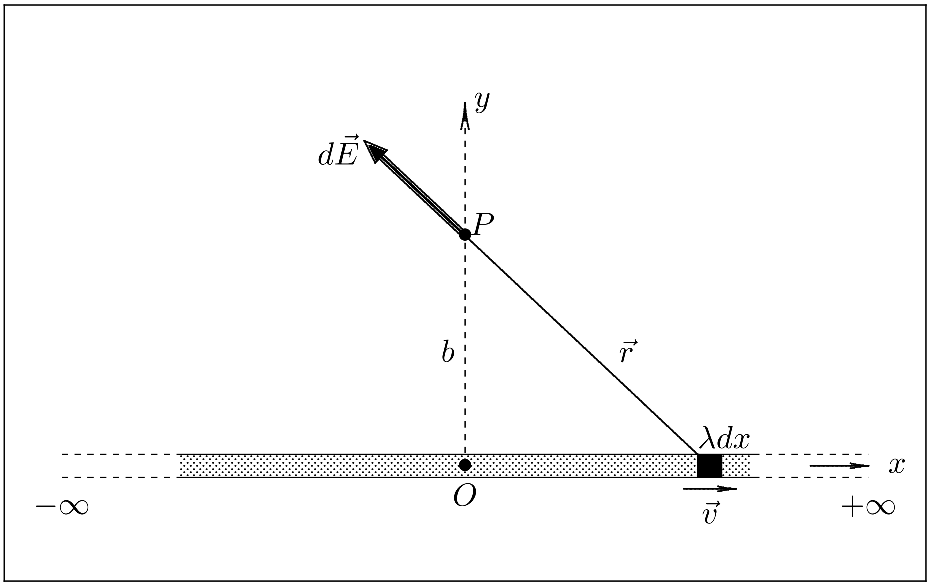

fig.7.9-1

Se le cariche della distribuzione sono ferme nel sistema di riferimento S, come abbiamo giá visto, il campo elettrico generato in un punto a distanza b dal filo é:

$$\vec{E} = 2k\frac{\lambda}{b}\widehat{y} \tag{7.9.1}$$

e non esiste alcun campo magnetico creato da essa.

Supponiamo, ora, che l'intera distribuzione di cariche si muova lungo l'asse $\vec{x}$ con velocitá $\vec{v}$.

Consideriamo un elemento dx di carica $dq = \lambda dx$. Il contributo di esso al campo elettrico in P é dato da:

$$d\vec{E} = k(\lambda dx)\frac{\gamma\vec{r}}{(\gamma^2 x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.9.2}$$

Per calcolare il campo totale bisogna integrare su x che varia da $-\infty$ a $+\infty$. La componente totale lungo l'asse x é, ovviamente, nulla, mentre la componente E_y é:

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\gamma\lambda b dx}{(\gamma^2 x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = 2k\frac{\lambda}{b} \tag{7.9.3}$$

Abbiamo trovato l'importante risultato che **il campo elettrico di un allineamento infinitamente esteso di cariche in moto é esattamente lo stesso di quello competente allo stesso allineamento di cariche stazionarie**.

Valutiamo il campo magnetico generato da tale allineamento:

$$d\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v} \times d\vec{E} \tag{7.9.4}$$

Integrando, tenendo conto che $\vec{v}$ é costante, si ha:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} \tag{7.9.5}$$

Il modulo di $\vec{B}$ é:

$$B = \frac{v}{c^2} 2k\frac{\lambda}{b} \tag{7.9.6}$$

La (7.9.5) mostra come l'effetto magnetico é molto piú piccolo dell'effetto elettrico. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno la stessa direzione e verso, su una carica q_2 che si muove con velocitá $\vec{u}$ si ha:

$$\vec{F}_{magn.} = -q_2\frac{uv}{c^2}\left(2k\frac{\lambda}{b}\right)\widehat{y} \tag{7.9.7}$$

7.10 - Forza magnetica su carica test in moto dovuta ad un filo percorso da corrente

A velocitá ordinarie, la forza magnetica fra due cariche elettriche é molto piccola rispetto alla forza elettrica, per esempio nel caso di due cariche che si muovono nella stessa direzione con velocitá u e v essa é piú piccola del fattore $\frac{uv}{c^2}$. Quindi tale forza puó essere facilmente osservata solo se noi possiamo liberarci dalla forza elettrica. Fortunatamente possiamo fare questo perché in natura esistono sia le cariche positive che quelle negative.

Consideriamo, per esempio un lungo filo di rame; se fra i capi applichiamo un campo elettrico, gli elettroni, che in un conduttore sono liberi di muoversi, si muovono in direzione opposta al campo mentre gli ioni positivi restano fermi. Gli elettroni, detti di conduzione avranno in presenza di campo elettrico una velocitá media $\vec{v}$.

Quale é la forza su una carica test in moto che si trova fuori dal filo? Per semplicitá consideriamo prima una carica test q_2 (per esempio un elettrone) che si muove con la stessa velocitá con la quale si muovono gli elettroni nel filo. Nel sistema di laboratorio le cariche positive e negative producono lo stesso campo elettrico perché abbiamo dimostrato che un allineamento di cariche in moto produce lo stesso campo elettrico di un allineamento di cariche ferme. Tuttavia i versi di tali campi sono, ovviamente opposti. Allora la forza elettrica su q_2 é zero. Peró, poiché essa si muove, é sottoposta alla forza magnetica dovuta al campo di induzione magnetica generato dall'allineamento delle cariche in moto. Ne segue che si ha soltanto una forza magnetica dovuta agli elettroni in moto.

Fine del Cap.7