

Cap. 6

Elettrostatica dei corpi dielettrici: II

6.1 - Sviluppo in serie di multipoli dell'energia di una distribuzione di cariche in un campo elettrico esterno

Se una distribuzione di cariche descritta dalla funzione densità $\rho(\vec{r})$ é situata in un campo elettrico esterno di potenziale $\Phi(\vec{r})$ l'energia elettrostatica del sistema é:

$$W = \int \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})d^3r \quad (6.1.1)$$

Se il potenziale é una funzione lentamente variabile nella regione dove $\rho(\vec{r})$ é diversa da zero, si può sviluppare in serie di Taylor attorno ad un'origine opportunamente scelta:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(O) + \vec{r} \cdot \left[\vec{\nabla}\Phi \right]_{(O)} + \dots \quad (6.1.2)$$

Poiché $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ la (6.1.2) diventa:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(O) - \vec{r} \cdot \vec{E}(O) + \dots \quad (6.1.3)$$

Se si introduce questa espressione nella funzione W si ha:

$$W = \int \Phi(O)\rho(\vec{r})d^3r - \int \vec{r} \cdot \vec{E}(O)\rho(\vec{r})d^3r \quad (6.1.4)$$

$\Phi(O)$ é costante e si può portare fuori dall'integrale:

$$W = \Phi(O) \int \rho(\vec{r})d^3r - \vec{E}(O) \cdot \int \vec{r}\rho(\vec{r})d^3r = q\Phi(O) - \vec{p} \cdot \vec{E}(O) + \dots \quad (6.1.5)$$

Questo sviluppo mostra il modo caratteristico con cui i vari multipoli interagiscono con un campo esterno, la carica con il potenziale, il dipolo con il campo elettrico, ecc.

In generale si scrive:

$$W = q\Phi - \vec{p} \cdot \vec{E} + \dots \quad (6.1.6)$$

Poiché la forza \vec{F} si può calcolare come il gradiente della funzione energia potenziale, risulta:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W = q\vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) + \dots \quad (6.1.7)$$

Supponiamo di mettere a distanza \vec{r} del dipolo \vec{p}_1 un dipolo \vec{p}_2 . L'energia di interazione fra i due dipoli \vec{p}_1 \vec{p}_2 si può ricavare facilmente ponendo in W al posto di \vec{E} il campo generato da \vec{p}_2 .

Si ha:

$$W_{12} = -k\vec{p}_1 \cdot \frac{3(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}_2}{r^5} = k \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\hat{r} \cdot \vec{p}_1)(\hat{r} \cdot \vec{p}_2)}{r^3} \quad (6.1.8)$$

L'interazione dipolo - dipolo é attrattiva o repulsiva a seconda dell'orientamento dei dipoli.

6.2 - Condizioni al contorno dei vettori del campo

Vogliamo vedere come i vettori del campo \vec{E} e \vec{D} variano quando si passa attraverso la superficie di separazione fra due mezzi diversi. I due mezzi possono essere due dielettrici con proprietà diverse o un dielettrico e un conduttore. Il vuoto si può considerare come un dielettrico con costante dielettrica ϵ_0 . Consideriamo due mezzi 1 e 2 a contatto.

Assumeremo che vi sia una densità superficiale di carica libera σ , che può variare da punto a punto sulla superficie di separazione.

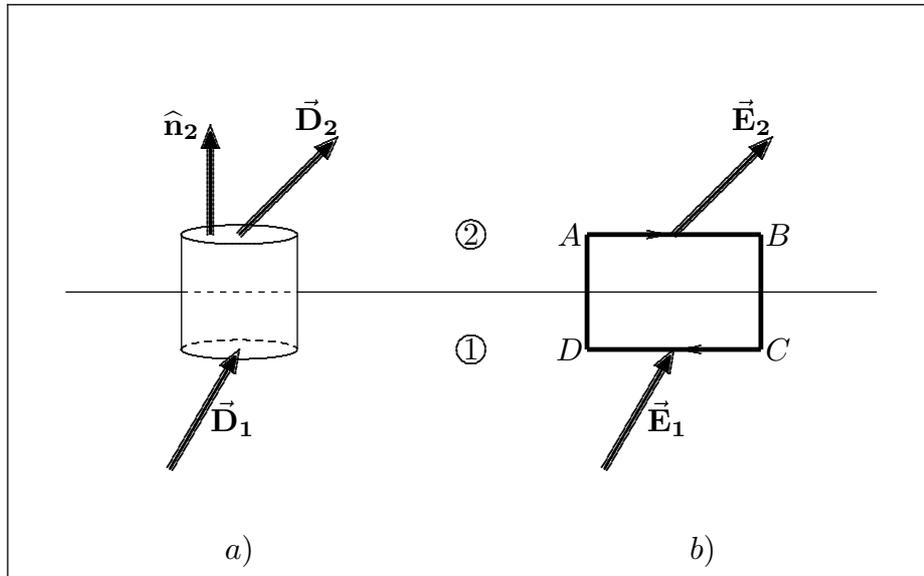


fig.6.2-1

Costruiamo una piccola superficie cilindrica S che intersechi la superficie di separazione e racchiuda un'area ΔS della superficie stessa; l'altezza del cilindretto sia trascurabile rispetto al diametro delle basi.

Applichiamo la legge di Gauss:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q_{lib} \quad (6.2.1)$$

Al limite per $\Delta h \rightarrow 0$ si ha:

$$\vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 \Delta S + \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 \Delta S = \sigma \Delta S \quad (6.2.2)$$

e poiché $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$ la (6.2.2) si scrive:

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2 = \sigma \quad (6.2.3)$$

Ma $\hat{n}_2 = \hat{n}_0$ quindi:

$$\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = \sigma \quad (6.2.4)$$

Se $\sigma = 0$ la componente normale del vettore \vec{D} é continua sulla superficie di separazione.

Consideriamo, ora, il percorso della figura (6.2-1b) ed applichiamo la proprietá della irrotazionalitá del campo elettrico:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (6.2.5)$$

si ha:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (6.2.6)$$

Al limite per $AD, BC \rightarrow 0$ l'equazione (6.2.6) diventa:

$$\vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{l} + \vec{E}_1 \cdot (-\Delta\vec{l}) = 0 \quad (6.2.7)$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \Delta\vec{l} = 0 \quad (6.2.8)$$

cioé:

$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} \quad (6.2.9)$$

La componente tangenziale del campo elettrico lungo una superficie di separazione fra due mezzi é continua.

Poiché i precedenti risultati sono stati ottenuti per due mezzi arbitrari, consideriamo il caso in cui il mezzo 1 sia conduttore e il mezzo 2 dielettrico.

Per definizione dentro il conduttore risulta: $\vec{E}_1 = 0 \rightarrow \vec{D}_1 = 0$, quindi per la (6.2.4) e per la (6.2.9) si ha:

$$D_{2n} = \sigma \quad E_{2t} = 0 \quad \text{sulla superficie di un conduttore perfetto} \quad (6.2.10)$$

La (6.2.10) esprime il fatto che, come abbiamo già dimostrato, **sulla superficie di un conduttore perfetto la componente tangenziale del campo elettrico deve essere nulla o che é lo stesso il campo elettrico deve essere ortogonale alla superficie di un conduttore perfetto.**

É importante osservare che il potenziale é sempre una funzione continua anche sulla superficie di separazione fra due dielettrici o fra dielettrico e conduttore; infatti poiché fra due punti comunque vicini vale sempre che:

$$d\Phi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

segue che per $d\vec{l} \rightarrow 0$, $d\Phi$ deve necessariamente tendere a zero in quanto il campo elettrico non puó mai diventare infinito.

6.3 - Equazione di Poisson nei dielettrici

Come abbiamo già visto, la legge di Gauss nei dielettrici si scrive:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (6.3.1)$$

Se il dielettrico é omogeneo, lineare e isotropo si ha: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e, quindi, sostituendo nella (6.3.1), la legge di Gauss diventa:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (6.3.2)$$

D'altra parte, anche nei dielettrici é assicurata la irrotazionalitá del campo elettrostatico, per cui: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ cosicché risulta:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (6.3.3)$$

che é l'equazione di Poisson nel caso generale in cui il mezzo é un dielettrico qualunque.

6.4 - Sfera dielettrica uniformemente polarizzata

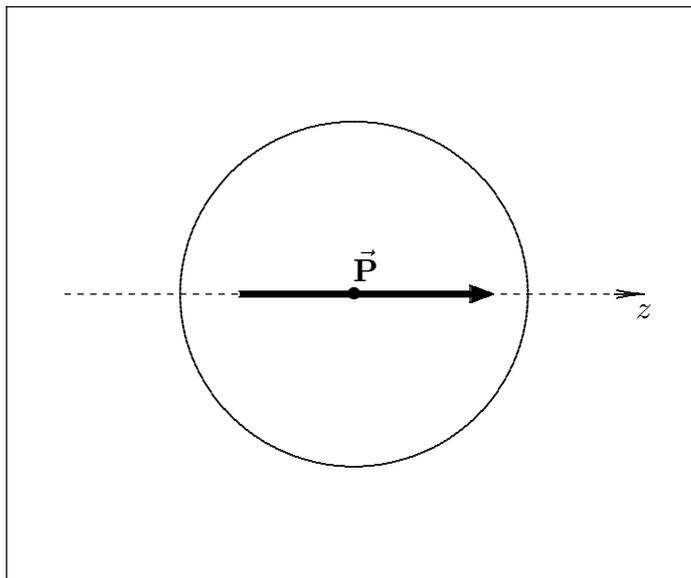


fig.6.4-1

In vista di una importante applicazione vogliamo calcolare il campo elettrico generato da una sfera polarizzata con polarizzazione uniforme lungo l'asse z . Data l'assenza di carica

libera sia dentro che fuori la sfera, consideriamo la soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + \frac{C_1}{r} + A_2 r \cos \theta + \frac{C_2}{r^2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.4.1)$$

Specializziamo la (6.4.1) per i punti interni alla sfera e per quelli esterni:

$$\Phi_{int}(r, \theta) = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.4.2)$$

Per scrivere la (6.4.2) si sono annullate le costanti C per permettere la convergenza di Φ_{int} per $r = 0$.

$$\Phi_{ext}(r, \theta) = \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} \cos \theta + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.4.3)$$

Per scrivere la (6.4.3) si sono annullate le costanti A per garantire le condizioni di annullamento all'infinito essenziale per qualunque distribuzione localizzata.

Si faccia attenzione sul fatto che \vec{P} é la sorgente del campo che si vuole trovare e quindi non si può applicare la relazione $\vec{P} = \chi \vec{E}$.

Calcoliamo ora le costanti A e C imponendo le condizioni al contorno.

Poiché bastano due condizioni, abbiamo la facoltà di scegliere fra:

- 1) continuità del potenziale alla frontiera;
- 2) continuità della componente tangenziale del campo elettrico sulla superficie di separazione;
- 3) continuità della componente normale del vettore $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Come si può facilmente capire dalla (6.2.7) le condizioni 1 e 2 non sono indipendenti, pertanto é conveniente utilizzare la condizione 1 e la condizione 3 che scriviamo:

$$A_1 + A_2 a \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 a^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \frac{C_1}{a} + \frac{C_2}{a^2} \cos \theta + \frac{1}{2} C_3 a^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.4.4)$$

$$(\epsilon_0 E_{ir} + P_r)_{r=a} = (\epsilon_0 E_{er})_{r=a} \quad (6.4.5)$$

dove:

$$E_{ir} = -\frac{\partial \Phi_{int}}{\partial r} = -A_2 \cos \theta - A_3 r (3 \cos^2 \theta - 1) - \dots \quad (6.4.6)$$

$$E_{er} = -\frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2} + 2 \frac{C_2}{r^3} \cos \theta + \frac{3}{2} C_3 r^{-4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.4.7)$$

Quindi la (6.4.5) che rappresenta la condizione 3, in forma esplicita, si scrive:

$$-\epsilon_0 A_2 \cos \theta - \epsilon_0 A_3 a (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots + P \cos \theta = \epsilon_0 \frac{C_1}{a^2} + 2 \epsilon_0 \frac{C_2}{a^3} \cos \theta + \frac{3}{2} \epsilon_0 C_3 \frac{1}{a^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.4.8)$$

La (6.4.4) e la (6.4.8) danno luogo ai seguenti due sistemi:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{C_1}{a} \\ A_2 a &= \frac{C_2}{a^2} \\ A_3 a^2 &= C_3 \frac{1}{a^3} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6.4.9}$$

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 A_2 + P &= 2\epsilon_0 \frac{C_2}{a^3} \\ C_1 &= 0 \\ -\epsilon_0 A_3 a &= \frac{3}{2}\epsilon_0 C_3 \frac{1}{a^4} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6.4.10}$$

che, risolti, danno i seguenti risultati:

$$C_1 = 0, \quad A_1 = 0, \quad C_i = A_i = 0 \quad (i \geq 3), \quad A_2 = \frac{P}{3\epsilon_0}, \quad C_2 = \frac{P}{3\epsilon_0} a^3 \tag{6.4.11}$$

Sostituendo questi valori nella (6.4.2) e nella (6.4.3) le espressioni dei potenziali diventano:

$$\Phi_{int} = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta \tag{6.4.12}$$

$$\Phi_{ext} = \frac{P}{3\epsilon_0} a^3 \frac{1}{r^2} \cos \theta \tag{6.4.13}$$

Poiché $r \cos \theta = z$ la funzione potenziale nei punti interni si scrive:

$$\Phi_{int} = \frac{P}{3\epsilon_0} z \tag{6.4.14}$$

e quindi il campo elettrico nei punti interni alla sfera dielettrica é:

$$\vec{E}_{int} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \tag{6.4.15}$$

cioé: il campo elettrico generato da una sfera uniformemente polarizzata é uniforme nei punti interni, diretto secondo \vec{P} ed opposto a \vec{P} . Il campo elettrico esterno é, invece, **un campo di dipolo**; infatti, se confrontiamo l'espressione del potenziale testé trovato con quello generato da un dipolo, $\Phi = k \frac{p \cos \theta}{r^2}$, si trova che **il momento di dipolo della sfera** é dato da:

$$k p_{sfera} = \frac{P}{3\epsilon_0} a^3 \quad da \quad cui \quad p_{sfera} = P \frac{4}{3} \pi a^3 \tag{6.4.16}$$

Il campo esterno segue, quindi, la legge $\frac{1}{r^3}$.

6.5 - Sfera dielettrica posta in campo elettrico uniforme

É utile studiare l'interazione fra una sfera dielettrica ed un campo elettrico uniforme nel quale essa é posta. Come già sappiamo la soluzione generale del problema, simile a quello della sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme, é:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.5.1)$$

Potenziale nella zona esterna alla sfera

Il potenziale nei punti esterni si ottiene dopo aver imposto la condizione all'infinito cioè che per $r \rightarrow \infty$

$$[\Phi(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta + cost \quad (6.5.2)$$

Ne segue:

$$\Phi_{ext}(r, \theta) = cost + C_1 r^{-1} - E_0 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.5.3)$$

Potenziale nella zona interna alla sfera

La funzione potenziale deve essere finita per $r = 0$ quindi, per essere una soluzione fisicamente accettabile, dobbiamo porre eguale a zero le costanti C_i ($i = 1, 2, \dots$).

Ne segue:

$$\Phi_{int}(r, \theta) = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.5.4)$$

Valutazione delle costanti

Per trovare le costanti e, quindi, specificare il problema fisico in esame, dobbiamo imporre che:

- 1) la funzione Φ sia continua per $r = a$ qualunque sia θ ;
- 2) la componente normale dell'induzione elettrica sulla superficie della sfera sia continua per $r = a$ qualunque sia θ . Indicando con ϵ_r la costante dielettrica relativa della sfera, che indichiamo come mezzo 2, si ha:

$$[D_{1r}]_{r=a} = [D_{2r}]_{r=a} \quad (6.5.5)$$

cioé:

$$-\epsilon_0 \left[\frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial r} \right]_{r=a} = -\epsilon_0 \epsilon_r \left[\frac{\partial \Phi_{int}}{\partial r} \right]_{r=a} \quad (6.5.6)$$

dove:

$$\frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial r} = -\frac{C_1}{r^2} - E_0 \cos \theta - 2C_2 \frac{1}{r^3} \cos \theta - \frac{3}{2} C_3 \frac{1}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.5.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_{int}}{\partial r} = A_2 \cos \theta + A_3 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.5.8)$$

Per la condizione 2) si deve avere:

$$-\frac{C_1}{a^2} - E_0 \cos \theta - 2C_2 \frac{1}{a^3} \cos \theta - \frac{3}{2} C_3 \frac{1}{a^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \epsilon_r A_2 \cos \theta + \epsilon_r A_3 a (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (6.5.9)$$

Perché sia verificata l'eguaglianza qualunque sia θ deve essere:

$$\begin{aligned} -\frac{C_1}{a^2} + \frac{3}{2} C_3 \frac{1}{a^4} + \dots &= -\epsilon_r A_3 a + \dots \\ -E_0 - 2C_2 \frac{1}{a^3} &= \epsilon_r A_2 \\ -\frac{3}{2} C_3 \frac{1}{a^4} &= \epsilon_r A_3 a \\ &\dots \end{aligned} \quad (6.5.10)$$

Applichiamo, adesso, la condizione della continuità di Φ per $r = a$:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 a \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 a^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots &= \\ = \cos \theta + C_1 a^{-1} + [C_2 a^{-2} - E_0 a] \cos \theta + \frac{1}{2} C_3 a^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned} \quad (6.5.11)$$

che conduce alle:

$$\begin{aligned} A_1 - \frac{1}{2} A_3 a^2 + \dots &= \cos \theta + C_1 a^{-1} - \frac{1}{2} C_3 a^{-3} + \dots \\ A_2 a &= C_2 a^{-2} - E_0 a \\ \frac{3}{2} A_3 a^2 &= \frac{3}{2} C_3 a^{-3} \\ &\dots \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

La terza e le successive equazioni del sistema (6.5.12) non sono compatibili con la terza e le successive equazioni del sistema (6.5.10). Pertanto si ha:

$$A_i = 0 \quad (i \geq 3) \quad C_i = 0 \quad (i \geq 3) \quad (6.5.13)$$

Segue, pertanto, che:

$$C_1 = 0 \quad e \quad A_1 = \cos \theta \quad (6.5.14)$$

Le uniche costanti da calcolare sono A_2 e C_2 che soddisfano il sistema:

$$\begin{aligned} A_2 - C_2 a^{-3} &= -E_0 \\ \epsilon_r A_2 + 2C_2 a^{-3} &= -E_0 \end{aligned} \quad (6.5.15)$$

che dá come risultato:

$$A_2 = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2}; \quad C_2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 \quad (6.5.16)$$

In definitiva, quindi, si ha:

$$\Phi_{ext} = cost - E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 r^{-2} \cos \theta \quad (6.5.17)$$

$$\Phi_{int} = cost - \frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta \quad (6.5.18)$$

Siamo particolarmente interessati al calcolo del campo interno alla sfera:

$$E_{r_{interno}} = -\frac{\partial \Phi_{int}}{\partial r} = \frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \cos \theta \quad (6.5.19)$$

$$E_{\theta_{interno}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{int}}{\partial \theta} = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \sin \theta \quad (6.5.20)$$

Passando in coordinate cartesiane, si ha:

$$E_z = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta$$

$$E_x = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta$$

da cui:

$$\mathbf{E}_z = \frac{3\mathbf{E}_0}{\epsilon_r + 2} \quad \mathbf{E}_x = \mathbf{0} \quad (6.5.21)$$

Il campo elettrico all'interno di una sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme é pure uniforme nella stessa direzione e verso del campo elettrico esterno iniziale.

Le componenti del campo elettrico esterno sono:

$$E_{r_{esterno}} = -\frac{\partial \Phi_{est}}{\partial r} = E_0 \left(1 + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (6.5.22)$$

$$E_{\theta_{esterno}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{est}}{\partial \theta} = -E_0 \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (6.5.23)$$

Grafico delle linee di forza

Le linee di forza del campo elettrico interno sono delle rette parallele all'asse z. Per quanto riguarda le linee di forza del campo elettrico esterno, utilizziamo lo stesso procedimento che abbiamo eseguito per la sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme. Risulta, immediatamente:

$$\boxed{|\sin \theta| = \xi \sqrt{\frac{r}{r^3 + \eta 2a^3}}} \quad (6.5.24)$$

avendo posto:

$$\eta = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad (6.5.25)$$

In questo caso il parametro ξ_s al di sopra del quale le linee di forza si staccano completamente dalla sfera é dato da:

$$\xi_s = a\sqrt{1 + 2\eta} \quad (6.5.25)$$

La linea di forza competente al valore ξ_s tocca la sfera con tangente orizzontale, in quanto per $z = 0$ e $x = a$, ossia per $\theta = 90^0$, come si deduce dalla (6.5.22) e (6.5.23), risulta $E_r = 0$.

A titolo di completezza osserviamo che il parametro η tende a 1 per $\epsilon_r \rightarrow \infty$; in questo caso cioé la sfera dielettrica si comporta come una sfera conduttrice. Per esempio nel caso dell'acqua ($\epsilon_r = 81$), risulta $\eta = 0.9638$ ossia le linee di forza competenti al campo elettrico

esterno hanno praticamente lo stesso andamento di quelle relative alla sfera conduttrice.

Linee di forza del campo elettrico ($\epsilon_r = 2$, $a = 1$)

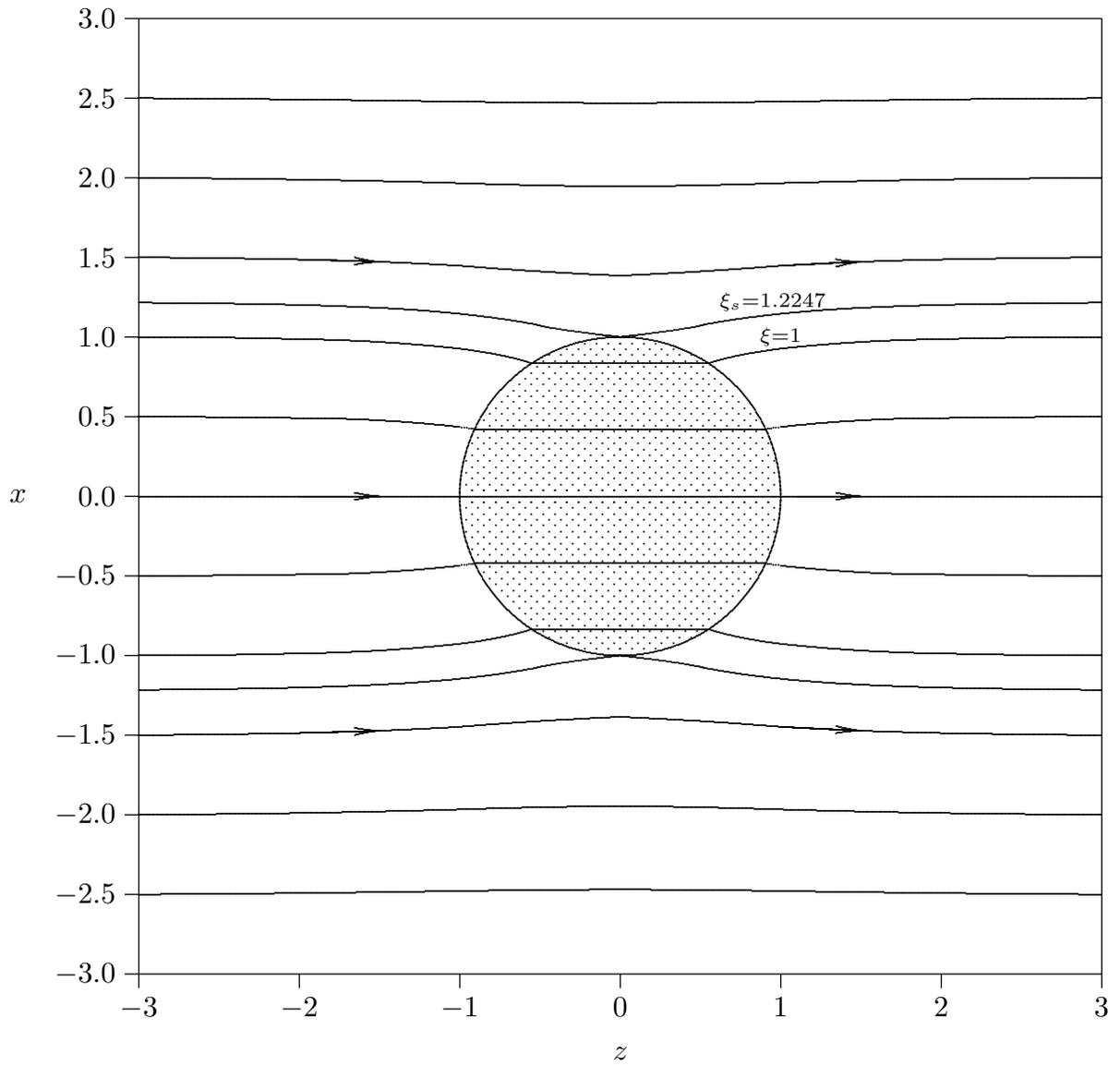


fig.6.5-1

6.6 - Confronto fra teoria macroscopica e teoria microscopica

Cerchiamo di costruire una teoria che corredi χ con α . Nella precedente teoria microscopica abbiamo trovato l'espressione di \vec{P} nell'ipotesi di conoscere il campo \vec{E} agente sulla singola molecola, anzi assumendo che questo campo fosse il campo esterno.

Bisogna, adesso, calcolare il campo E_m . Questo é il campo elettrico agente nel punto in cui é posta una molecola; esso é generato da tutte le sorgenti esterne e da tutte le molecole polarizzate del dielettrico con l'esclusione della sola molecola che si trova nel punto considerato. Il campo molecolare puó essere calcolato come segue: asportiamo un piccolo pezzo del dielettrico, lasciando una cavità sferica intorno al punto in cui si deve calcolare il campo molecolare.

Il dielettrico rimanente sarà trattato come un continuo, cioè dal punto di vista macroscopico. Rimettiamo ora il dielettrico nella cavità, molecola per molecola, ad eccezione della molecola che si trovava al centro della cavità, dove noi vogliamo calcolare il campo molecolare. Le molecole, che abbiamo rimesse a posto, saranno trattate non come un continuo, ma come singoli dipoli. Il procedimento appena esposto é giustificabile solo se il risultato del calcolo é indipendente dalle dimensioni della cavità; vedremo che in certe condizioni questo é verificato. É importante osservare che per il calcolo del campo \vec{E} macroscopico abbiamo fatto una cavità aghiforme in direzione parallela al campo; nel caso del campo molecolare questo procedimento non é possibile farlo perché non conosciamo il campo in ciascuna molecola.

Supponiamo che il minuscolo campione di dielettrico sia stato polarizzato ponendolo in un campo elettrico uniforme esistente fra due piastre parallele aventi cariche opposte. Supporremo che la polarizzazione sia uniforme su scala macroscopica (cioé $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$) e che \vec{P} sia parallelo al campo che lo ha generato.

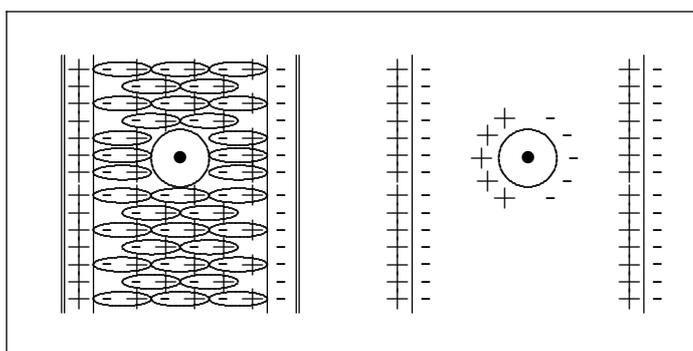


fig.6.6-1

Ricordiamo che la sfera cava é esterna al dielettrico, quindi la normale é verso il centro della sfera; ne segue che sulla superficie della sfera cava vi é una densità superficiale di carica $\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n}$.

Per quanto abbiamo detto, il campo molecolare é:

$$\vec{E}_m = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_d + \vec{E}_s + \vec{E}' \quad (6.6.1)$$

dove:

E_{ext} é il campo originario dovuto alle piastre parallele cariche.

E_d é il campo di depolarizzazione dovuto alle cariche legate poste sulle superfici esterne del dielettrico.

E_s é il campo elettrico dovuto alle cariche legate poste sulla superficie S della cavità ed E' é il campo elettrico dovuto a tutti i dipoli che si trovano internamente ad S .

Risulta:

$$E_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \vec{E}_d = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (6.6.2)$$

Denotiamo con \vec{E} , senza indice, il campo elettrico macroscopico nel dielettrico. Poiché la componente normale del vettore induzione elettrica \vec{D} é continua attraverso la superficie di separazione vuoto - dielettrico e poiché $D = \epsilon_0 E_{ext}$ nel vuoto, appena fuori dello strato dielettrico é:

$$\epsilon_0 \vec{E}_{ext} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (6.6.3)$$

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} + \vec{E}_s + \vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}_s + \vec{E}' \quad (6.6.4)$$

Ma $\vec{E}_s = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$ in quanto é opposto al risultato trovato di una sfera polarizzata.

Il campo \vec{E}' é piú difficile da determinare. Lorentz ha dimostrato che per atomi disposti sui vertici di un reticolo cubico semplice $E' = 0$. Analogamente vale nel caso di un gas o di un liquido, quindi:

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (6.6.5)$$

Ma:

$$\vec{p}_m = \alpha \vec{E}_m \rightarrow N \vec{p}_m = N \alpha \vec{E}_m \rightarrow \vec{P} = N \alpha \vec{E}_m \quad (6.6.6)$$

Sostituendo nell'ultima relazione della (6.6.6) la (6.6.5), si ha:

$$\vec{P} = N \alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) \quad (6.6.7)$$

da cui:

$$\vec{P} = \frac{N \alpha}{1 - \frac{N \alpha}{3\epsilon_0}} \vec{E} \quad (6.6.8)$$

Quindi:

$$\chi = \frac{N \alpha}{1 - \frac{N \alpha}{3\epsilon_0}} \quad (6.6.9)$$

da cui:

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0\chi}{N(3\epsilon_0 + \chi)} \quad (6.6.10)$$

e poiché $\chi = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)$, la (6.6.10) si scrive:

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{N(\epsilon_r + 2)} \quad (6.6.11)$$

La relazione (6.6.11) prende il nome di equazione di **Clausius - Mossotti**. Essa definisce una proprietà molecolare, cioè, la polarizzabilità molecolare, in funzione di quantità che possono essere determinate su una base macroscopica. È conveniente talvolta invertire la (6.6.11) e scrivere:

$$\epsilon_r - 1 = \frac{\frac{N\alpha}{\epsilon_0}}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} \quad (6.6.12)$$

Quando $\frac{N\alpha}{3\epsilon_0}$ è molto piccola rispetto a 1 si ha:

$$\epsilon_r - 1 = \frac{N\alpha}{\epsilon_0} \quad (6.6.13)$$

Questo è il caso dei gas rarefatti; in questo caso, infatti, come abbiamo visto ϵ_r è circa 1. La (6.6.12), con buona approssimazione, vale anche nei liquidi.

6.7 - Il fenomeno della piezoelettricità

Quando un cristallo ionico é deformato si verifica una polarizzazione elettrica di volume e questa si manifesta con la comparsa di cariche elettriche sulla superficie del cristallo. In modo brutale, la comparsa della polarizzazione piezoelettrica puó essere spiegata pensando ad un regolare tetraedro il cui centro é occupato da uno ione che porta quattro cariche positive, mentre ogni vertice é occupato da un singolo ione carico negativamente.

Fintanto che il centro di gravitá delle cariche negative coincide con la posizione della carica positiva, l'intera struttura non ha momento di dipolo. Se, ora, lo ione centrale mantiene la sua posizione mentre un vertice é spinto verso il centro, nasce ovviamente un momento di dipolo. In cristalli dal reticolo semplice quali il *NaCl* (cloruro di sodio) non vi sará un momento di dipolo per unitá di volume risultante, poiché la simmetria del reticolo assicura una compensazione mutua. Il requisito fondamentale per la comparsa di piezoelettricitá é la presenza di quello che é chiamato **asse polare**, un asse tale che il piano normale ad esso non é un piano di simmetria del cristallo. La relazione fra la deformazione e la polarizzazione risultante é lineare. Possiamo quindi scrivere per le componenti del vettore polarizzazione:

$$\begin{aligned} P_x &= \gamma_{11}e_{11} + \gamma_{12}e_{22} + \gamma_{13}e_{33} + \gamma_{14}e_{23} + \gamma_{15}e_{31} + \gamma_{16}e_{12} \\ P_y &= \gamma_{21}e_{11} + \gamma_{22}e_{22} + \gamma_{23}e_{33} + \gamma_{24}e_{23} + \gamma_{25}e_{31} + \gamma_{26}e_{12} \\ P_z &= \gamma_{31}e_{11} + \gamma_{32}e_{22} + \gamma_{33}e_{33} + \gamma_{34}e_{23} + \gamma_{35}e_{31} + \gamma_{36}e_{12} \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

Gli e_{ik} sono le componenti del tensore degli sforzi, i coefficienti γ_{ik} sono chiamati costanti piezoelettriche. A seconda del grado di simmetria del cristallo, il numero delle costanti viene ridotto. Per il quarzo la matrice dei coefficienti γ_{ik} é:

$$\begin{array}{cccccc} \gamma_{11} & -\gamma_{11} & 0 & \gamma_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{14} & -\gamma_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (6.7.2)$$

Reciprocamente, se un campo elettrico é applicato ad un cristallo piezoelettrico, la polarizzazione risultante causa tensioni elastiche e deformazioni. Quando le componenti del tensore degli sforzi sono espresse in termini delle componenti del campo, appaiono i coefficienti δ_{ik} .

$$\begin{aligned} e_{11} &= \delta_{11}E_x + \delta_{21}E_y + \delta_{31}E_z, & e_{23} &= \delta_{14}E_x + \delta_{24}E_y + \delta_{34}E_z \\ e_{22} &= \delta_{12}E_x + \delta_{22}E_y + \delta_{32}E_z, & e_{31} &= \delta_{15}E_x + \delta_{25}E_y + \delta_{35}E_z \\ e_{33} &= \delta_{13}E_x + \delta_{23}E_y + \delta_{33}E_z, & e_{12} &= \delta_{16}E_x + \delta_{26}E_y + \delta_{36}E_z \end{aligned} \quad (6.7.3)$$

Per le componenti di pressione negativa si ha uno schema simile alla (6.7.1). Le quantitá γ_{ik} compaiono come coefficienti di E_i ; per il quarzo abbiamo:

$$\begin{aligned} -P_{11} &= \gamma_{11}E_x, & -P_{23} &= \gamma_{14}E_x, & e_{11} &= \delta_{11}E_x, & e_{23} &= \delta_{14}E_x \\ P_{22} &= \gamma_{11}E_z, & P_{31} &= \gamma_{14}E_y, & e_{22} &= -\delta_{11}E_x, & e_{31} &= -\delta_{14}E_y \\ P_{33} &= 0, & P_{12} &= \gamma_{11}E_y, & e_{33} &= 0, & e_{12} &= -2\delta_{11}E_y \end{aligned} \quad (6.7.4)$$

La posizione del sistema di coordinate é quella di figura. Per il quarzo, i valori numerici di γ_{ik} e δ_{ik} , in unitá C.G.S., (segni algebrici per il quarzo destrorso) sono:

$$\gamma_{11} = 4.77 \cdot 10^4; \quad \gamma_{14} = 1.27 \cdot 10^4 \quad (6.7.5)$$

$$\delta_{11} = 3.36 \cdot 10^{-8}; \quad \delta_{14} = -1.69 \cdot 10^{-8} \quad (6.7.6)$$

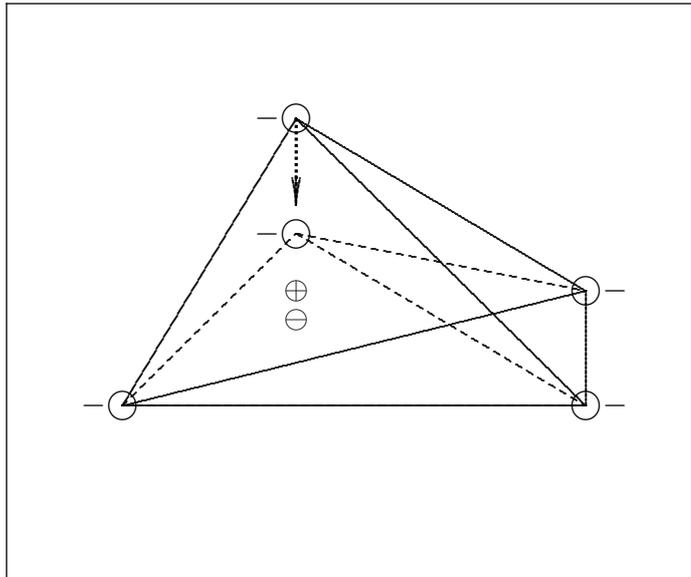


fig.6.7-1