

## Elettrostatica dei corpi dielettrici: I

### 5.1 - Dipoli atomici e molecolari

Gli atomi allo stato fondamentale (stato di minor energia) presentano tutti una distribuzione degli elettroni a simmetria sferica. Conseguentemente **il momento di dipolo di una simile distribuzione é nullo**. Lo stesso dicasi per qualsiasi atomo ionizzato, benché esso presenta un **momento di monopolio** cioè una carica totale diversa da zero. Allo scopo di capire cosa succede quando si immerge un atomo in un campo elettrico statico possiamo quindi considerare **l'atomo di idrogeno**.

Il modello dell'atomo di idrogeno (o di altri atomi) é quello di un nucleo puntiforme positivo e una nube a simmetria sferica negativa il cui baricentro coincide con la carica positiva. Quando l'atomo é immerso in un campo elettrico statico generato da una sorgente esterna, il campo elettrico distorce l'atomo, spingendo in un verso la carica negativa e in verso opposto il nucleo positivo; l'atomo, così distorto, acquisterá un momento di dipolo elettrico in quanto il baricentro della carica positiva e quello della carica negativa non sono piú coincidenti. Facciamo l'ipotesi che la sfera negativa non si deformi né vari la propria densità ma semplicemente si sposti rispetto al nucleo. In equilibrio la forza di attrazione esercitata sul nucleo dalla sfera negativa é uguale alla forza che agisce sul nucleo a causa del campo elettrostatico  $\vec{E}$ .

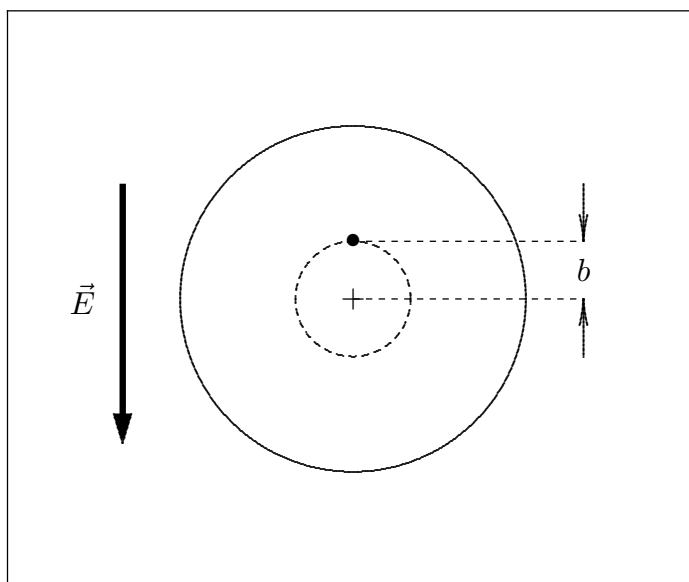


fig.5.1-1

Calcoliamo il campo generato dalla sfera negativa di densità di carica

$$\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

dove  $a$  è il raggio dell'atomo.

Il campo elettrico in un punto interno della sfera è allora:

$$E_i = \frac{4}{3}k\pi\rho r$$

All'equilibrio:

$$F_{ext} = F_{el.attr.} \quad \text{ossia} \quad eE_{ext} = e\frac{4}{3}k\pi\rho b$$

dove  $b$  è il valore di  $r$  per cui si ha l'equilibrio. Risulta:

$$b = \frac{3E_{ext}}{4k\pi\rho} = \frac{3E_{ext}\frac{4}{3}\pi a^3}{4k\pi e} = \frac{1}{k} \frac{E_{ext}a^3}{e} \quad (5.1.1)$$

Assumendo come ordine di grandezza:  $a = 10^{-8} \text{ cm}$  ( $1 \text{ \AA}$ ),  $E = 30000 \text{ Volt/cm}$  (che è un campo notevolmente intenso fra quelli ottenibili in laboratorio), risulta  $b = 2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ .

La distorsione è molto piccola, circa  $10^{-5}$  volte il raggio atomico e non molto più grande del raggio nucleare. Il momento di dipolo elettrico risultante è  $eb$  per cui:

$$p = \frac{1}{k} a^3 E_{ext}$$

secondo il modello da noi adottato ed è diretto secondo il campo elettrico esterno. Quindi:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (5.1.2)$$

La costante  $\alpha$  è detta polarizzabilità atomica ed ha, nel sistema C.G.S., le dimensioni di un volume.

Sperimentalmente, si ha:

Elemento	$H(I)$	$He$	$Li(I)$	$Be(II)$	$C(III)$	$Ne$	$Na(I)$	$Ar$	$K(I)$
$\alpha$	0.66	0.21	12	9.3	1.5	0.4	27	1.6	34
	$(10^{-24} \text{ cm}^3)$								

L'idrogeno e i metalli alcalini, litio, sodio e potassio hanno grandi valori di  $\alpha$  e questi vanno crescendo col numero atomico dall'idrogeno al potassio. Evidentemente gli atomi alcalini sono facilmente deformabili da un campo elettrico, mentre la struttura elettronica di un gas nobile è molto più rigida. Responsabile della facile polarizzabilità degli atomi alcalini è il debole legame dell'elettrone più esterno, o elettrone di valenza.

Anche **le molecole** presentano un momento di dipolo indotto quando sono sottoposte all'azione di un campo elettrico. La molecola di metano  $CH_4$  non polare é formata da quattro atomi di idrogeno posti ai vertici di un tetraedro nel cui centro vi é un atomo di carbonio. Tale struttura ha una polarizzabilit  elettrica, determinata sperimentalmente, di  $2.6 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ .   interessante notare che questo valore   diverso da quello che si ottiene sommando le polarizzabilit  di un atomo di carbonio e di quattro atomi di idrogeno isolati. Dal modello presentato risulta che se aumentiamo il campo elettrico esterno non si raggiungono pi  le condizioni di equilibrio e gli elettroni tendono a separarsi dal nucleo: **il dielettrico collassa**. Il valore del campo elettrico per cui avviene ci  prende il nome di **rigidit  dielettrica**.

## 5.2 - Il tensore polarizzabilit 

Le molecole sono necessariamente meno simmetriche degli atomi e questo aumenta la possibilit  di ottenere **un momento di dipolo non parallelo al campo elettrico che lo ha indotto**. Consideriamo la molecola di anidride carbonica  $CO_2$  che ha una struttura lineare a forma di sigaro.

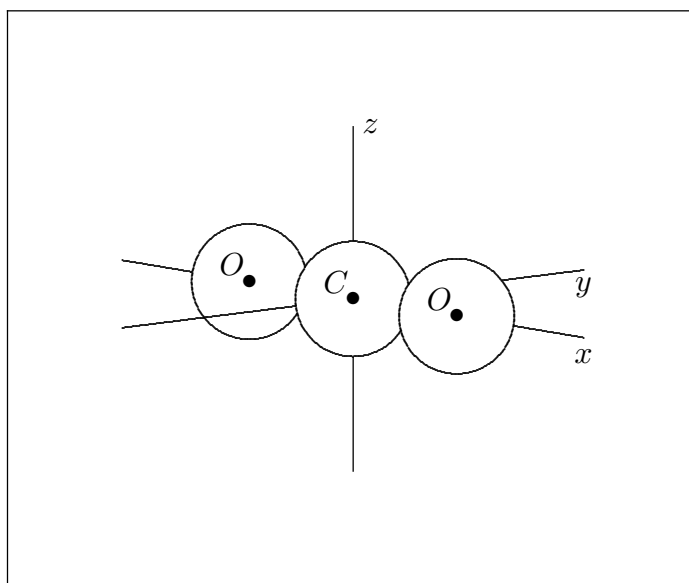


fig.5.2-1

Sarebbe veramente sorprendente se una simile struttura elettronica presentasse la stessa rigidit  alle sollecitazioni trasversali e a quelle longitudinali. In generale, ci dovremmo aspettare che un campo elettrico applicato parallelamente all'asse desse origine ad un momento di dipolo indotto di valore diverso da quello prodotto da un campo della stessa intensit , ma applicato perpendicolarmente rispetto all'asse della molecola. Infatti la polarizzabilit  osservata della molecola di  $CO_2$     $4.05 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$  nel caso di un campo

parallelo all'asse, é un pó meno della metà nel caso di un campo trasversale. La molecola ha quindi due polarizzabilità che possiamo indicare con  $\alpha_{\parallel}$  e  $\alpha_{\perp}$ .

Supponiamo di applicare un campo elettrico in una qualsiasi altra direzione. Supponiamo di trattare un fenomeno lineare e quindi ammetteremo valido il principio di sovrapposizione. Scomponiamo il campo elettrico  $\vec{E}$  in una componente parallela e in una perpendicolare all'asse della molecola, si ha:

$$E_{\parallel} = E \cos \theta \text{ ed } E_{\perp} = E \sin \theta$$

Ne segue:

$$p_{\parallel} = \alpha_{\parallel} E_{\parallel} = \alpha_{\parallel} E \cos \theta \text{ e } p_{\perp} = \alpha_{\perp} E_{\perp} = \alpha_{\perp} E \sin \theta \quad (5.2.1)$$

Se  $\alpha_{\parallel} \neq \alpha_{\perp}$  il vettore momento di dipolo  $\vec{p}$  non sarà parallelo ad  $\vec{E}$ , ma sarà vicino alla direzione di facile polarizzazione.

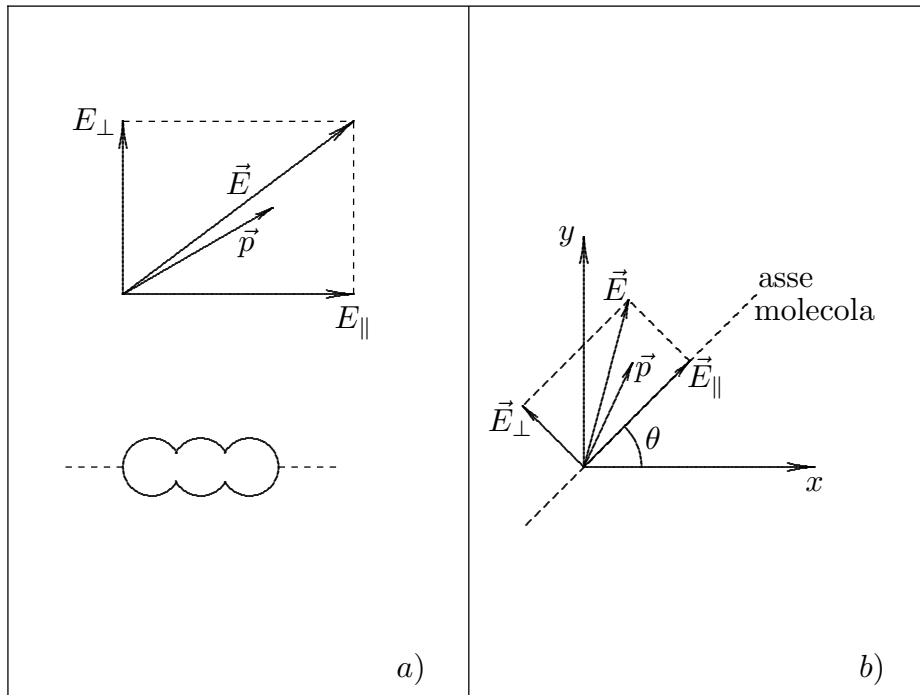


fig.5.2-2a,5.2-2b

Vediamo, adesso, come sono legate le componenti cartesiane del momento di dipolo alle componenti cartesiane del campo elettrico:

$$E_x = E_{\parallel} \cos \theta - E_{\perp} \sin \theta \quad E_y = E_{\parallel} \sin \theta + E_{\perp} \cos \theta \quad (5.2.2)$$

$$p_x = p_{\parallel} \cos \theta - p_{\perp} \sin \theta \quad p_y = p_{\parallel} \sin \theta + p_{\perp} \cos \theta \quad (5.2.3)$$

$$p_{\parallel} = \alpha_{\parallel} E_{\parallel} \quad p_{\perp} = \alpha_{\perp} E_{\perp} \quad (5.2.4)$$

Scegliendo il sistema di riferimento come in figura (5.2-2b), nell'ipotesi bidimensionale, dalle (5.2.2) si ha:

$$E_{\parallel} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta \quad E_{\perp} = E_y \cos \theta - E_x \sin \theta \quad (5.2.5)$$

che sostituite nella (5.2.3) comportano:

$$p_x = (\alpha_{\parallel} \cos^2 \theta + \alpha_{\perp} \sin^2 \theta) E_x + (\alpha_{\parallel} \sin \theta \cos \theta - \alpha_{\perp} \sin \theta \cos \theta) E_y \quad (5.2.6)$$

$$p_y = (\alpha_{\parallel} \sin \theta \cos \theta - \alpha_{\perp} \sin \theta \cos \theta) E_x + (\alpha_{\parallel} \sin^2 \theta + \alpha_{\perp} \cos^2 \theta) E_y \quad (5.2.7)$$

Si ponga:

$$\alpha_{xx} = \alpha_{\parallel} \cos^2 \theta + \alpha_{\perp} \sin^2 \theta, \quad \alpha_{xy} = \alpha_{\parallel} \sin \theta \cos \theta - \alpha_{\perp} \sin \theta \cos \theta$$

$$\alpha_{yx} = \alpha_{\parallel} \sin \theta \cos \theta - \alpha_{\perp} \sin \theta \cos \theta, \quad \alpha_{yy} = \alpha_{\parallel} \sin^2 \theta + \alpha_{\perp} \cos^2 \theta \quad (5.2.8)$$

Questo esempio mostra che la polarizzabilità di una molecola non é un semplice numero, uno scalare, ma piuttosto un insieme di coefficienti che esprimono una dipendenza lineare fra le componenti di un vettore  $\vec{p}$  e quello di  $\vec{E}$ . Un tale insieme di coefficienti viene chiamato  **tensore** . La relazione piú generale comprenderá nove coefficienti e puó venire scritta:

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ p_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ p_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Nell'esempio della molecola di  $CO_2$ , se orientiamo l'asse  $x$  lungo l'asse della molecola ( $\theta = 0$ ) i coefficienti diventano:

$$\alpha_{xx} = \alpha_{\parallel}, \quad \alpha_{xy} = 0, \quad \alpha_{yx} = 0, \quad \alpha_{yy} = \alpha_{\perp} \quad (5.2.10)$$

ció la matrice dei coefficienti é diagonale.

Si puó dimostrare (e si vede dall'esempio) che dei nove coefficienti di  $\alpha$  solo sei sono indipendenti:  $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ ,  $\alpha_{xz} = \alpha_{zx}$ ,  $\alpha_{yz} = \alpha_{zy}$  ció la matrice quadrata composta dai nove numeri é sempre simmetrica rispetto alla diagonale principale. La simmetria del tensore esprime un fatto fisico di grande importanza. Esso significa che un campo  $\vec{E}$  applicato in direzione  $x$ , genera una componente  $z$  di polarizzazione esattamente eguale alla componente  $x$  di polarizzazione che sarebbe generata da un campo di uguale intensitá, applicato lungo la direzione  $z$ . Questo é vero anche per le molecole che non possiedono alcuna simmetria.

### 5.3 - Momenti di dipolo permanenti

Alcune molecole hanno un momento di dipolo elettrico diverso da zero anche in assenza di campo elettrico. Per esempio la molecola di  $HCl$  si forma a partire dai due atomi inizialmente sferici di  $H$  e  $Cl$ , l'elettrone dell'atomo di idrogeno si sposta un pó verso la struttura del  $Cl$ , lasciando parzialmente spoglio il nucleo dell'idrogeno e provocando cosí un eccesso di carica positiva all'estremitá della molecola occupata dall'idrogeno e un corrispondente eccesso negativo all'altro estremo occupato dal cloro.

**I momenti di dipolo permanente, quando esistono, sono, di regola, enormemente piú grandi di qualunque altro momento indotto dai campi elettrici che ordinariamente si producono in laboratorio.** Questo si spiega perché il momento di dipolo permanente é dovuto essenzialmente ai campi elettrici all'interno degli atomi e molecole che sono per loro natura molto piú grandi di quelli indotti. In figura riportiamo alcuni esempi di molecole polari:

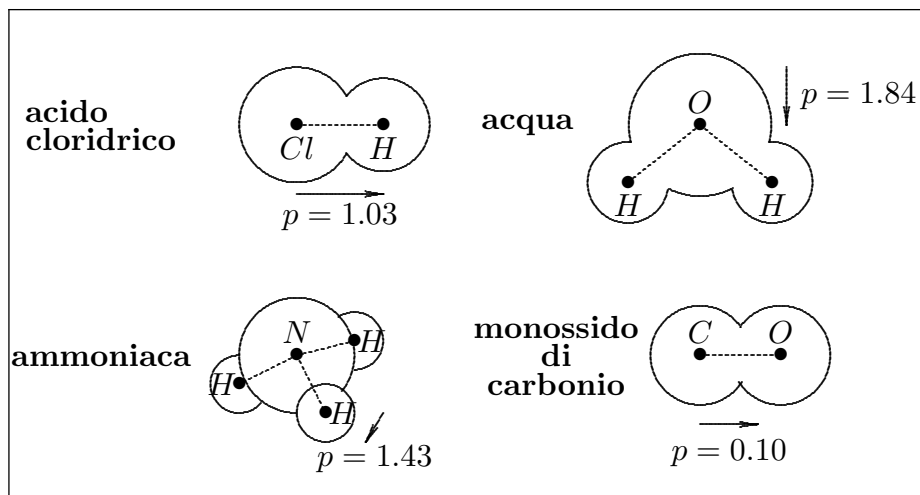


fig.5.3-1

### 5.4 - Dielettrico costituito da molecole polari

Vediamo, adesso, il comportamento di un insieme di molecole polari. Come é stato detto nel precedente paragrafo una molecola polare ha un momento dipolare permanente.

In assenza di un campo elettrico un volume macroscopico di dielettrico polare non é polarizzato perché i singoli dipoli sono orientati a caso. Consideriamo un elemento di volume  $\Delta v$  e sia  $\vec{p}_m$  il momento di dipolo permanente di ciascuna molecola. Si definisce **densitá di polarizzazione** (polarizzazione per unitá di volume) o semplicemente polarizzazione la quantitá:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta v} \quad (5.4.1)$$

In assenza di campo elettrico  $\sum \vec{p}_m = 0$  e quindi:  $\vec{P} = 0$

Se il dielettrico é sottoposto ad un campo elettrico i singoli dipoli sono sottoposti ad una coppia che tende ad allinearli col campo. Se tutte le molecole potessero allinearsi totalmente, la polarizzazione raggiungerebbe il **valore di saturazione**:

$$\vec{P}_s = \frac{N_v \vec{p}_m}{\Delta v} = N \vec{p}_m \quad (5.4.2)$$

dove  $N$  é il numero di molecole per unitá di volume. **Questo effetto di orientamento si aggiunge agli effetti di dipolo indotto che sono pure presenti anche se trascurabili.**

Con le temperature ed i campi elettrici che si hanno ordinariamente, le collisioni delle molecole nel loro moto termico impediscono alla polarizzazione di raggiungere il valore di saturazione e quindi alle molecole di allinearsi completamente. Poiché il moto caotico dovuto alla agitazione termica e le relative collisioni sono governate da leggi statistiche, ci proponiamo di calcolare la polarizzazione di una collezione di molecole polari sottoposte ad un campo elettrico che tende ad allinearle ed all'agitazione termica che tende a disallinearle. Supponiamo di avere una molecola polare di momento di dipolo  $\vec{p}_m$  immerso in un campo elettrico. L'energia di interazione di questo dipolo col campo elettrico é:

$$U = -\vec{p}_m \cdot \vec{E} = -p_m E \cos \theta \quad (5.4.3)$$

dove  $\theta$  é l'angolo fra  $\vec{p}_m$  ed  $\vec{E}$ . L'energia é minima quando  $\theta = 0$ . Supponiamo di avere una collezione di molecole che a causa dell'agitazione termica formeranno ciascuna un certo angolo  $\theta_i$  col campo, cioè a causa dell'agitazione termica ci sarà una distribuzione di molecole orientate. Si dimostra che in condizioni di equilibrio termico a temperatura  $T$  il numero relativo di molecole avente l'energia potenziale  $U$  (e quindi l'angolo  $\theta$ ) é proporzionale a:

$$e^{-\frac{U}{KT}} \quad (\text{Legge di Boltzmann}) \quad (5.4.4)$$

dove  $K$  é la costante di Boltzmann e  $T$  la temperatura assoluta.

Consideriamo l'angolo solido  $d\Omega$  compreso fra due coni di semiapertura  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ ; si ha:  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ .

Consideriamo tutti i dipoli con angoli di orientazione compresi fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  e che sono tutti quelli posti dentro questo angolo solido. Il numero  $dN$  di dipoli che, in condizioni di equilibrio, ha la orientazione compresa fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  é:

$$dN = A e^{-U(\theta)/KT} d\Omega = A e^{p_m E \cos \theta / KT} 2\pi \sin \theta d\theta \quad (5.4.5)$$

dove  $A$  é una costante di proporzionalitá da calcolare. Si puó determinare  $A$  integrando su tutto l'angolo solido dell'unitá di volume ed eguagliando il risultato ad  $N$  (numero di dipoli per unitá di volume):

$$N = \int_0^\pi A e^{p_m E \cos \theta / KT} 2\pi \sin \theta d\theta \quad (5.4.6)$$

Posto:  $\cos \theta = x$ ,  $-\sin \theta d\theta = dx$  l'integrale (5.4.6) diventa:

$$N = \int_1^{-1} -Ae^{p_m E x / KT} 2\pi dx = -\frac{2\pi A}{p_m E} KT \left( e^{-p_m E / KT} - e^{p_m E / KT} \right)$$

da cui:

$$A = \frac{N}{2\pi} \frac{\frac{p_m E}{KT}}{\left( e^{+p_m E / KT} - e^{-p_m E / KT} \right)} \quad (5.4.7)$$

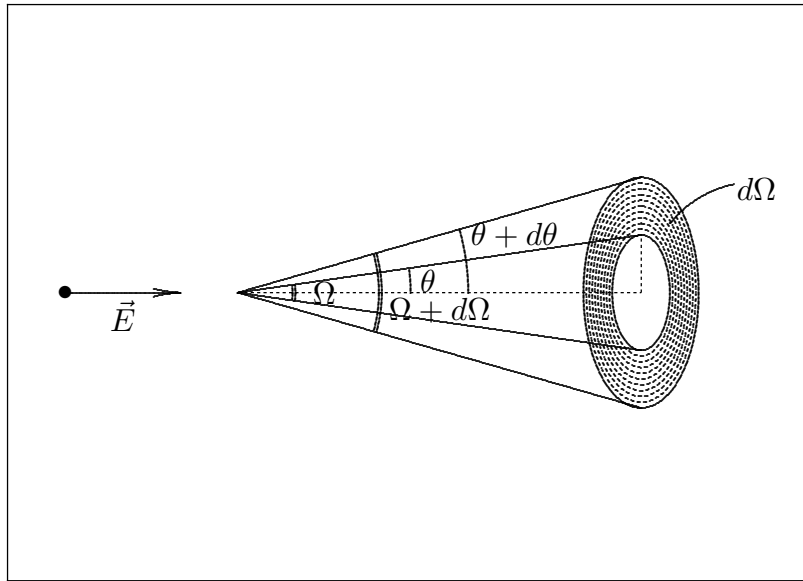


fig.5.4-1

Posto:

$$\frac{p_m E}{KT} = y \quad (5.4.8)$$

risulta:

$$A = \frac{N}{2\pi} \frac{y}{e^y - e^{-y}} \quad (5.4.9)$$

Per  $y \ll 1$  si può sviluppare la (5.4.9) in serie e fermarsi al primo ordine:  $e^y = 1 + y$ ;  $e^{-y} = 1 - y$ ; quindi:

$$A \simeq \frac{N}{4\pi} \quad (5.4.10)$$

Sostituendo la (5.4.9), la (5.4.5) diventa:

$$n(\theta) = \frac{dN}{d\Omega} = \frac{N}{2\pi} \left( \frac{y}{e^y - e^{-y}} \right) e^{y \cos \theta} \quad (5.4.11)$$



dove  $n(\theta)$  é il numero di dipoli per unitá di volume e per unitá di angolo solido di apertura  $d\theta$ .

**Esempio:** Valutiamo la (5.4.8) nel caso dell'acqua. Si ha:

$p_m = 1.84 \cdot 10^{-18} \text{ ues} \cdot \text{cm} = 6.1 \cdot 10^{-30} \text{ Coul} \cdot \text{m}$ ; sia  $E$  il valore di un campo elettrico elevato che possa essere generato in laboratorio,  $E = 100 \frac{\text{statvolt}}{\text{cm}} = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{Volt}}{\text{m}} = 30000 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ ;  $K = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg} / ^\circ\text{K} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} / ^\circ\text{K}$ ;  $T = 300 \text{ } ^\circ\text{K}$ . Risulta:

$$y = \frac{p_m E}{KT} = 4.4 \cdot 10^{-3}$$

Valutiamo, ora, alcune distribuzioni della (5.4.4) al variare del parametro  $y$ .

$y = 4.4 \cdot 10^{-3}$			$y = 4.4 \cdot 10^{-1}$			$y = 4.4$		
$T = 300^\circ\text{K}$			$T = 3^\circ\text{K}$			$T = 0.3^\circ\text{K}$		
$\theta$	$\frac{n(\theta)}{N}$	$\%N$	$\theta$	$\frac{n(\theta)}{N}$	$\%N$	$\theta$	$\frac{n(\theta)}{N}$	$\%N$
$0^\circ$	.07993	7.99	$0^\circ$	.1196	11.96	$0^\circ$	.70038	70.038
$30^\circ$	.07988	7.988	$30^\circ$	.1128	11.28	$30^\circ$	.38844	38.844
$60^\circ$	.07975	7.975	$60^\circ$	.096	9.6	$60^\circ$	.07760	7.76
$90^\circ$	.07957	7.957	$90^\circ$	.077	7.7	$90^\circ$	.00859	0.859
$120^\circ$	.0794	7.94	$120^\circ$	.062	6.2	$120^\circ$	$9.527 \cdot 10^{-4}$	
$150^\circ$	.07927	7.927	$150^\circ$	.052	5.2	$150^\circ$		
$180^\circ$	.07922	7.922	$180^\circ$	.0496	4.96	$180^\circ$		

Come si vede dalle tabelle, ci sono piú molecole orientate nel verso del campo ( $\cos\theta = 1$ ) che contrariamente al campo ( $\cos\theta = -1$ ). Ne segue quindi che la polarizzazione (media dei momenti dipolari per unitá di volume) é diversa dal valore di saturazione.

Per calcolare  $P$  ci occorre la somma vettoriale di tutti i momenti molecolari nell'unitá di volume. Siccome però sappiamo che il risultato é un vettore diretto come  $\vec{E}$ , ci basterá sommare le componenti in quella direzione (le componenti ad angolo retto rispetto ad  $\vec{E}$  sommandosi daranno zero):

$$P = \sum dN_i p_m \cos\theta_i \tag{5.4.12}$$

dove la sommatoria é estesa all'unitá di volume.

Possiamo valutare questa somma integrando sulla distribuzione angolare.

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^\pi n(\theta) p_m \cos\theta 2\pi \sin\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{N}{2\pi} \frac{y}{e^y - e^{-y}} e^{y \cos\theta} p_m \cos\theta 2\pi \sin\theta d\theta = \\
 &= N p_m \frac{y}{e^y - e^{-y}} \int_0^\pi e^{y \cos\theta} \cos\theta \sin\theta d\theta
 \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

Posto  $\cos\theta = s \rightarrow -\sin\theta d\theta = ds$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 P &= N p_m \frac{y}{e^y - e^{-y}} \int_{+1}^{-1} -e^{ys} s ds = N p_m \frac{y}{e^y - e^{-y}} \int_{-1}^{+1} s e^{ys} ds = \\
 &= N p_m \frac{y}{e^y - e^{-y}} \left[ e^{ys} \left( \frac{s}{y} - \frac{1}{y^2} \right) \right]_{-1}^1 = N p_m \frac{y}{e^y - e^{-y}} \left[ e^y \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right) + e^{-y} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.4.14}$$

$$\begin{aligned}
 P &= Np_m \left( \frac{e^y}{e^y - e^{-y}} - \frac{1}{y} \frac{e^y}{e^y - e^{-y}} + \frac{e^{-y}}{e^y - e^{-y}} + \frac{1}{y} \frac{e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \right) = \\
 &Np_m \left( \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} - \frac{1}{y} \right) = Np_m \left( \coth y - \frac{1}{y} \right) = Np_m L(y)
 \end{aligned}
 \tag{5.4.15}$$

**L(y)** prende il nome di **funzione di Langevin**.

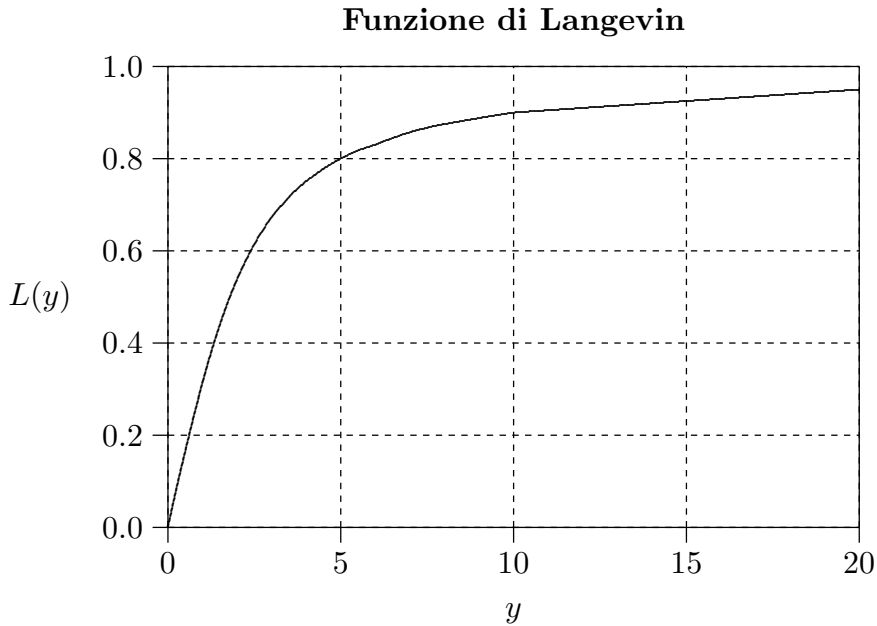


fig.5.4-2

La componente media del momento di dipolo lungo la direzione del campo é

$$\langle p_m \cos \theta \rangle = \frac{P}{N} = p_m L(y) \rightarrow \langle \cos \theta \rangle = L(y)
 \tag{5.4.16}$$

I valori di  $L(y)$  sono di seguito tabulati:

y	L(y)	y	L(y)	y	L(y)	y	L(y)
0	0	2	.5373	4	.75067	8	.875
.5	.1639	2.5	.61356	5	.80	9	.888
1	.3130	3	.67163	6	.83	10	.9
1.5	.4381	3.5	.7161	7	.857	20	.95

Dalla figura si può vedere che l'equazione  $P = Np_m L(y)$  presenta un effetto di saturazione per valori di campo molto grandi. Però per piccoli valori di  $y$  la curva é lineare ed é appunto questo tratto lineare che é importante alle temperature ordinarie. Il momento

di dipolo molecolare  $p_m$  della maggior parte dei materiali polari é tale che  $y \ll 1$  per un largo intervallo di intensitá di campo finché la temperatura supera i  $250K$ . Cosí un materiale dielettrico é lineare.

Sviluppiamo in serie  $L(y)$ , sfruttando gli sviluppi:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \dots$$

$$e^{-y} = 1 - y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \dots$$

$$\begin{aligned} L(y) &\simeq \frac{1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + 1 - y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}}{1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} - 1 + y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}} - \frac{1}{y} = \frac{2 + y^2}{2y + \frac{1}{3}y^3} - \frac{1}{y} = \\ &= \frac{y^3(1 - \frac{1}{3})}{y^2(2 + \frac{1}{3}y^2)} = \frac{\frac{2}{3}y}{2 + \frac{1}{3}y^2} \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Trascurando  $y^2$ , risulta:

$$L(y) \simeq \frac{1}{3}y \quad (5.4.18)$$

Si noti che se facciamo lo sviluppo degli esponenziali arrestandoci al secondo ordine risulta  $L(y) \simeq \frac{1}{2}y$ .

Quindi:

$$\vec{P} = N \frac{p_m^2}{3KT} \vec{E} \quad \frac{\vec{P}}{N} = \frac{p_m^2}{3KT} \vec{E} \quad (5.4.19)$$

Confrontando questa formula con quella del momento di dipolo indotto  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$  si deduce che la polarizzabilitá permanente (cioé il momento di dipolo molecolare per unitá di campo polarizzante) é

$$\alpha_{perm.} = \frac{p_m^2}{3KT} \quad (5.4.20)$$

Questo risultato é stato ricavato trascurando i momenti di dipolo indotti e rappresenta la cosiddetta polarizzabilitá per orientamento. Gli effetti dei dipoli indotti giá considerati danno luogo alla cosiddetta polarizzabilitá per deformazione  $\alpha_0$ . Nel caso generale allora la polarizzabilitá molecolare totale é:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{p_m^2}{3KT} \quad (5.4.21)$$

nota come **espressione di Langevin - Debye**.

$\alpha_0$  é indipendente dalla temperatura; a temperatura ambiente il termine  $\frac{p_m^2}{3KT}$  é dello stesso ordine di grandezza di  $\alpha_0$ : per l'acqua é  $\simeq 8 \cdot 10^{-23}$ .

Osserviamo che nella precedente teoria microscopica abbiamo indicato con  $E$  il campo elettrico cosiddetto esterno. Questo in realtá non é vero; esso é molto prossimo alla realtá nel caso di un gas molto rarefatto da poter trascurare le interazioni elettriche fra una

molecola e l'altra e quindi su ciascuna molecola agisce solo il campo esterno. Supponiamo ora di aumentare la densità del gas. Data la maggiore vicinanza delle molecole, su ciascuna agisce un campo, originato, oltre che da fattori esterni anche dalle altre molecole del dielettrico. Il campo elettrico cui ci si riferisce nel calcolo della polarizzazione della singola molecola viene detto campo efficace o molecolare.

### 5.5 - Teoria macroscopica dei dielettrici

Un materiale dielettrico ideale é quello in cui non vi sono cariche libere. In presenza di un campo elettrico esterno esso si polarizza.

Un dielettrico polarizzato, anche se mediamente é elettricamente neutro, crea un campo elettrico, sia nei punti esterni che nei punti interni al dielettrico stesso. Di conseguenza la polarizzazione del dielettrico dipende dal campo elettrico totale nel mezzo, ma una parte del campo é prodotta dallo stesso dielettrico. Inoltre il campo elettrico, creato dal dielettrico nello spazio esterno a quello da esso occupato, puó modificare la distribuzione delle cariche libere sui corpi conduttori con conseguente mutamento del campo elettrico nel dielettrico.

### 5.6 - Campo elettrico esterno generato da un dielettrico polarizzato

Consideriamo, ora, un dielettrico polarizzato, cioé caratterizzato in ciascun punto  $\vec{r}'$  da una polarizzazione  $\vec{P}(\vec{r}')$ . La polarizzazione dá origine a un campo elettrico ed il nostro problema é quello di calcolare questo campo nel punto  $\vec{r}$ , esterno al dielettrico.

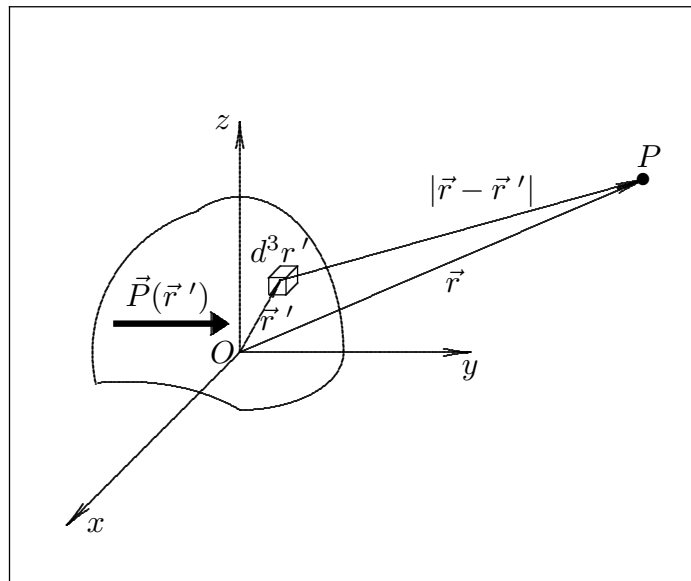


fig.5.6-1

Ciascun elemento  $d^3r'$  del dielettrico é caratterizzato da un momento di dipolo  $d\vec{p} = \vec{P}d^3r'$ ; e poiché la distanza fra  $P \equiv (x, y, z)$  e  $d^3r'$  é grande rispetto alle dimensioni di  $d^3r'$ , questa quantità (momento di dipolo) determina pienamente il contributo di  $d^3r'$  al potenziale:

$$d\Phi(\vec{r}) = k \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = k \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (5.6.1)$$

dove  $\vec{r} - \vec{r}'$  é il vettore, uscente da  $\Delta v'$ , il cui modulo é dato da:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\Phi(\vec{r}) = k \int_{V_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (5.6.2)$$

Questo risultato é esatto e si puó calcolare direttamente  $\Phi$  se si conosce la funzione  $\vec{P}$ . Ci conviene però esprimerla in modo alquanto diverso mediante una semplice trasformazione matematica. Si ha, come abbiamo già visto:  $\vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ ; quindi l'integrando della (5.6.2) diventa:

$$\frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (5.6.3)$$

Applichiamo, adesso, l'identitá vettoriale:

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f$$

dove  $f$  é una funzione scalare arbitraria del punto ed  $\vec{A}$  un arbitraria funzione vettoriale del punto. Ponendo:  $f = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  e  $\vec{A} = \vec{P}$  e considerando il  $\vec{\nabla}$  apicato si ha:

$$\frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P} \quad (5.6.4)$$

Quindi:

$$\Phi(\vec{r}) = k \int_{V_0} \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' - k \int_{V_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') d^3 r' \quad (5.6.5)$$

Applicando il teorema della divergenza al primo integrale si ha:

$$\Phi(\vec{r}) = k \oint_{S_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \hat{n} da' + k \int_{V_0} -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') d^3 r' \quad (5.6.6)$$

dove  $S_0$  é la superficie che racchiude il dielettrico,  $\hat{n}$  é il versore della normale alla superficie (esterno ad essa cioè uscente dal dielettrico). Cominciamo con l'osservare che la quantità  $\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}$  ha le dimensioni di una densitá superficiale di carica mentre  $-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')$  ha le dimensioni di una densitá volumica di carica.

Posto:  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$  e  $\rho_P = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}$ , si ha:

$$\Phi(\vec{r}) = k \oint_{S_0} \frac{\sigma_P da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k \int_{V_0} \frac{\rho_P d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.6.7)$$

cioé ai fini del campo elettrico esterno il dielettrico é equivalente ad una distribuzione di carica superficiale  $\sigma_P$  e ad una distribuzione di carica volumica  $\rho_P$ .

$\sigma_P$  prende il nome di **densitá di carica legata superficiale di polarizzazione**.

$\rho_P$  prende il nome di **densitá di carica legata volumica di polarizzazione**.

Si adotta il termine di carica legata per mettere in risalto che le cariche non sono libere di muoversi o di essere trasportate fuori dal dielettrico. La densitá superficiale di carica legata é data dalla componente della polarizzazione normale alla superficie; la densitá di volume di carica legata é una misura della disuniformitá della polarizzazione all'interno del materiale, infatti se  $\vec{P}$  é costante in ciascun punto  $\rho_P = 0$ . Quindi il dielettrico appare superficialmente carico e se  $\vec{P}$  é disuniforme esso possiede una densitá volumica di carica  $\rho_P \neq 0$ .

La carica totale di polarizzazione di un dielettrico é:

$$Q = \int_{V_0} -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P} d^3r' + \oint_{S_0} \vec{P} \cdot \hat{n} d^2r' = 0 \quad (5.6.8)$$

come si vede facilmente trasformando il primo integrale in integrale di superficie applicando il teorema della divergenza. Ció risulta in accordo col fatto che il dielettrico in complesso é elettricamente neutro.

Il campo elettrico  $\vec{E}$  puó essere ottenuto come il gradiente cambiato di segno della funzione  $\Phi$ .

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) &= k \oint_{S_0} \sigma_P \left( -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) da' + k \int_{V_0} \rho_P \left( -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' = \\ &= k \oint_{S_0} \frac{\sigma_P(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' + k \int_{V_0} \rho_P \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

dove abbiamo utilizzato l'identitá:  $-\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

## 5.7 - Campo elettrico all'interno di un dielettrico

Il campo elettrostatico in un dielettrico deve avere le stesse proprietá fondamentali, che abbiamo trovato per  $\vec{E}$  nel vuoto; in particolare  $\vec{E}$  é un campo conservativo cioé  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  o che é lo stesso  $\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ .

Consideriamo una porzione di dielettrico e ivi facciamo **una cavità aghiforme**. Consideriamo il percorso  $ABCD A$ , che si vede in figura, dove il segmento  $AB$  sta nella cavità aghiforme, scavato nel dielettrico, mentre il segmento  $CD$  é contenuto nel dielettrico. Si ha:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\overline{AB}} \vec{E}_v \cdot d\vec{l} + \int_{\overline{BC}} \vec{E}_{BC} \cdot d\vec{l} + \int_{\overline{CD}} \vec{E}_d \cdot d\vec{l} + \int_{\overline{DA}} \vec{E}_{DA} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (5.7.1)$$

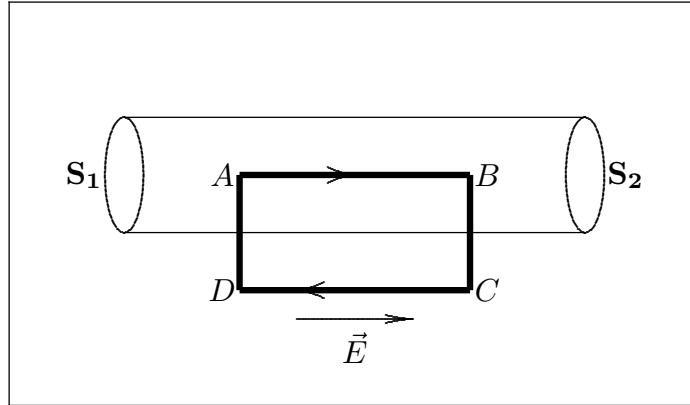


fig.5.7-1

Poiché i segmenti  $AD$  e  $BC$  possono essere resi arbitrariamente piccoli, l'integrale di linea si riduce a:

$$\vec{E}_v \cdot \hat{l} - \vec{E}_d \cdot \hat{l} = 0 \quad (5.7.2)$$

da cui:

$$E_{vt} = E_{dt} \quad (5.7.3)$$

La componente lungo l'asse della cavità ( $\hat{l}$ ) del campo elettrico nella cavità vuota é uguale a quella del dielettrico.

Se l'asse della cavità é orientato parallelamente al campo elettrico si ha:

$$E_{dt} = E_d \quad e \quad E_{vt} = E_v \quad (5.7.4)$$

**In un dielettrico il campo elettrico é uguale al campo elettrico dentro una cavità aghiforme praticata nel dielettrico, purché l'asse della cavità sia orientato parallelamente alla direzione del campo elettrico.** Evidentemente il problema di calcolare il campo elettrico dentro un dielettrico si riduce al calcolo del campo elettrico dentro una cavità aghiforme praticata nel dielettrico. Ma il campo elettrico nella cavità é il campo esterno e pertanto può essere calcolato con i risultati precedenti. Ammettiamo che la polarizzazione del dielettrico sia una funzione  $\vec{P}(x', y', z')$  e calcoliamo il potenziale e il campo elettrico dovuti alla polarizzazione. Consideriamo il campo nel punto  $\vec{r}$  al centro della cavità e si ha:

$$\Phi(\vec{r}) = k \int_{V_0 - V_1} \frac{\rho_P(x', y', z') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k \oint_{S_0 + S'} \frac{\sigma_P(x', y', z') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.7.5)$$

dove  $V_0 - V_1$  é il volume del dielettrico meno il volume della cavità aghiforme,  $S_0$  é la superficie esterna del dielettrico e  $S' = S_1 + S_2 + S_l$  é la superficie della cavità.

Ricordiamo che  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_n$  e  $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ . Poiché  $\vec{P}$  e  $\vec{E}$  sono orientati allo stesso modo si ha che  $\vec{P}$  é  $\perp$  a  $\hat{n}$  sulla superficie laterale e quindi  $\sigma_P$  su  $S_l$  é uguale a



zero; inoltre, come abbiamo già detto, la cavità può essere resa arbitrariamente sottile in modo che le superfici  $S_1$  e  $S_2$  abbiano area trascurabile. Così solo le superfici esterne del dielettrico danno un contributo e l'integrale di superficie diventa identico nella forma a quello di prima. Analogamente per l'integrale di volume  $V_1$ ; esso si può trascurare rispetto a  $V_0$  e così  $\Phi(\vec{r})$  è formalmente uguale a quella utilizzata per il calcolo del campo esterno.

### 5.8 - Legge di Gauss in un dielettrico - Vettore induzione elettrica

Supponiamo di considerare una regione contenente cariche libere racchiuse in un dielettrico.

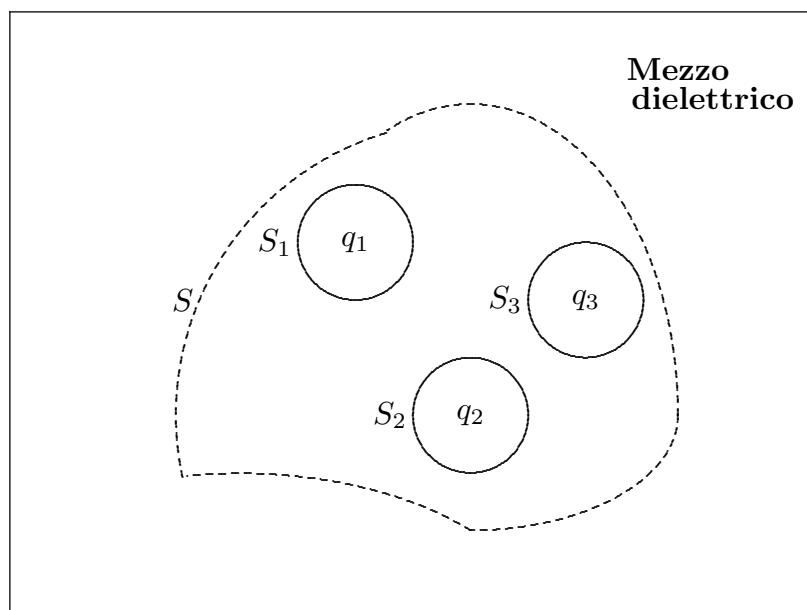


fig.5.8-1

Consideriamo la superficie tratteggiata  $S$  chiusa immaginaria ed interna ad un dielettrico. Nel volume limitato da  $S$  è contenuta una certa quantità di carica libera  $Q_{lib}$ . Assumeremo che questa carica libera sia posta sulla superficie di tre conduttori in quantità  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ . Per la legge di Gauss, si ha:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_{lib} + Q_P) \quad (5.8.1)$$

dove  $Q_{lib} = q_1 + q_2 + q_3$  è la carica libera totale e  $Q_P$  è la carica di polarizzazione:

$$Q_P = \oint_{S_1+S_2+S_3} \vec{P} \cdot \hat{n} da + \int_V (-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}) d^3 r' \quad (5.8.2)$$

essendo  $V$  il volume del dielettrico racchiuso da  $S$ .

L'integrale per  $Q_P$  non é esteso anche a  $S$  poiché  $S$  non é una superficie reale del dielettrico, quindi essa non é la carica totale del dielettrico e per questo non é zero.

D'altra parte, per il teorema della divergenza si ha:

$$\int_V (-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}) d^3r' = - \oint_{S+S_1+S_2+S_3} \vec{P} \cdot \hat{n} da$$

Quindi, sostituendo nella (5.8.2), si ha:

$$Q_P = \oint_{S_1+S_2+S_3} \vec{P} \cdot \hat{n} da - \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} da - \oint_{S_1+S_2+S_3} \vec{P} \cdot \hat{n} da = - \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} da \quad (5.8.3)$$

Sostituendo la (5.8.3) nella (5.8.1) si ottiene:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = -\frac{1}{\epsilon_0} \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} da + \frac{1}{\epsilon_0} Q_{lib}$$

che si può scrivere:

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \hat{n} da = Q_{lib} \quad (5.8.4)$$

Definiamo, ora, un nuovo campo macroscopico vettoriale  $\vec{D}$  che prende il nome di **induzione elettrica**:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.8.5)$$

Quindi il teorema di Gauss in presenza dei dielettrici si esprime:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q_{lib} \quad (5.8.6)$$

che in forma differenziale si scrive:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (5.8.7)$$

### 5.9 - Suscettività elettrica

Come abbiamo visto nella trattazione precedente il vettore polarizzazione  $\vec{P}$  dipende dal campo elettrico all'interno del dielettrico  $\vec{E}$  che a sua volta dipende dalla polarizzazione  $\vec{P}$ . Questo ci porta a dire che, a regime, esiste una relazione che lega i due vettori:

$$\vec{P} = \chi(\vec{E})\vec{E} \quad (5.9.1)$$

La quantità  $\chi$  prende il nome di **suscettività elettrica**.

Sostituendo la (5.9.1) nella (5.8.5) si ottiene:

$$\vec{D} = (\epsilon_0 + \chi(E)) \vec{E} = \epsilon(\vec{E}) \vec{E} \quad (5.9.2)$$

La quantità  $\epsilon(\vec{E})$  prende il nome di **costante dielettrica**. Per campi elettrici non molto intensi le quantità  $\chi$  ed  $\epsilon$  sono indipendenti da  $\vec{E}$ . In questo caso le relazioni che legano i campi alle polarizzazioni diventano:

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (5.9.3)$$

Poniamo:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (5.9.4)$$

La quantità  $\epsilon_r$  prende il nome di **costante dielettrica relativa**. Si hanno, ovviamente, le seguenti relazioni:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \quad \text{da cui} \quad \chi = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \quad (5.9.5)$$

Riportiamo nella tabella di seguito i valori della costante dielettrica relativa ai piú noti materiali; nella terza colonna é riportato il valore della rigiditá dielettrica del materiale.

Materiale	$\epsilon_r$	$E_{\max}(\text{V/m})$
Vetro	5-10	$9 \cdot 10^6$
Mica	6	$5 - 20 \cdot 10^6$
Nylon	3.5	$16 \cdot 10^6$
Gomma	2-3.5	$16 - 40 \cdot 10^6$
Zolfo	4	
Legno	2.5-8	
Alcol etilico	28.4	
Benzolo (= 0°C)	2.3	
Petrolio	2.1	$12 \cdot 10^6$
Acqua dist. (= 0°C)	88	
Acqua dist.(= 20°C)	80	
Aria (1 atm.)	1.00059	$3 \cdot 10^6$
Aria (100 atm)	1.0548	
CO <sub>2</sub> (100 atm.)	1.000985	

### 5.10 - Condensatore piano riempito di dielettrico

Applichiamo i risultati precedenti al caso di un condensatore piano riempito di dielettrico. Supponiamo di mettere dentro il capacitore vuoto una lastra di dielettrico fino a riempirlo. Essa si polarizza e se (come supponiamo) le lastre sono infinitamente estese, la polarizzazione é uniforme. All'interno del dielettrico vi sará un campo elettrico macroscopico  $\vec{E}$  che risulta essere eguale al campo elettrico esterno diminuito del campo elettrico che si viene a formare all'interno del dielettrico dovuto alle cariche di polarizzazione.

Questo campo elettrico  $\vec{E}'$  che prende il nome di **campo di depolarizzazione**, in quanto é opposto al campo elettrico esterno, risulta:

$$\vec{E}' = \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \hat{n} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (5.10.1)$$

in quanto  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$ .

Ricordiamo che il campo dato dalla (5.10.1) é stato calcolato **dall'equivalenza del dielettrico ad un insieme di cariche di polarizzazione superficiali** soltanto, in quanto la stessa polarizzazione é uniforme.

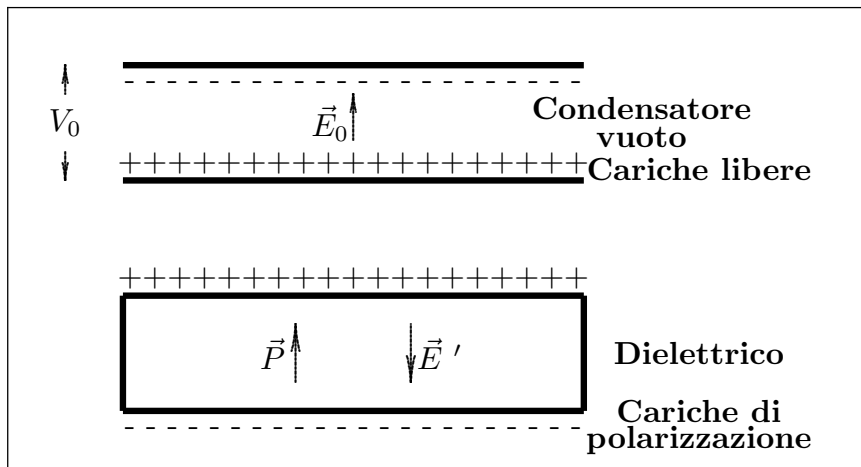


fig.5.10-1

Il campo elettrico totale é:

$$E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} \quad (5.10.2)$$

Poiché  $V = Ed$  si ha che la differenza di potenziale fra le armature del condensatore riempito di dielettrico é:

$$V_d = \left( E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} \right) d \quad (5.10.3)$$

mentre, ricordiamo, che quella relativa al condensatore vuoto é:  $V = E_0 d$ .

Ora, poiché  $P = \chi E$  si ha:

$$E = E_0 - \frac{1}{\epsilon_0} \chi E \rightarrow E = \frac{E_0}{1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}} = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad (5.10.4)$$

Quindi

$$V_d = \frac{E_0}{\epsilon_r} d \quad (5.10.5)$$

Ricordando la definizione di capacità del condensatore, risulta:

$$C_{diel} = \epsilon_r \frac{Q_{lib}}{E_0 d} \quad (5.10.6)$$

che confrontata con la capacità relativa al condensatore vuoto:  $C_{vuoto} = \frac{Q_{lib}}{E_0 d}$ , comporta il risultato importante:

$$C_{diel} > C_{vuoto} \quad (5.10.7)$$

Il vettore  $\vec{D}$  risulta:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (5.10.8)$$

### 5.11 - Applicazione della legge di Gauss in un dielettrico

Supponiamo di avere una carica puntiforme  $q$  immersa in un dielettrico omogeneo isotropo esteso infinitamente. Si supponga il dielettrico lineare e di costante dielettrica  $\epsilon_r$ .

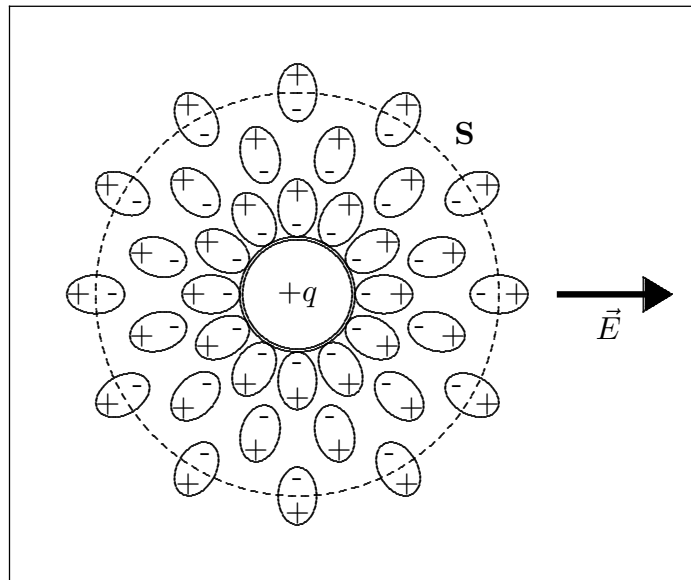


fig.5.11-1

Applichiamo il teorema di Gauss su una superficie chiusa  $S$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = q \rightarrow D 4\pi r^2 = q \rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (5.11.1)$$

Dalla (5.11.1) discendono le seguenti relazioni in forma vettoriale:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r} \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^3} \vec{r} \quad \vec{P} = \frac{(\epsilon_r - 1)q}{4\pi \epsilon_r r^3} \vec{r} \quad (5.11.2)$$

Cosí il campo elettrico é piú piccolo di un fattore  $\epsilon_r$  di quello che sarebbe se non ci fosse il mezzo.

Una bella e istruttiva spiegazione é la seguente: la nostra carica puntiforme  $q$  é un punto in senso macroscopico. In realtà in scala molecolare é grande, e le possiamo assegnare un raggio  $b$  che eventualmente si puó far tendere a zero. Allora sulla superficie di questa sfera compare una carica legata  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$ . Si ha:

$$Q_P = \lim_{b \rightarrow 0} 4\pi b^2 (\vec{P} \cdot \hat{n})_{r=b} = \lim_{b \rightarrow 0} \left[ -4\pi b^2 \frac{(\epsilon_r - 1)q}{4\pi \epsilon_r b^2} \right] = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q \quad (5.11.3)$$

La carica totale sulla sferetta di carica  $q$  é, quindi:

$$Q = Q_P + q = \frac{q}{\epsilon_r} \quad (5.11.4)$$

Quindi, da un punto di vista macroscopico la presenza del dielettrico funziona da schermo e la carica reale in presenza del dielettrico é equivalente ad una carica ridotta  $\epsilon_r$  volte.