

**Elettrostatica dei corpi conduttori: II**

**Soluzione di alcuni problemi di elettrostatica dei corpi conduttori mediante l'equazione di Laplace**

**4.1 - Sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme**

Si consideri una sfera conduttrice di raggio  $a$  il cui centro é collocato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio. In particolare si fissi il riferimento in modo tale che la direzione dell'asse  $\vec{z}$  coincida con quella del campo elettrico uniforme  $\vec{E}_0$ . Utilizzando un sistema di coordinate sferiche e scegliendo l'asse polare coincidente con l'asse  $\vec{z}$ , un punto  $P$  nello spazio puó essere individuato dalla terna  $(r, \theta, \phi)$ .

Poiché il sistema é a simmetria azimutale, la funzione potenziale non dipende da  $\phi$ ; scegliamo, allora,  $\phi = 0$  in modo che il piano di proiezione delle linee di forza risulti il piano  $(z, x)$ .

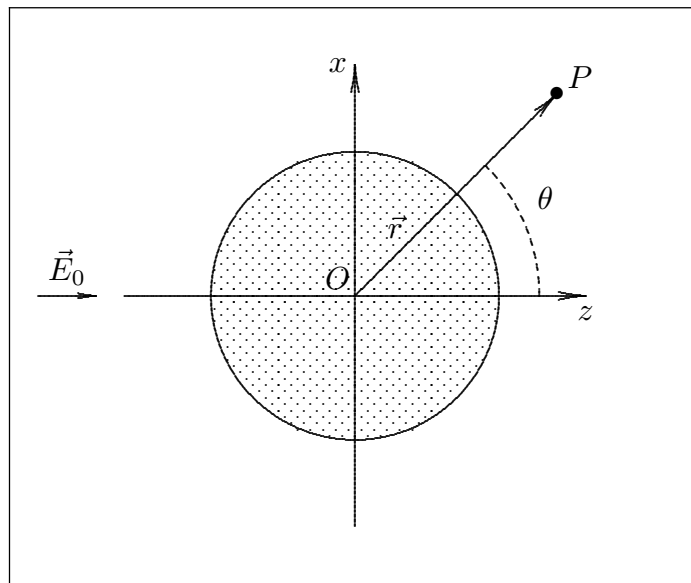


fig.4.1-1

Sia  $\Phi = \Phi(r, \theta)$  la funzione potenziale in coordinate sferiche che, data l'assenza di cariche elettriche, soddisfa all'equazione di Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{4.1.1}$$

che in coordinate sferiche assume la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0 \tag{4.1.2}$$

Cerchiamo una soluzione particolare nella classe delle funzioni:

$$\Phi(r, \theta) = Z(r)P(\theta) \quad (4.1.3)$$

Sostituendo si ha:

$$\frac{1}{r^2}P(\theta)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ(r)}{dr}\right) + \frac{Z(r)}{r^2\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = 0 \quad (4.1.4)$$

Moltiplicando per  $r^2$  e dividendo per  $Z(r)P(\theta)$  si ottiene:

$$\frac{1}{Z(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ(r)}{dr}\right) = -\frac{1}{P(\theta)\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) \quad (4.1.5)$$

A tal punto é evidente che il primo membro di tale ultima espressione é funzione solo di  $r$  ed il secondo solo di  $\theta$ ; si ha, cioé una espressione del tipo:

$$F(r) = G(\theta) \quad (4.1.6)$$

che é soddisfatta se e solo se la  $F(r)$  e la  $G(\theta)$  sono entrambi eguali ad una costante.

Indicando con  $k$  tale costante si ottiene il seguente sistema di equazioni equivalente alla equazione data:

$$-\frac{1}{P(\theta)\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = k \quad (4.1.7)$$

$$\frac{1}{Z(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ(r)}{dr}\right) = k \quad (4.1.8)$$

La (4.1.7) si può scrivere:

$$\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) + kP(\theta) = 0 \quad (4.1.9)$$

Questa é la cosiddetta equazione di Legendre. Si dimostra che le soluzioni fisicamente accettabili per  $P(\theta)$  (che non presentano, cioé, divergenze) si hanno per valori discreti di  $k$  ed in particolare per  $k = n(n + 1)$ , con  $n$  intero, positivo o nullo.

Tali soluzioni  $P_n(\theta)$  che si ottengono al variare di  $n$  sono detti **polinomi di Legendre**. Di seguito sono espressi i primi quattro polinomi:

<b>n</b>	<b>P<sub>n</sub>(θ)</b>
0	1
1	cos θ
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

Dopo aver considerato la  $P(\theta)$ , che é la soluzione azimutale, si prenda in considerazione la parte radiale  $Z(r)$ , cioè l'equazione (4.1.8):

$$\frac{1}{Z(r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dZ(r)}{dr} \right) = k$$

Moltiplicando per  $Z(r)$  e sostituendo a  $k$  i valori  $n(n+1)$ , si ha:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dZ(r)}{dr} \right) = n(n+1)Z(r) \quad (4.1.10)$$

Tale equazione differenziale ammette due classi indipendenti di soluzioni fisicamente accettabili:

$$Z_n(r) = r^n \quad e \quad Z_n(r) = r^{-(n+1)} \quad (4.1.11)$$

Tutto questo comporta per la funzione potenziale  $\Phi(r, \theta)$  le seguenti due classi di soluzioni indipendenti:

$$\Phi'_n = r^n P_n(\theta) \quad e \quad \Phi''_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta) \quad per \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.1.12)$$

che sono note come **armoniche zonali**.

La soluzione generale dell'equazione di Laplace é, data la sua linearitá, la combinazione lineare di tali due classi di soluzioni:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (4.1.13)$$

dove  $A$  e  $C$  sono costanti arbitrarie.

Per risolvere completamente il problema bisogna imporre che la soluzione generale dell'equazione di Laplace verifichi le condizioni al contorno sulla superficie della sfera e a distanza infinita da essa. Bisogna, cioè, calcolare i valori da attribuire alle costanti in modo che sulla superficie sferica sia verificata la condizione di **equipotenzialitá** e a grandi distanze dalla sfera quella che il campo elettrico sia eguale a quello imperturbato cioè al campo costante esistente prima dell'introduzione della sfera.

Quanto sopra si esprime ponendo:

$$\left[ \vec{E}(r, \theta) \right]_{r \rightarrow \infty} = E_0 \hat{z} \quad (4.1.14)$$

$$[\Phi(r, \theta)]_{r=a} = U_0 \quad (4.1.15)$$

Poiché la soluzione del problema é espressa in termini di funzione potenziale, bisogna tradurre la condizione (4.1.14) in termini di potenziale. Tenendo conto che per un campo elettrico uniforme  $E_0 \hat{z}$  il potenziale é del tipo:  $\Phi(x, y, z) = -E_0 z + cost$ , e che in coordinate sferiche polari risulta  $z = r \cos \theta$ , la (4.1.14) diventa:

$$[\Phi(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta + cost \quad (4.1.16)$$

Per imporre la condizione (4.1.16) si osservi che per  $r \rightarrow \infty$ , la funzione  $\Phi(r, \theta)$  diventa:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (4.1.17)$$

Ne segue che la (4.1.16) é soddisfatta soltanto se:

$$A_1 = cost, \quad A_2 = -E_0, \quad A_3 = A_4 = \dots = A_n = 0 \quad (4.1.18)$$

Pertanto, l'imposizione della sola condizione (4.1.16) conduce alla seguente espressione per  $\Phi(r, \theta)$ :

$$\Phi(r, \theta) = cost + C_1 r^{-1} + (C_2 r^{-2} - E_0 r) \cos \theta + \frac{3}{2} C_3 r^{-3} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} C_3 r^{-3} + \dots \quad (4.1.19)$$

Per imporre la condizione (4.1.15) basta imporre che la funzione  $\Phi(r, \theta)$  per  $r = a$  sia costante qualunque sia  $\theta$ .

Deve essere, cioè:

$$\Phi(a, \theta) = cost + C_1 a^{-1} + (C_2 a^{-2} - E_0 a) \cos \theta + \frac{3}{2} C_3 a^{-3} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} C_3 a^{-3} + \dots = U_0 \quad (4.1.20)$$

Per questo, occorre e basta che:

$$cost + C_1 a^{-1} = U_0, \quad C_2 = E_0 a^3 \quad e \quad C_3 = C_4 = \dots = C_n = 0 \quad (4.1.21)$$

Ne segue, quindi, che la soluzione generale dell'equazione di Laplace soddisfacente alle condizioni al contorno é:

$$\Phi(r, \theta) = U_0 - C_1 a^{-1} + C_1 r^{-1} - E_0 r \cos \theta + E_0 a^3 r^{-2} \cos \theta \quad (4.1.22)$$

Resta da determinare la costante  $C_1$  per la quale vale il seguente ragionamento fisico.

Il termine  $C_1 r^{-1}$  rappresenta, ovviamente, un potenziale ed, in particolare per  $r = a$ , quello sulla superficie sferica, di raggio  $a$ , sulla quale é posta la carica  $C_1 4\pi\epsilon_0$ .

**Pertanto, se la sfera é inizialmente scarica la costante  $C_1$  é zero;** nel caso in cui si vuole assumere la sfera inizialmente carica con carica  $Q_0$ , si deve avere:  $C_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}$ .

Supposto  $C_1 = 0$  il campo elettrico avrá le componenti:

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = E_0 \left( 1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (4.1.23)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -E_0 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (4.1.24)$$

Da esse si può facilmente verificare che per  $r = a$ , la componente tangenziale  $E_\theta$  si annulla ed il campo é tutto radiale.

É utile esprimere le componenti del campo elettrico in coordinate cartesiane; per questo, scriviamo l'espressione della funzione potenziale in coordinate cartesiane ponendo  $z = r \cos \theta$  e  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ . Si ha:

$$\Phi(x, z) = U_0 - E_0 z + E_0 a^3 \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.1.25)$$

da cui:

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = E_0 \left[ 1 + \frac{a^3 (2z^2 - x^2)}{(x^2 + z^2)^{5/2}} \right] \quad (4.1.26)$$

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3a^3 E_0 \frac{xz}{(x^2 + z^2)^{5/2}} \quad (4.1.27)$$

### Grafico delle linee di forza

É molto interessante tracciare le linee di forza del campo elettrostatico in presenza della sfera conduttrice.

Poiché il problema coinvolge una metodologia generale utile anche per altri analoghi problemi, illustriamo oltre al metodo analitico, che ovviamente non é sempre possibile applicare per la difficoltà di risolvere le forme differenziali, il metodo numerico che é sempre di facile applicazione.

Come sappiamo l'equazione delle linee di forza del campo elettrico é:

$$\vec{E} \times d\vec{s} = 0 \quad (4.1.28)$$

che in coordinate cartesiane, nel piano  $y = 0$ , comporta:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{E_x}{E_z} = \frac{3a^3 xz}{\left[ (x^2 + z^2)^{5/2} + a^3 (2z^2 - x^2) \right]} \quad (4.1.29)$$

L'equazione (4.1.29) non é di agevole integrazione, pertanto é conveniente esprimere l'equazione (4.1.28) nel piano  $(x, z)$  in coordinate sferiche polari, tenendo presente che, in tale piano risulta:

$$\vec{E} = E_r \hat{e}_r + E_\theta \hat{e}_\theta \quad (4.1.30)$$

$$d\vec{s} = (dr) \hat{e}_r + (rd\theta) \hat{e}_\theta \quad (4.1.31)$$

Quindi:

$$\vec{E} \times d\vec{s} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ E_r & E_\theta & 0 \\ dr & rd\theta & 0 \end{vmatrix} = (rE_r d\theta - E_\theta dr) \hat{e}_\phi = 0 \quad (4.1.32)$$

ossia:

$$rE_r d\theta - E_\theta dr = 0 \quad (4.1.33)$$

Sostituendo nella equazione (4.1.33) le espressioni (4.1.23) e (4.1.24) delle componenti del campo elettrico, si ha:

$$rE_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) \cos \theta d\theta = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin \theta dr \quad (4.1.34)$$

ossia:

$$\frac{dr}{r} \frac{1 - \frac{a^3}{r^3}}{1 + \frac{2a^3}{r^3}} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad (4.1.35)$$

La forma differenziale (4.1.35) é di facile integrazione. Integrando, si ha:

$$-\int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \int \frac{r^3 - a^3}{r^3 + 2a^3} \frac{dr}{r} + C \quad (4.1.36)$$

essendo C una costante arbitraria.

Dividendo numeratore e denominatore della funzione integranda del secondo membro per la quantità  $(r^3 + 2a^3)^2$ , la (4.1.36) diventa:

$$-\ln |\sin \theta| = \int \frac{\frac{r^3 - a^3}{(r^3 + 2a^3)^2}}{\frac{r}{r^3 + 2a^3}} dr + C$$

Moltiplicando e dividendo per -2 la funzione integranda del secondo membro, si ha:

$$-\ln |\sin \theta| = -\frac{1}{2} \int \frac{\frac{-2r^3 + 2a^3}{(r^3 + 2a^3)^2}}{\frac{r}{r^3 + 2a^3}} dr + C$$

Poiché risulta:

$$\frac{-2r^3 + 2a^3}{(r^3 + 2a^3)^2} = \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{r^3 + 2a^3} \right)$$

si ha, integrando:

$$-\ln |\sin \theta| = -\frac{1}{2} \ln \frac{r}{r^3 + 2a^3} + C$$

ossia:

$$\ln |\sin \theta| = \ln \sqrt{\frac{r}{r^3 + 2a^3}} + \text{costante}$$

Posto  $\text{costante} = \ln \xi$  ( $\xi > 0$ ), si ha:

$$\boxed{|\sin \theta| = \xi \sqrt{\frac{r}{r^3 + 2a^3}}} \quad (4.1.37)$$

La variabile  $r$  indica la distanza fra un generico punto della linea di forza ed il centro della sfera che é l'origine delle coordinate polari. Ovviamente, poiché l'equazione (4.1.37) descrive l'andamento delle linee di forza del campo elettrico esterno,  $r$  può variare da  $a$  all'infinito.

D'altra parte, poiché  $|\sin \theta| \leq 1$ , deve sempre risultare:

$$\xi \sqrt{\frac{r}{r^3 + 2a^3}} \leq 1 \tag{4.1.38}$$

La funzione  $\sqrt{\frac{r}{r^3 + 2a^3}}$ , per  $r \geq a$ , é decrescente all'aumentare di  $r$  ed ha il valore massimo per  $r = a$  che vale  $\sqrt{\frac{1}{3a^2}}$ .

Ne segue che per valori di  $\xi > \sqrt{3a^2}$ , la (4.1.38) é soddisfatta solo per valori di  $r > a$ , cioè le linee di forza non toccheranno mai la sfera.

Viceversa, per valori di  $\xi \leq \sqrt{3a^2}$ , la (4.1.38) é soddisfatta anche per  $r = a$  e quindi le linee di forza toccheranno la sfera.

Il valore  $\xi_s = \sqrt{3a^2}$  rappresenta, quindi, il valore di  $\xi$  al di sopra del quale le linee di forza si distaccheranno completamente dalla sfera.

Fissato  $\xi$ , per ogni valore di  $r$  esistono quattro valori di  $\theta$  che soddisfano alla (4.1.37). Infatti, per un particolare valore  $r^*$  esistono le soluzioni  $\theta^*$  e  $\pi - \theta^*$  competenti alla soluzione  $\sin \theta > 0$  e  $-\theta^*$  e  $\pi + \theta^*$  competenti alla soluzione  $\sin \theta < 0$ .

In corrispondenza di tali valori, le coordinate cartesiane dei generici punti delle linee di forza sono date dalle relazioni:

$$z = r \cos \theta \quad e \quad x = r \sin \theta \tag{4.1.39}$$

e giacciono nel primo quadrante ( $z > 0$  e  $x > 0$ ) o nel secondo quadrante ( $z < 0$  e  $x > 0$ ) per  $\sin \theta > 0$ , nel terzo quadrante ( $z < 0$  e  $x < 0$ ) o nel quarto quadrante ( $z > 0$  e  $x < 0$ ) per  $\sin \theta < 0$ .

Data l'evidente simmetria di tali linee di forza, per il grafico di esse é sufficiente valutare le coordinate  $z$  e  $x$  limitatamente al primo quadrante. Riportiamo due tabelle con i valori di  $z$  e  $x$  (nel primo quadrante) per due valori del parametro  $\xi$ .

$\xi = 0.5, a = 1$

$r$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$z$	$x$
1.0	0.28868	0.95743	0.95743	0.28868
1.1	0.28733	0.95783	1.0536	0.31606
1.2	0.28368	0.95892	1.1507	0.34041
1.3	0.27827	0.9605	1.2487	0.36176
1.4	0.27162	0.9624	1.3474	0.38027

1.5	0.26414	0.96449	1.4467	0.3962
1.6	0.25616	0.96663	1.5466	0.40985
1.7	0.24795	0.96877	1.6469	0.42151
1.8	0.2397	0.97085	1.7475	0.43146
1.9	0.23156	0.97282	1.8484	0.43995
2.0	0.22361	0.97468	1.9494	0.44721
2.1	0.21592	0.97641	2.0505	0.45343
2.2	0.20853	0.97802	2.1516	0.45877
2.3	0.20146	0.9795	2.2528	0.46336
2.4	0.19472	0.98086	2.3541	0.46734
2.5	0.18831	0.98211	2.4553	0.47078
2.6	0.18222	0.98326	2.5565	0.47377
2.7	0.17644	0.98431	2.6576	0.47638
2.8	0.17095	0.98528	2.7588	0.47867
2.9	0.16575	0.98617	2.8599	0.48068
3.0	0.16082	0.98698	2.961	0.48245
3.1	0.15613	0.98774	3.062	0.48402

$\xi = 1.5, a = 1$

$r$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$z$	$x$
1.0	0.86603	0.5	0.5	0.86603
1.1	0.86199	0.50693	0.55763	0.94818
1.2	0.85103	0.52512	0.63014	1.0212
1.3	0.83482	0.55052	0.71568	1.0853
1.4	0.81486	0.57966	0.81152	1.1408
1.5	0.79241	0.60999	0.91499	1.1886
1.6	0.76847	0.63988	1.0238	1.2296
1.7	0.74384	0.66835	1.1362	1.2645
1.8	0.7191	0.6949	1.2508	1.2944
1.9	0.69467	0.71933	1.3667	1.3199
2.0	0.67082	0.74162	1.4832	1.3416
2.1	0.64776	0.76185	1.5999	1.3603
2.2	0.62599	0.78015	1.7163	1.3763
2.3	0.60439	0.79669	1.8324	1.3901
2.4	0.58417	0.81163	1.9479	1.402
2.5	0.56493	0.82514	2.0628	1.4123
2.6	0.54666	0.83736	2.1771	1.4213
2.7	0.52931	0.84843	2.2908	1.4291
2.8	0.51286	0.85847	2.4037	1.436
2.9	0.49725	0.8676	2.5161	1.442
3.0	0.48245	0.87592	2.6278	1.4474



3.1	0.4684	0.88351	2.7389	1.4521
3.2	0.45507	0.89046	2.8495	1.4562
3.3	0.4424	0.89682	2.9595	1.4599
3.4	0.43036	0.90266	3.069	1.4632

Il significato del parametro  $\xi$  può essere dedotto dalla relazione  $x = r \sin \theta$ ; infatti, per  $\sin \theta > 0$  (per esempio), essa si può scrivere, dopo aver sostituito la (4.1.37), come  $x = \xi \sqrt{\frac{r^3}{r^3 + 2a^3}}$ . Poiché  $\lim_{r \rightarrow \infty} x = \xi$ , ne segue che il parametro  $\xi$  rappresenta l'ordinata della linea di forza del campo elettrico iniziale (imperturbato).

Le linee di forza del campo elettrico sono rappresentate in figura:

**Linee di forza del campo elettrico**

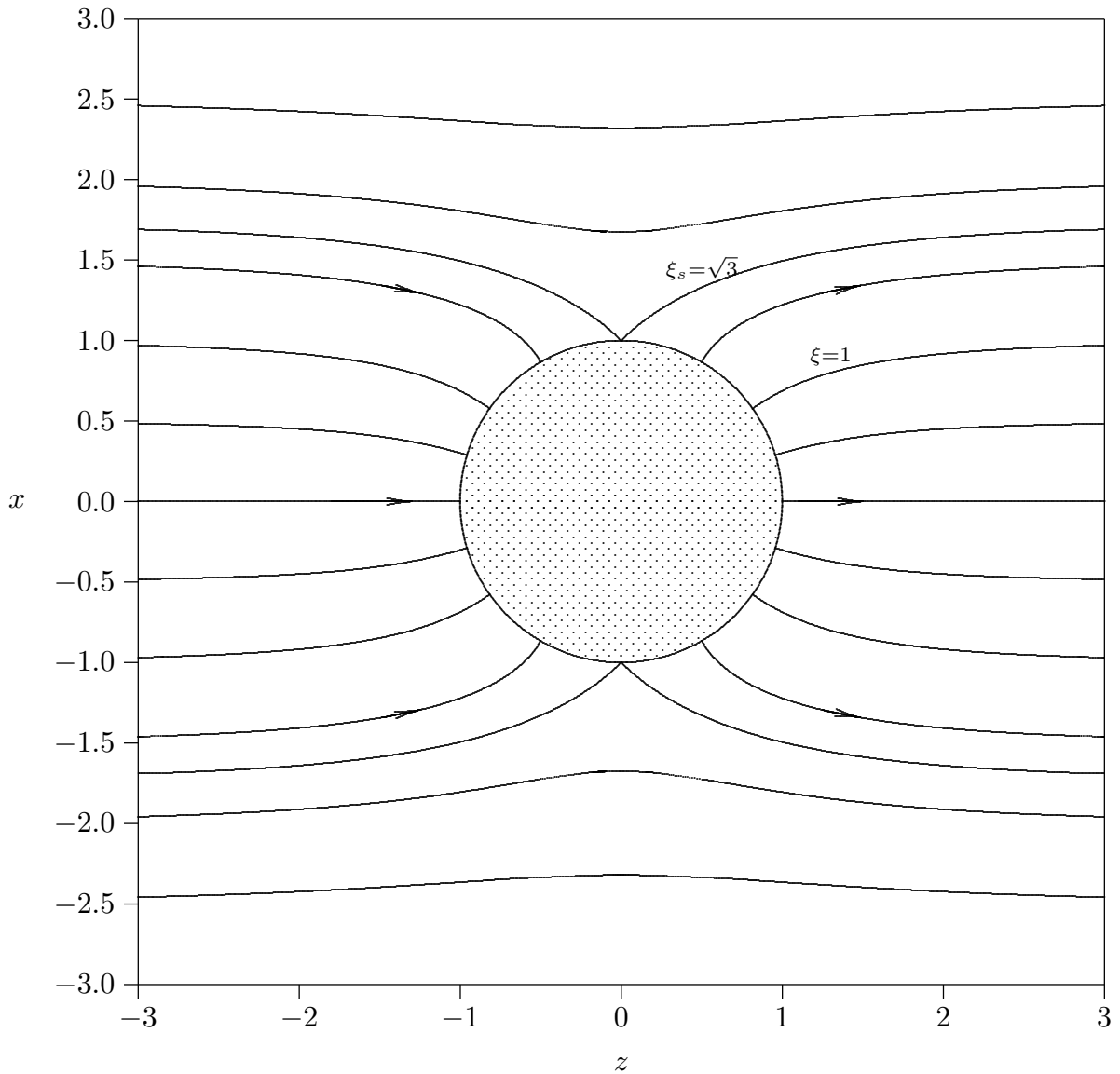


fig.4.1-2

É importante osservare l'effettiva ortogonalit  delle linee di forza sulla superficie della sfera. La linea competente al parametro  $\xi_s = \sqrt{3}$ , come si pu  verificare dalla (4.1.29), per  $z = 0$  e  $x = a$  ha tangente verticale, infatti  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{dx}{dz} = +\infty$ . In tale punto il campo elettrico   nullo.

### Metodo per la soluzione numerica dell'equazione differenziale (4.1.29).

Il metodo che si descrive   usato per risolvere un'ampia variet  di equazioni differenziali del primo ordine nella forma  $x' = F(z, x)$  (per uniformarci alla simbologia utilizzata per il nostro problema) con valori iniziali  $(z_0, x_0)$ . Esso che prende il nome di metodo di **Runge-Kutta**   basato sullo sviluppo in serie di Taylor di una qualsiasi funzione derivabile  $f(z)$ , a partire da un punto iniziale  $z_0$  arbitrariamente prefissato:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \dots \quad (4.1.40)$$

Nel caso in esame la  $x$  viene considerata funzione della variabile  $z$ , e si conosce di essa la derivata prima, data dalla (4.1.29). Si pu  allora pensare di sviluppare la funzione  $x(z)$  in serie di Taylor fino alla derivata del primo ordine a partire da un prefissato punto iniziale di coordinate  $(z_0, x_0)$ . Fisicamente fissare un punto sul piano  $z, x$  vuol dire fissare la linea di forza passante per quel punto.

Ci proponiamo di trovare le coordinate di una sequenza di punti successivi a quello iniziale che appartengono alla linea di forza prefissata.

Per far questo si fissi un incremento  $h$  della variabile indipendente  $z$ ; il primo punto, appartenente alla stessa linea di forza, successivo al punto iniziale, ha le seguenti coordinate:

$$z_1 = z_0 + h, \quad x_1 = x(z_0 + h) = x_0 + h \left( \frac{dx}{dz} \right)_{z=z_0} \quad (4.1.41)$$

Posto  $\frac{dx}{dz} = F(z, x)$ , essendo  $F(z, x)$  il secondo membro della (4.1.29), si ha:

$$z_1 = z_0 + h, \quad x_1 = x_0 + hF(z_0, x_0) \quad (4.1.42)$$

Assumendo, ora, il punto  $(z_1, x_1)$  come nuovo punto iniziale si ottiene un secondo punto appartenente alla stessa linea di forza, le cui coordinate sono:

$$z_2 = z_1 + h, \quad x_2 = x_1 + hF(z_1, x_1) \quad (4.1.43)$$

Ripetendo la stessa procedura, si ottengono le coordinate di tutti i punti successivi al punto  $(z_2, x_2)$  dalle espressioni ricorrenti:

$$z_i = z_0 + ih, \quad x_i = x_{i-1} + hF(z_{i-1}, x_{i-1}) \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (4.1.44)$$

Si   cos  ottenuta una sequenza di punti appartenenti alla linea di forza passante per il punto iniziale le cui coordinate possono essere espresse dalle relazioni ricorrenti. Scegliendo l'incremento  $h$  sufficientemente piccolo l'errore diventa irrilevante.

### Calcolo della densità di carica indotta sulla superficie della sfera

La densità di carica superficiale indotta sulla superficie della sfera si può ricavare dal teorema di Coulomb:

$$E_{sup} = \frac{\sigma_{sup}}{\epsilon_0} \quad (4.1.45)$$

che vale sulla superficie di un conduttore.

Nel nostro caso:

$$\sigma_{ind} = \epsilon_0 [E_r]_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (4.1.46)$$

dalla quale si deduce che la densità di carica  $\sigma$  è positiva sulla superficie rivolta verso l'asse  $z$  positivo e negativa sull'altra, annullandosi nel piano diametrale  $xy$ . Si osservi che la carica totale indotta sulla superficie della sfera è nulla, in accordo con il principio di conservazione della carica elettrica, infatti:

$$\int_S \sigma_{ind} dS = \int_0^\pi 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = 0 \quad (4.1.47)$$

### Potenziale dentro la sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme

Scriviamo la soluzione generale (4.1.13) della equazione di Laplace:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

Poiché per  $r \rightarrow 0$  il potenziale divergerebbe, le costanti  $C$  devono necessariamente annullarsi.

Quindi, dopo questa condizione:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{3}{2} A_3 r^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} A_3 r^2 + \dots \quad (4.1.48)$$

Poiché per  $r = a$ , qualunque sia  $\theta$ , deve essere  $\Phi(a, \theta) = U_0$ , si ha:

$$A_1 = U_0, \quad A_2 = A_3 = \dots = 0 \quad \text{quindi :} \quad \Phi(\mathbf{r}, \theta) = U_0 \quad \text{da cui segue :} \quad \vec{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (4.1.49)$$

La (4.1.49) esprime, ancora una volta, che all'interno di una sfera conduttrice (cava o no) il campo elettrico è nullo.

#### 4.2 - Campi e densità di carica entro angoli bidimensionali e lungo spigoli

Consideriamo due semipiani conduttori che si intersecano sotto un angolo  $\beta$ . I due semipiani sono mantenuti a potenziale costante  $V$  che in seguito supporremo eguale a zero.

Lontano dall'origine (e non indicati in figura) vi sono altri conduttori ed eventualmente configurazioni di cariche che determinano in modo univoco il problema del potenziale.

Siccome quello che ci interessa è il comportamento funzionale dei campi vicino alla origine, e non il loro valore assoluto, lasceremo il più possibile impregiudicato il comportamento "lontano".

Poiché supponiamo i piani infinitamente estesi lungo la direzione dell'asse  $z$ , il problema diventa bidimensionale e suggerisce l'impiego di coordinate polari.

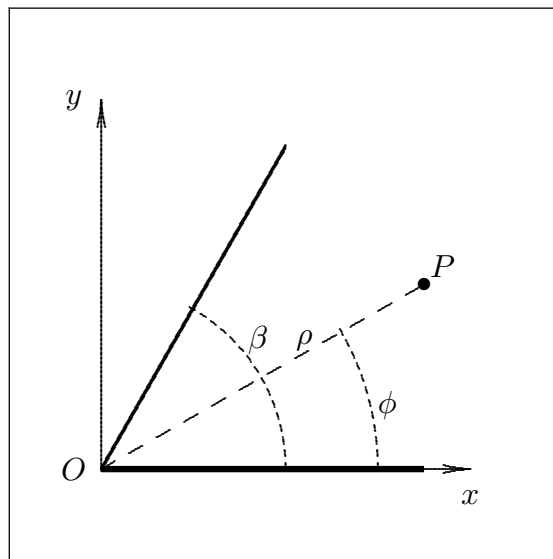


fig.4.2-1

Consideriamo la zona all'interno dello spigolo (perché sono ben definite le condizioni al contorno) e siano  $\rho$  e  $\phi$  le coordinate polari del punto  $P$ .

L'equazione di Laplace in coordinate polari è:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4.2.1)$$

Risolviamo, ponendo:

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi) \quad (4.2.2)$$

Sostituendo si ha:

$$\Psi(\phi) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} R(\rho) \frac{d^2 \Psi(\phi)}{d\phi^2} = 0 \quad (4.2.3)$$

Dividendo per  $R(\rho)\Psi(\phi)$  e moltiplicando per  $\rho^2$  si ha:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Psi(\phi)} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} = 0 \quad (4.2.4)$$

che si può scrivere:  $F(\rho) = -G(\phi)$ .

Siccome i due membri sono funzioni, il primo solo di  $\rho$  e il secondo solo di  $\phi$ , essi devono essere entrambi costanti:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = \nu^2 \quad (4.2.5)$$

$$\frac{1}{\Psi(\phi)} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} = -\nu^2 \quad (4.2.6)$$

Consideriamo  $\nu^2 \neq 0$ . La seconda equazione ha la soluzione:

$$\Psi_\nu(\phi) = A_\nu \cos \nu\phi + B_\nu \sin \nu\phi \quad (4.2.7)$$

Nell'eventualit  che  $\nu$  sia eguale a zero si ha:

$$\Psi_0(\phi) = A_0 + B_0\phi \quad (4.2.8)$$

Cerchiamo, ora, la soluzione dell'equazione (4.2.5):

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = \nu^2$$

che si pu  scrivere:

$$\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \nu^2 R(\rho) = 0 \quad (4.2.9)$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti che rientra nella classe delle **equazioni differenziali di Eulero**.

Per risolvere la (4.2.9) effettuiamo un cambiamento della variabile indipendente: poniamo  $\rho = e^t$ ; si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{dR}{d\rho} \\ \frac{d^2 R}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \left[ \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) \right] \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{dR}{d\rho} + \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

essendo  $\frac{d\rho}{dt} = \rho$

L'equazione, quindi, diventa:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - \nu^2 R = 0 \quad (4.2.11)$$

che é un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, che ha per soluzioni:

$$R_1 = e^{\nu t} \quad R_2 = e^{-\nu t} \quad (4.2.12)$$

essendo  $t = \ln \rho$ , che sostituito nelle (4.2.12) comporta:

$$R_1(\rho) = \rho^\nu \quad e \quad R_2(\rho) = \rho^{-\nu} \quad (4.2.13)$$

L'integrale generale della (4.2.9) é allora:

$$R_\nu(\rho) = a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu} \quad \text{per } \nu \neq 0 \quad (4.2.14)$$

Per  $\nu = 0$ , l'equazione diventa:

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = 0 \quad (4.2.15)$$

che comporta:

$$\frac{dR(\rho)}{d\rho} = \frac{cost}{\rho} \quad (4.2.16)$$

la cui soluzione é:

$$R_0(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho \quad (4.2.17)$$

Poiché l'origine  $\rho = 0$  é inclusa nel sistema che stiamo considerando, dobbiamo porre, per evitare divergenze  $b_\nu = b_0 = 0$ .

In definitiva le soluzioni accettabili sono, quindi:

$$\Psi_\nu(\phi) = A_\nu \cos \nu \phi + B_\nu \sin \nu \phi$$

$$\Psi_0(\phi) = A_0 + B_0 \phi$$

$$R_\nu(\rho) = a_\nu \rho^\nu$$

$$R_0(\rho) = a_0$$

cioé il potenziale é descritto dalle:

$$\Phi_\nu(\rho, \phi) = (A_\nu \cos \nu \phi + B_\nu \sin \nu \phi) a_\nu \rho^\nu \quad \text{per } \nu \neq 0 \quad (4.2.18)$$

$$\Phi_0(\rho, \phi) = A_0 a_0 + a_0 B_0 \phi \quad \text{per } \nu = 0 \quad (4.2.19)$$

Imponiamo, ora, le condizioni al contorno:

$$\Phi(\rho, 0) = \Phi(\rho, \beta) = 0 \quad (4.2.20)$$

cioé il potenziale deve essere nullo sulle pareti dello spigolo. Pertanto, deve essere:

$$\Phi_\nu(\rho, 0) = A_\nu a_\nu \rho^\nu = 0 \quad (4.2.21)$$

per cui si deve imporre  $A_\nu = 0$  in quanto l'annullamento di  $a_\nu$  porterebbe alla soluzione banale.

$$\Phi_0(\rho, 0) = A_0 a_0 = 0 \quad (4.2.22)$$

il che comporta, come sopra  $A_0 = 0$ .

$$\Phi_0(\rho, \beta) = a_0 B_0 \beta = 0 \quad (4.2.23)$$

che comporta  $B_0 = 0$ .

$$\Phi_\nu(\rho, \beta) = (B_\nu \sin \nu \beta) a_\nu \rho^\nu = 0 \quad (4.2.24)$$

Anche in questo caso dobbiamo imporre che sia:  $B_\nu \sin \nu \beta = 0$  e dovendo per forza essere  $B_\nu \neq 0$  (per evitare la soluzione banale) si deve avere:  $\sin \nu \beta = 0$  da cui:

$$\nu = \frac{m\pi}{\beta} \text{ con } m = 1, 2, \dots \quad (4.2.25)$$

La soluzione é quindi:

$$\Phi_m(\rho, \phi) = a_m B_m \rho^{\frac{m\pi}{\beta}} \sin \frac{m\pi}{\beta} \phi \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.2.26)$$

Data la linearitá dell'equazione di Laplace, la soluzione generale é:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \rho^{\frac{m\pi}{\beta}} \sin \left( \frac{m\pi}{\beta} \phi \right) \quad (4.2.27)$$

dove i coefficienti  $c_m$ , ancora indeterminati, dipendono dai valori del potenziale in punti lontani dall'angolo (cioé dalla sorgente).

Poiché vogliamo studiare il potenziale per valori di  $\rho$  prossimi allo zero possiamo trascurare i termini della serie oltre il primo e quindi nell'immediato intorno di  $\rho = 0$  il potenziale é approssimativamente:

$$\Phi(\rho, \phi) = c_1 \rho^{\frac{\pi}{\beta}} \sin \left( \frac{\pi}{\beta} \phi \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (4.2.28)$$

Pertanto, le componenti del campo elettrico, in prossimitá dell'origine, sono:

$$E_\rho(\rho, \phi) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = -\frac{\pi}{\beta} c_1 \rho^{\left(\frac{\pi}{\beta} - 1\right)} \sin \left( \frac{\pi}{\beta} \phi \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (4.2.29)$$

$$E_\phi(\rho, \phi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\frac{\pi}{\beta} c_1 \rho^{\left(\frac{\pi}{\beta} - 1\right)} \cos \left( \frac{\pi}{\beta} \phi \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (4.2.30)$$

**Caso  $\beta > \pi$**  - L'angolo bidimensionale **diventa uno spigolo** ed il campo e la densità superficiale di carica diventano singolari per  $\rho \rightarrow 0$ . Per  $\beta = 2\pi$  (cioè lo spigolo è per esempio il bordo di una lastra sottile) la  $\sigma$  segue la legge  $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ .

Il comportamento dei campi in vicinanza degli orli appuntiti rende ragione del funzionamento dei **parafulmini**. Infatti, in prossimità dello spigolo o delle punte si vengono a creare campi molto intensi. Se essi superano una certa intensità (la quale dipende dalla forma esatta dell'elettrodo, dalla sua posizione rispetto ad altri elettrodi) si può avere il collasso dielettrico e quindi la scarica.

Per aria a *TPN* questa intensità di campo, che come vedremo prende il nome di **rigidità dielettrica**, vale  $3 \cdot 10^6$  V/m. Durante i temporali, con le grandi differenze di potenziale fra il suolo e le nubi, una aguzza lama conduttrice messa a terra provocherà il collasso dielettrico nelle sue vicinanze (parafulmine).

Per  $\phi = 0$  i campi sono:

$$E_\rho(\rho, 0) = 0 \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (4.2.31)$$

$$E_\phi(\rho, 0) = -\frac{\pi}{\beta} c_1 \rho \left( \frac{\pi}{\beta} - 1 \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (4.2.32)$$

Per  $\phi = \beta$  i campi sono:

$$E_\rho(\rho, \beta) = 0 \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (4.2.33)$$

$$E_\phi(\rho, \beta) = \frac{\pi}{\beta} c_1 \rho \left( \frac{\pi}{\beta} - 1 \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (4.2.34)$$

cioè essi sono ortogonali alle pareti o entrambi uscenti o entrambi entranti.

Calcoliamo la densità di carica sulle pareti sempre in prossimità dell'origine:

$$|\sigma| = \epsilon_0 |E_\phi| = \epsilon_0 \frac{\pi}{\beta} c_1 \rho \left( \frac{\pi}{\beta} - 1 \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (4.2.35)$$

**Caso  $\beta < \pi$**  - L'esponente di  $\rho$  è positivo e quindi per  $\rho \ll 1$  la  $\sigma_{ind}$  nell'angolo interno è praticamente nulla qualunque sia  $c_1$ . Per  $\beta = \frac{\pi}{4}$  la  $\sigma$  in prossimità dell'origine varia con legge  $\rho^3$ . Per  $\beta = \pi$  (superficie piana) la  $\sigma$  diventa indipendente da  $\rho$ , come è ovvio intuitivamente.



### 4.3 - Gabbia di Faraday a rete

Come ultimo esempio desideriamo descrivere un'altra proprietà interessante dei campi elettrici, della quale si fa uso nella progettazione di strumenti elettrici, valvole termoioniche e per lo **schermaggio elettrostatico**.

Per rendere il problema più semplice possibile, considereremo una schiera di fili paralleli giacenti in un piano; i fili siano infinitamente lunghi, perfettamente conduttori e uniformemente spaziatati fra loro.

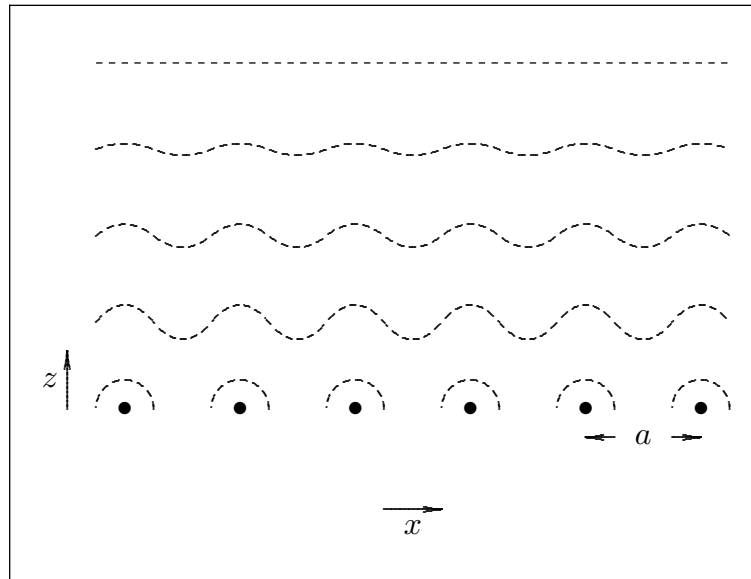


fig.4.3-1

Applichiamo l'equazione di Laplace bidimensionale in quanto essendo i fili infinitamente lunghi lungo la direzione  $\hat{y}$ , il potenziale non dipenderá da  $y$  e pertanto sará:  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ .

Si ha allora:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.3.1)$$

Dobbiamo trovare una soluzione tale che per  $x = ma$  il potenziale per  $z = 0$  deve essere costante.

Data la periodicitá lungo la direzione  $\hat{x}$ , scegliamo la soluzione nella classe delle funzioni:

$$\Phi_n(x, z) = F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{a} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.3.2)$$

dove  $F_n(z)$  é una funzione da determinare attraverso la (4.3.1).

La soluzione generale sará, al solito:

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x, z) \quad (4.3.3)$$

Sostituendo la (4.3.2) nella (4.3.1) si ha:

$$-F_n(z) \left( \frac{2\pi n}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi n x}{a} + \frac{d^2 F_n(z)}{dz^2} \cos \frac{2\pi n x}{a} = 0$$

cioé:

$$\frac{d^2 F_n(z)}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(z) \quad (4.3.4)$$

che é del tipo:

$$F''(z) - \omega^2 F(z) = 0 \quad (4.3.5)$$

Una soluzione particolare della (4.3.5) é:

$$F_n = A_n e^{-\frac{2\pi n}{a} z} \quad (4.3.6)$$

Posto  $z_n = \frac{a}{2\pi n}$  la (4.3.6) assume la forma:

$$F_n = A_n e^{-\frac{z}{z_n}} \quad (4.3.7)$$

La soluzione generale é la somma su  $n$  delle soluzioni (4.3.7).

Poiché all'aumentare di  $n$   $z_n$  diminuisce, si può considerare solo la componente per  $n = 1$  cioè la **prima armonica**.

Assumiamo, allora, come soluzione del problema:

$$\Phi(x, z) = A e^{-\frac{2\pi}{a} z} \cos \frac{2\pi x}{a} + \Phi_0 \quad (4.3.8)$$

Il campo elettrico valutato come:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$  risulta:

$$\vec{E} = -\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \Phi - \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \Phi = A \hat{x} \frac{2\pi}{a} e^{-\frac{2\pi}{a} z} \sin \frac{2\pi x}{a} + A \hat{z} \frac{2\pi}{a} e^{-\frac{2\pi}{a} z} \cos \frac{2\pi x}{a} \quad (4.3.9)$$

Per  $z = 4 \div 5$  volte la quantità  $\frac{a}{2\pi}$ , il campo é praticamente nullo. Ecco dimostrato come una schiera di fili (in pratica, ancora meglio, una rete) riesce a schermare da un campo elettrico esterno.