

Elettrostatica dei corpi conduttori: I

3.1 - Corpi conduttori

Un problema importante dell'elettrostatica é quello di studiare come si modifica un campo elettrico in presenza di corpi conduttori.

Dal punto di vista elettrico il corpo conduttore é definito dal fatto che, **sempre, il campo elettrico nei punti interni di esso é nullo.**

Microscopicamente questo si spiega, in quanto, essendo in un conduttore gli elettroni liberi di muoversi, essi, in presenza di un campo elettrico esterno, si precipitano verso la superficie del corpo caricandola.

La redistribuzione interna delle cariche crea un nuovo campo elettrico all'interno, di verso opposto (stessa direzione) a quello esterno. Il processo continua fino a quando il modulo del campo interno eguaglia quello del campo esterno.

Poiché $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$, essendo $\vec{E} = 0$ nei punti interni del corpo conduttore, si deduce che $\Phi =$ **costante in ogni punto del corpo e per continuità anche in ciascun punto della superficie.**

Pertanto, **la superficie di un corpo conduttore é una superficie equipotenziale.**

Calcoliamo, ora, come abbiamo fatto nel caso del dipolo, il differenziale della funzione potenziale $\Phi(x, y, z)$. Si ha:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz$$

che, ovviamente, si può scrivere:

$$d\Phi = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \tag{3.1.1}$$

Se $d\vec{r}$ rappresenta uno spostamento vincolato sulla superficie del corpo, si ha:

$$[d\Phi]_{sup} = [\vec{\nabla}\Phi]_{sup} \cdot [d\vec{r}]_{sup} = 0 \tag{3.1.2}$$

per l'equipotenzialità della funzione Φ su S.

Dalla (3.1.2) si deduce che $[\vec{\nabla}\Phi]_{sup}$ é ortogonale a $[d\vec{r}]_{sup}$, cioè:

il campo elettrico sulla superficie di un corpo conduttore é ortogonale alla superficie stessa o, che é lo stesso, sulla superficie di un corpo conduttore la componente tangenziale del campo elettrico si annulla.

Calcoliamo, ora, il campo elettrico sulla superficie di un corpo conduttore. Consideriamo una superficie conduttrice e in essa consideriamo un piccolo cilindretto circolare con una superficie di base all'interno del conduttore e con l'altra posta all'esterno. Appliciamo a tale superficie chiusa cilindrica il teorema di Gauss, si ha:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi kq$$

da cui: $\vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi k\sigma da$.

Ne segue:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = 4\pi k\sigma \quad (3.1.3)$$

La (3.1.3), stabilito \hat{n} ed il segno di σ , ci fornisce in modulo, direzione e verso il campo elettrico sulla superficie del conduttore.

Nel sistema SI:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{Teorema di Coulomb}) \quad (3.1.4)$$

3.2 - Semplici casi di elettrizzazione: Lastre conduttrici parallele

Consideriamo due piani perfettamente conduttori paralleli, infinitamente estesi, distanti d , e mantenuti a potenziali V_A e V_B .

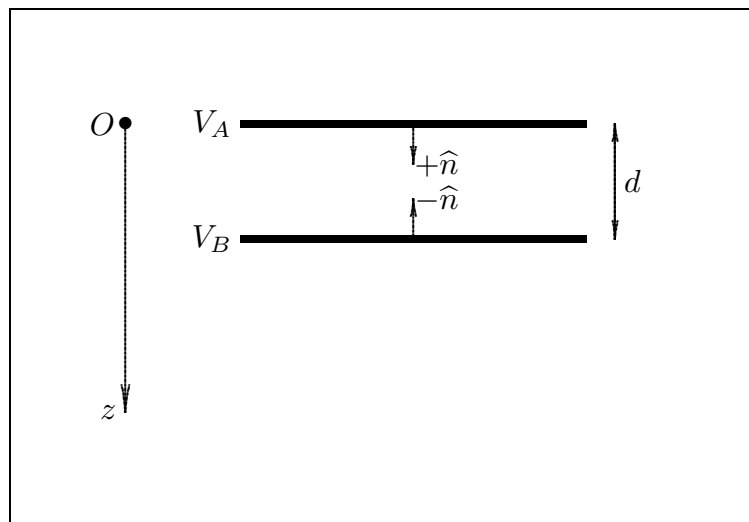


fig.3.2-1

Data l'estensione infinita dei piani, la funzione potenziale Φ all'interno delle lastre é funzione soltanto di z . Applichiamo l'equazione di Laplace:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0$$

la cui soluzione é:

$$\Phi = C_1 + C_2 z \quad (3.2.1)$$

e poiché per $z = 0$ è $\Phi = V_A$ e per $z = d$ $\Phi = V_B$ la soluzione cercata è:

$$\Phi(z) = V_A + (V_B - V_A) \frac{z}{d} \quad (3.2.2)$$

Il campo elettrico nello spazio fra le lastre è:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \rightarrow E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{(V_B - V_A)}{d} \quad (3.2.3)$$

Se $V_B < V_A \rightarrow E_z$ è diretto verso l'asse z positivo a conferma che il campo elettrico è diretto da punti a potenziale più alto verso punti a potenziale più basso.

Per il teorema di Coulomb possiamo ricavare le densità superficiali di carica che si creeranno sulla superficie di ciascuna lastra.

Si ha infatti:

$$\sigma = \frac{\vec{E} \cdot \hat{n}}{4\pi k} = \frac{E}{4\pi k} \quad \text{sulla lastra a potenziale } V_A \quad (3.2.4)$$

$$\sigma' = \frac{\vec{E} \cdot (-\hat{n})}{4\pi k} = -\frac{E}{4\pi k} = -\sigma \quad \text{sulla lastra a potenziale } V_B \quad (3.2.5)$$

Il sistema che abbiamo studiato prende il nome di **condensatore piano**. Moltiplicando la (3.2.4) per l'area di una superficie S staccata su ciascuna lastra (armatura), si ha:

$$\sigma S = \frac{\Delta V S}{4\pi k d} \quad \text{ossia} \quad q = \frac{\Delta V S}{4\pi k d}$$

Il rapporto $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ prende il nome di **capacità del condensatore piano**; la sua unità di misura è il **Farad**.

Calcoliamo, adesso, l'energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore piano sfruttando l'espressione (2.1.16):

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int_{\text{tutto lo spazio}} |E|^2 d^3 r \quad (3.2.6)$$

Nel caso di un condensatore piano:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \quad (3.2.7)$$

per cui:

$$W = \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{\Delta V}{d} \right)^2 S d = \frac{1}{8\pi k} \frac{S}{d} (\Delta V)^2 \quad (3.2.8)$$

e, poiché la capacità del condensatore piano è:

$$C = \frac{S}{4\pi k d} \quad (3.2.9)$$

la (3.2.8) si scrive:

$$W = \frac{1}{2}C (\Delta V)^2 \quad (3.2.10)$$

3.3 - Sfere conduttrici concentriche

Consideriamo, ora, due superfici sferiche perfettamente conduttrici.

Si mantengano a potenziali V_A e V_B rispettivamente due superfici sferiche concentriche di raggi a e b di cui b sia il maggiore. La funzione potenziale Φ é chiaramente una funzione di r .

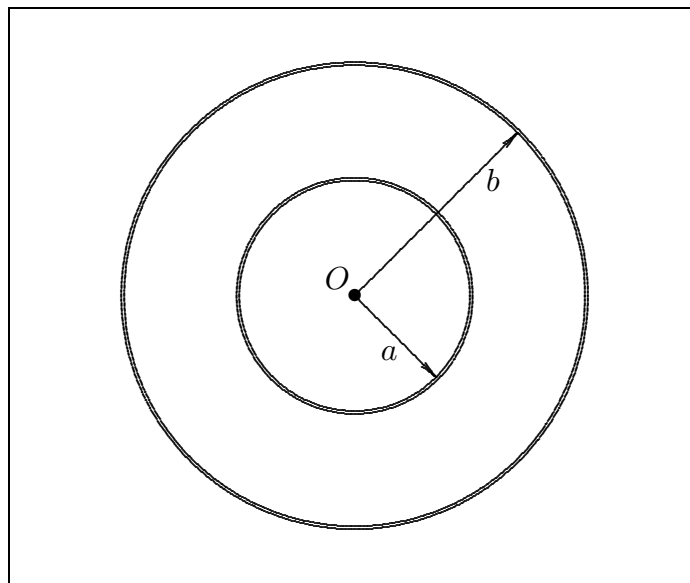


fig.3.3-1

L'equazione di Laplace in coordinate sferiche, allora, diventa:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.3.1)$$

da cui:

$$r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \text{costante}$$

cioé:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\text{costante}}{r^2} \quad \text{per cui} \quad \Phi = C_1 + \frac{C_2}{r} \quad (3.3.2)$$

Poiché per $r = a$ $\Phi = V_A$ e per $r = b$ $\Phi = V_B$ si ha il seguente sistema per la determinazione delle costanti C_1 e C_2 :

$$\begin{aligned} V_A &= C_1 + \frac{C_2}{a} \\ V_B &= C_1 + \frac{C_2}{b} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

le cui soluzioni sono:

$$C_1 = \frac{aV_A - bV_B}{a - b} \quad C_2 = (V_B - V_A) \frac{ab}{a - b}$$

La soluzione é pertanto:

$$\Phi = \frac{aV_A - bV_B}{a - b} + \frac{ab(V_B - V_A)}{a - b} \frac{1}{r} \quad (3.3.4)$$

É opportuno osservare che se nella (3.3.4) facciamo tendere $a \rightarrow 0$ risulta $\Phi = V_B$, da cui $E = 0$ cioè il campo elettrostatico all'interno di una superficie sferica conduttrice é nullo analogamente al caso del guscio sferico carico.

Dalla (3.3.4) segue:

$$\vec{E} = -\hat{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{V_A - V_B}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \quad (3.3.5)$$

Applicando il teorema di Coulomb siamo in grado di calcolare le densità di cariche sulla superficie interna della sfera esterna e sulla superficie esterna della sfera interna.

$$\sigma_A = \frac{E_A}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi k a^2} \frac{V_A - V_B}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad \sigma_B = \frac{-E_B}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi k b^2} \frac{V_B - V_A}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (3.3.6)$$

Segue immediatamente che:

$$q_A = 4\pi a^2 \sigma_A = \frac{1}{k} \frac{V_A - V_B}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = -q_B \quad (3.3.7)$$

ossia:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b - a}$$

**Capacità di un
condensatore
sferico** (3.3.8)

Osserviamo che per $b \rightarrow \infty$, $V_B \rightarrow 0$ cioè in presenza della sola sfera di raggio a il campo per $r > a$ é:

$$E = \frac{V_A a}{r^2} \quad \text{ed essendo} \quad q_A = \frac{1}{k} a V_A \quad \text{segue} \quad E = k \frac{q_A}{r^2} \quad (3.3.9)$$

cioé il campo elettrostatico generato da una sfera di raggio a coincide con quello di una carica puntiforme posta al centro della sfera.

Il sistema costituito da due sfere conduttrici concentriche prende il nome di **condensatore sferico**.

Vogliamo calcolare, adesso, l'energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore sferico sfruttando l'espressione (2.1.16):

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int_{\text{tutto lo spazio}} |E|^2 d^3r \quad (3.3.10)$$

Nel caso di un condensatore sferico:

$$E = \frac{\Delta V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \frac{1}{r^2} \quad (3.3.11)$$

per cui l'energia potenziale del condensatore sferico é:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{\Delta V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \right)^2 \int_a^b \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2k} \left(\frac{\Delta V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \right)^2 \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \\ &= \frac{1}{2k} \left(\frac{\Delta V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \right)^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2k} \frac{(\Delta V)^2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Poiché la capacità del condensatore sferico é:

$$C = \frac{1}{k} \frac{ab}{b-a} = \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (3.3.13)$$

la (3.3.12) si scrive:

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (3.3.14)$$

Analogamente al caso del condensatore piano, abbiamo trovato che l'energia potenziale di un qualsiasi tipo di condensatore si può esprimere come la (3.3.14). Questa rappresenta l'energia che bisogna spendere per caricare un qualunque tipo di condensatore.

3.4 - Superfici cilindriche conduttrici coassiali

Sia a il raggio della superficie esterna di un cilindro conduttore, e sia b il raggio della superficie interna di una cavità cilindrica.

É evidente che il campo dipende solo dalla distanza dall'asse di simmetria, per cui l'equazione di Laplace in coordinate cilindriche si scrive:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \text{costante} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{\text{costante}}{\rho} \quad \rightarrow \quad \Phi = C_1 + C_2 \ln \rho \quad (3.4.1)$$

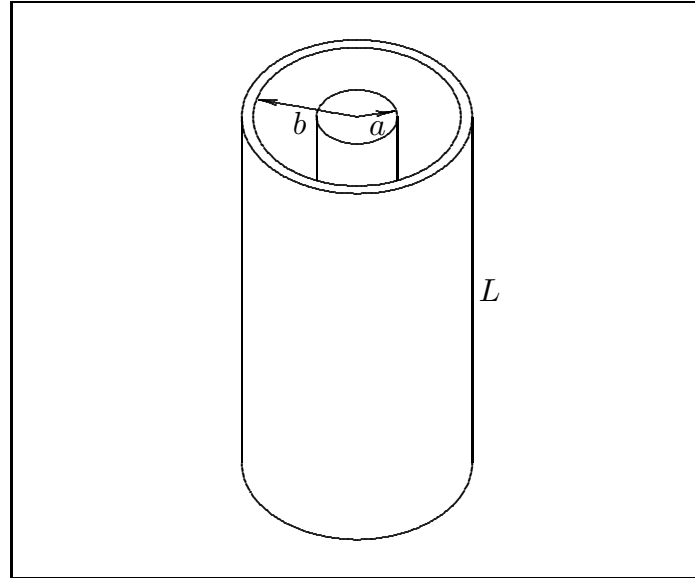


fig.3.4-1

Poiché $\Phi = V_A$ per $\rho = a$ e $\Phi = V_B$ per $\rho = b$ si ha il seguente sistema:

$$\begin{aligned} V_A &= C_1 + C_2 \ln a \\ V_B &= C_1 + C_2 \ln b \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

da cui:

$$C_1 = \frac{V_B \ln a - V_A \ln b}{\ln \frac{a}{b}} \quad C_2 = \frac{V_A - V_B}{\ln \frac{a}{b}}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{V_B \ln a - V_A \ln b}{\ln \frac{a}{b}} + \frac{V_A - V_B}{\ln \frac{a}{b}} \ln \rho = \frac{V_B \ln a - V_B \ln \rho - V_A \ln b + V_A \ln \rho}{\ln \frac{a}{b}} = \\ &= \frac{V_B \ln \frac{a}{\rho} + V_A \ln \frac{\rho}{b}}{\ln \frac{a}{b}} = \frac{V_A \ln \frac{b}{\rho} + V_B \ln \frac{\rho}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Il campo elettrico é dato da:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{e}_\rho = -\frac{-V_A\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}V_B}{\ln \frac{b}{a}}\hat{e}_\rho = \frac{V_A - V_B}{\rho \ln \frac{b}{a}}\hat{e}_\rho \quad (3.4.4)$$

Applichiamo, ora, il teorema di Coulomb per determinare le densità superficiali di carica sulle superfici conduttrici.

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = 4\pi k\sigma \quad 4\pi k\sigma_A = \frac{V_A - V_B}{a \ln \frac{b}{a}} \quad 4\pi k\sigma_B = -\frac{V_A - V_B}{b \ln \frac{b}{a}} \quad (3.4.5)$$

La quantità di carica depositata su una lunghezza L é:

$$q_A = 2\pi a L \sigma_A = \frac{V_A - V_B}{2k \ln \frac{b}{a}} L = -q_B \quad (3.4.6)$$

Per la capacità si ha:

$$C = \frac{1}{2k} \frac{L}{\ln \frac{b}{a}}$$

Nel sistema SI:

| | |
|--|--|
| $C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln \frac{b}{a}}$ | <p>Capacità di un condensatore cilindrico (3.4.7)</p> |
|--|--|

3.5 - Capacità di due fili cilindrici paralleli (linea di trasmissione)¹⁾

In questo paragrafo troveremo la capacità di due cilindri conduttori paralleli che assumiamo essere infinitamente lunghi. Sebbene questo problema può essere risolto per due cilindri di raggi diversi, ci occuperemo del caso in cui i due cilindri abbiano la stessa dimensione. **I risultati possono essere usati per trovare la capacità per unità di lunghezza nel caso di linee di trasmissione a fili paralleli come, per esempio il cavo doppio per la televisione.**

Questo problema è più difficile del corrispondente per il cavo coassiale. Quindi è importante che noi capiamo il metodo di soluzione prima di cominciare con i dettagli. Come nel caso del cavo coassiale sappiamo che una corrente fluisce in un filo e una opposta ed uguale in intensità fluisce nell'altro filo. Ad ogni istante di tempo possiamo assumere quindi che le due linee sono egualmente e in senso opposto cariche. Il problema ora è ridotto a quello di risolvere la distribuzione del campo e del potenziale nella regione fra i due conduttori cilindrici che hanno una superficie carica. **Sfortunatamente, poichè la distanza fra i cilindri è finita, la distribuzione di carica su ciascun cilindro non sarà uniforme.** Come mostrato in figura 3.5-1, la densità di carica superficiale è più

¹⁾ Martin A. Plonus: Applied Electromagnetics - McGraw-Hill, Inc. - 1978, pag. 168 - 172.

grande per punti sul cilindro che sono più vicini all'altro cilindro.

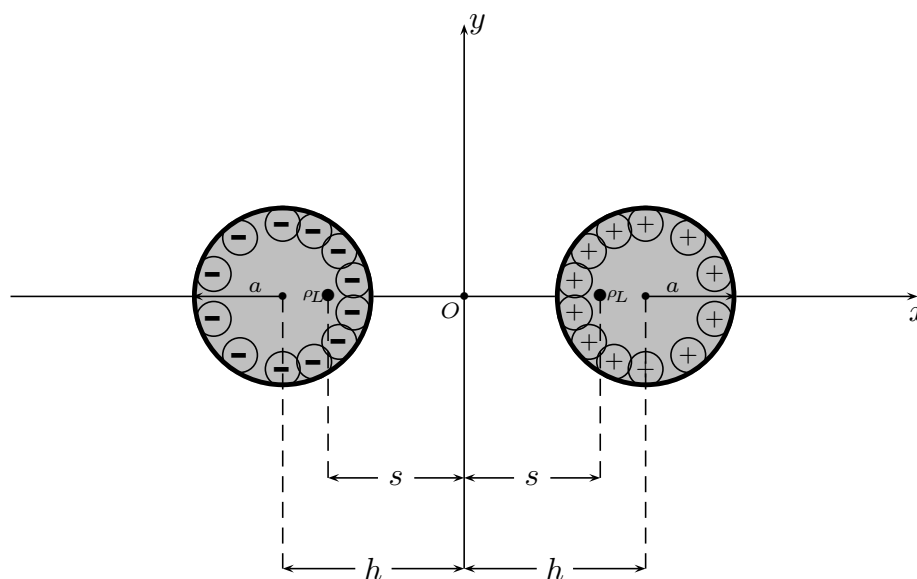


fig.3.5-1

Ogni cilindro carico può essere nuovamente sostituito da una linea equivalente di densità di carica ρ_L , ma a causa della non uniforme distribuzione della carica la posizione dell'equivalente linea carica non è al centro del cilindro ma è spostata dal centro verso l'altro cilindro, come mostrato in figura 3.5-1.

La soluzione del problema dei due fili si riduce, quindi, alla soluzione della distribuzione del potenziale fra due cariche lineari. Dimostreremo che le superfici equipotenziali saranno cilindri sulle cariche di linea, come mostrato in figura. Questo fatto può essere usato per la soluzione della linea di trasmissione a fili paralleli come segue: Le superfici conduttrici di una linea di trasmissione costituita da due fili spazati $2h$ e ciascuno di raggio a possono sempre essere fatte coincidere con alcuni cilindri equipotenziali delle due linee cariche variando la distanza $2s$ fra le due distribuzioni lineari. Se, infatti, due conduttori cilindrici (le cui superfici sono equipotenziali) fossero così posizionati, non disturberebbero il contributo al campo di figura 3.5-1. Quindi, noi possiamo usare la distribuzione di potenziale delle due distribuzioni lineari di cariche per calcolare la capacità fra i due fili conduttori paralleli.

3.6 - Campo elettrico generato da due distribuzioni lineari di cariche

Due distribuzioni lineari di cariche di densità $+\rho_L$ e $-\rho_L$ rispettivamente, sono posizionati distanti $\pm s$ dall'origine nel verso dell'asse x . L'asse y che è la mediana della distanza è una linea di potenziale $V = 0$. Lungo tale asse una carica test può muoversi senza essere affetta dalla forza del campo generato da $+\rho_L$ e da $-\rho_L$. Scegliamo l'origine O come un punto di riferimento conveniente da cui misurare i potenziali.

La funzione potenziale $V(x, y)$ nel punto $P(x, y)$ può essere ottenuta aggiungendo il potenziale generato da $+\rho_L$ quando $-\rho_L$ non è presente al potenziale generato da $-\rho_L$ quando $+\rho_L$ non è presente. Per una distribuzione di carica lineare isolata le linee equipotenziali sono cerchi attorno alla carica lineare. Consideriamo la carica $+\rho_L$. La

differenza di potenziale fra un circonferenza centrata in $+\rho_L$ passante per P e una che é centrata nell'origine é data da:¹⁾

$$V_{OP}^+ = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{s}{r_2} \quad (3.6.1)$$

dove r_2 ed s sono raggi misurati da $+\rho_L$. Analogamente, il potenziale generato dalla linea carica $-\rho_L$ é dato da:

$$V_{OP}^- = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{s}{r_1} \quad (3.6.2)$$

Dal teorema di sovrapposizione la differenza di potenziale fra O e P in presenza di entrambe le cariche è quindi eguale alla somma:

$$V_{OP} = V_{OP}^+ + V_{OP}^- = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (3.6.3)$$

Da questa equazione osserviamo che $V = 0$ lungo l'asse y , perchè $r_1/r_2 = 1$ lungo $x = 0$. Cerchiamo ora la famiglia delle linee equipotenziali nel piano xy . Queste curve, per le quali $V = costante$, sono definite ponendo nell'equazione (3.6.3):

$$\frac{r_1}{r_2} = K \quad \text{con} \quad K = costante \quad (3.6.4)$$

Esprimendo r_1 ed r_2 in termini di coordinate $x - y$, si ha:

$$r_1 = \sqrt{(s+x)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(s-x)^2 + y^2} \quad (3.6.5)$$

Ne segue che la (3.6.4) si può scrivere:

$$(s+x)^2 + y^2 = K^2 [(s-x)^2 + y^2] \quad (3.6.6)$$

ossia:

$$s^2 + x^2 + 2sx + y^2 = K^2 s^2 + K^2 x^2 - 2K^2 sx + K^2 y^2 \quad (3.6.7)$$

$$x^2(1 - K^2) + s^2(1 - K^2) + 2sx(1 + K^2) + y^2(1 - K^2) = 0 \quad (3.6.8)$$

Cambiando di segno:

$$x^2(K^2 - 1) + s^2(K^2 - 1) - 2sx(K^2 + 1) + y^2(K^2 - 1) = 0 \quad (3.6.9)$$

da cui:

$$x^2 - 2sx \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} + s^2 + y^2 = 0 \quad (3.6.10)$$

Per mettere questa formula in una forma più riconoscibile, possiamo aggiungere la quantità $s^2(K^2 + 1)^2/(K^2 - 1)^2$ ad entrambi i membri dell'equazione (3.6.10). Questo completa il quadrato del membro a sinistra, e la (3.6.10) diventa:

$$x^2 - 2sx \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} + s^2 + y^2 + s^2 \frac{(K^2 + 1)^2}{(K^2 - 1)^2} = s^2 \frac{(K^2 + 1)^2}{(K^2 - 1)^2} \quad (3.6.11)$$

¹⁾ vedi formula (3.4.3)

ossia:

$$x^2 - 2sx \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} + s^2 \frac{(K^2 + 1)^2}{(K^2 - 1)^2} + y^2 = s^2 \left[\frac{(K^2 + 1)^2}{(K^2 - 1)^2} - 1 \right] \quad (3.6.12)$$

$$\left(x - s \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2Ks}{K^2 - 1} \right)^2 \quad (3.6.13)$$

Questa è l'equazione di una famiglia di circonferenze aventi la forma:

$$(x - h)^2 + y^2 = a^2 \quad (3.6.14)$$

di raggi:

$$a = \frac{2Ks}{K^2 - 1} \quad (3.6.15)$$

e il centro di questi cerchi si trova nel punto $(h, 0)$ sull'asse x , essendo:

$$h = s \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \quad (3.6.16)$$

3.7 - Linea di trasmissione a due conduttori

I precedenti risultati possono ora essere usati per calcolare la capacità di una linea di trasmissione a fili paralleli semplicemente incastrando la superficie esterna dei due conduttori equipotenziali ad una coppia di cerchi equipotenti di figura. Per esempio, una particolare linea di trasmissione può essere rappresentata da due circonferenze di raggio a e dai due centri separati $2h$. Se una differenza di potenziale $V_{PP'}$ è applicata fra i due cilindri, una linea equivalente di densità di carica ρ_L può essere determinato dalle equazioni. La capacità per unità di lunghezza è allora il rapporto fra ρ_L e la differenza di potenziale $V_{PP'}$.

In modo da usare i risultati precedenti, esprimiamo il potenziale fra i due cilindri in termini dei parametri a ed h della linea di trasmissione. Se $V_{PP'}$ è applicata fra i due cilindri, un conduttore sarà a $+V_{PP'}/2 = V_{0P}$ e l'altro a $-V_{PP'}/2$. Dalla (3.6.3) possiamo allora scrivere:

$$V_{PP'} = \frac{\rho_L}{\pi\epsilon} \ln K \quad (3.7.1)$$

per le equipotenziali. Possiamo esprimere K in termini di a ed h eliminando s dalle (3.6.15) e (3.6.16).

Dividendo membro a membro la (3.6.15) e la (3.6.16) si ha:

$$\frac{a}{h} = \frac{2K}{K^2 + 1} \quad (3.7.2)$$

ossia:

$$K^2 - \frac{2Kh}{a} + 1 = 0 \quad (3.7.3)$$

Le due soluzioni di questa equazione sono:

$$K = \frac{h}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} \quad (3.7.4)$$

Indicando con K^+ la soluzione della (3.7.4) con il segno + e con K^- la soluzione della (3.7.4) con il segno -, si ha che $K^+K^- = 1$. Poichè la distanza h fra i fili deve essere più grande del raggio a , cioè $h/a > 1$, si ha che $K^+ > 1$ e $K^- < 1$. La prima radice K^+ dà le curve equipotenziali nel semipiano destro, e K^- nel semipiano sinistro. La differenza di potenziale fra i due conduttori cilindrici può allora essere scritta:

$$V_{PP'} = V_P - V_{P'} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln K^+ - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln K^- = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \left[\ln K^+ - \ln \frac{1}{K^+} \right] = \frac{\rho_L}{\pi\epsilon} \ln K^+ \quad (3.7.5)$$

ossia:

$$V_{PP'} = V_P - V_{P'} = \frac{\rho_L}{\pi\epsilon} \ln \left[\frac{h}{a} + \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} \right] \quad (3.7.6)$$

Finalmente la capacità per unità di lunghezza C/l , in Farad/metro é data da:

$$\frac{C}{l} = \frac{\rho_L}{V_{PP'}} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \left[\frac{h}{a} + \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} \right]}$$

Capacità di
una linea
bifilare per
unità di
lunghezza

(3.7.7)

Ricordando che:¹⁾

$$\operatorname{arccosh} x = \pm \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (x > 1) \quad (3.7.8)$$

la (3.7.7) si può, anche, scrivere:

$$\frac{C}{l} = \frac{\rho_L}{V_{PP'}} = \frac{\pi\epsilon}{\operatorname{arccosh} \left(\frac{h}{a} \right)}$$

Capacità di
una linea
bifilare per
unità di
lunghezza

(3.7.9)

Si ha:

$$\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r, \quad \epsilon_0 \simeq 8.854 \cdot 10^{-12}, \quad \text{quindi,} \quad \pi\epsilon_0 \simeq 27.8 \cdot 10^{-12} \quad (3.7.10)$$

¹⁾ Herbert Bristol Dwight: Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Fourth Edition, 1961, pag.165, n.701.

Ne segue che la equazione (3.7.7) si può scrivere:

$$\frac{C}{l} \simeq \frac{27.8\epsilon_r}{\ln \left[\frac{h}{a} + \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} \right]} \quad pF/m \quad (3.7.11)$$

Per molte linee di trasmissione pratiche il rapporto fra la distanze dei centri dei fili e il loro raggio è tale che $2h/a > 10$. Utilizzando l'espressione $a/h \ll 1$, la (3.7.11) si semplifica:

$$\frac{C}{l} \approx \frac{27.8\epsilon_r}{\ln \left(\frac{2h}{a} \right)} \quad pF/m \quad a/h \ll 1 \quad (3.7.12)$$

Possiamo ora osservare che la capacità per unità di lunghezza competente ad un linea di trasmissione a fili paralleli è approssimativamente eguale alla metà di quella competente ad un cavo coassiale (vedi formula (3.4.7)).

3.8 - Il tensore degli sforzi di Maxwell

Su ogni corpo carico esiste, in ciascun punto, una forza dovuta a tutte le cariche presenti nel corpo, anche se la forza totale è nulla. Il calcolo di tale forza è importante nel caso di corpi conduttori.

Vogliamo, adesso, presentare un metodo per il calcolo della forza che oltre ad essere elegante e generale ci permette la conoscenza di essa per mezzo del campo elettrico sulla superficie del corpo.

Consideriamo un volume V contenente una distribuzione di carica di densità ρ e sia \vec{E} il campo elettrico in ciascun punto della distribuzione. Certamente la forza che agisce su tutto il volume è:

$$\vec{F} = \int_V \rho \vec{E} d^3r' \quad (3.8.1)$$

Consideriamo l'equazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k \rho$; da essa si ha: $\rho = \frac{1}{4\pi k} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, che sostituita nella (3.8.1) comporta:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi k} \int_V \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d^3r' \quad (3.8.2)$$

che possiamo scrivere:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi k} \left[\int_V E_x (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \hat{x} d^3r' + \int_V E_y (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \hat{y} d^3r' + \int_V E_z (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \hat{z} d^3r' \right] \quad (3.8.3)$$

Per una nota identità vettoriale si ha:

$$\Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \Phi \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \Phi$$

essendo Φ una generica funzione scalare ed \vec{A} una generica funzione vettoriale.

Si ha:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi k} \left\{ \int_V [\vec{\nabla} \cdot (E_x \vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} E_x] \hat{x} d^3 r' + \int_V [\vec{\nabla} \cdot (E_y \vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} E_y] \hat{y} d^3 r' + \right. \\ &\quad \left. \int_V [\vec{\nabla} \cdot (E_z \vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} E_z] \hat{z} d^3 r' \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi k} \left\{ \int_V [\vec{\nabla} \cdot (E_x \vec{E})] \hat{x} d^3 r' + \int_V [\vec{\nabla} \cdot (E_y \vec{E})] \hat{y} d^3 r' + \int_V [\vec{\nabla} \cdot (E_z \vec{E})] \hat{z} d^3 r' \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi k} \left\{ \int_V (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} E_x) \hat{x} d^3 r' + \int_V (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} E_y) \hat{y} d^3 r' + \int_V (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} E_z) \hat{z} d^3 r' \right\} \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

Applicando il teorema della divergenza si ha:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi k} \left\{ \hat{x} \oint_S E_x (\vec{E} \cdot \hat{n}) da + \hat{y} \oint_S E_y (\vec{E} \cdot \hat{n}) da + \right. \\ &\quad \left. + \hat{z} \oint_S E_z (\vec{E} \cdot \hat{n}) da \right\} - \frac{1}{4\pi k} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} d^3 r' \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

Il secondo termine dell'eq.(3.8.5) si può facilmente verificare.

In definitiva si ha:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi k} \oint_S \vec{E} (\vec{E} \cdot \hat{n}) da - \frac{1}{4\pi k} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} d^3 r' \quad (3.8.6)$$

Consideriamo l'identità vettoriale:

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

e calcoliamo:

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

Ne segue che:

$$(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \vec{\nabla} (\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Ma $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ per l'irrotazionalità del campo elettrostatico, quindi:

$$(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2$$

Pertanto:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi k} \oint_S \vec{E} (\vec{E} \cdot \hat{n}) da - \frac{1}{4\pi k} \int_V \vec{\nabla} \frac{E^2}{2} d^3r' \quad (3.8.7)$$

Ma: $\int_V \vec{\nabla} \Phi d^3r' = \oint_S \Phi \hat{n} dS$, per cui:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi k} \oint_S \left[\vec{E} (\vec{E} \cdot \hat{n}) - \frac{E^2}{2} \hat{n} \right] da \quad (3.8.8)$$

L'integrando si può scrivere come il prodotto di un tensore $\bar{\bar{T}}$ per il versore \hat{n} , cioè:

$$\frac{1}{4\pi k} \left[\vec{E} (\vec{E} \cdot \hat{n}) - \frac{E^2}{2} \hat{n} \right] = \bar{\bar{T}} \hat{n} = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad (3.8.9)$$

Il tensore $\bar{\bar{T}}$ in forma matriciale si scrive:

$$\bar{\bar{T}} = \frac{1}{4\pi k} \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{E^2}{2} & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & E_y^2 - \frac{E^2}{2} & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & E_z^2 - \frac{E^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3.8.10)$$

$\bar{\bar{T}}$ é chiamato **tensore elettrostatico degli sforzi di Maxwell**. Si ha:

$$\vec{F} = \oint_S \bar{\bar{T}} \hat{n} da \quad (3.8.11)$$

Il prodotto $\bar{\bar{T}} \hat{n}$, in forma matriciale, si scrive:

$$\bar{\bar{T}} \hat{n} = \frac{1}{4\pi k} \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{E^2}{2} & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & E_y^2 - \frac{E^2}{2} & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & E_z^2 - \frac{E^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (3.8.12)$$

Le densità superficiali di forza sono:

$$\left(\frac{d\vec{F}}{dS} \right)_x = \frac{1}{4\pi k} \left[\left(E_x^2 - \frac{E^2}{2} \right) n_x + E_x E_y n_y + E_x E_z n_z \right] \quad (3.8.13)$$

$$\left(\frac{d\vec{F}}{dS} \right)_y = \frac{1}{4\pi k} \left[E_x E_y n_x + \left(E_y^2 - \frac{E^2}{2} \right) n_y + E_y E_z n_z \right] \quad (3.8.14)$$

$$\left(\frac{d\vec{F}}{dS}\right)_z = \frac{1}{4\pi k} \left[E_x E_z n_x + E_y E_z n_y + \left(E_z^2 - \frac{E^2}{2} \right) n_z \right] \quad (3.8.15)$$

Applicazione al caso di conduttori superficialmente carichi

Sulla superficie dei conduttori (perfetti) il campo elettrico é ortogonale su ciascun punto di essi. Pertanto risulta:

$$\vec{E} \parallel \hat{n} \text{ o (antiparallelo)} \quad (3.8.16)$$

Applicando la (3.8.9), si ha:

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{1}{4\pi k} \left[E^2 \hat{n} - \frac{E^2}{2} \hat{n} \right] = \frac{1}{4\pi k} \frac{E^2}{2} \hat{n} = 4\pi k \frac{\sigma^2}{2} \hat{n} \quad (3.8.17)$$

L'ultimo termine dell'eq.(3.5.17) é stato ottenuto applicando l'equazione di Coulomb $E = 4\pi k\sigma$.

Nel S.I.:

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{sup}^2 \hat{n} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (3.8.18)$$

Questa forza agisce lungo la normale in direzione esterna rispetto al conduttore sia che la carica é negativa o positiva. Essa in un conduttore é sempre **una forza di tensione**.

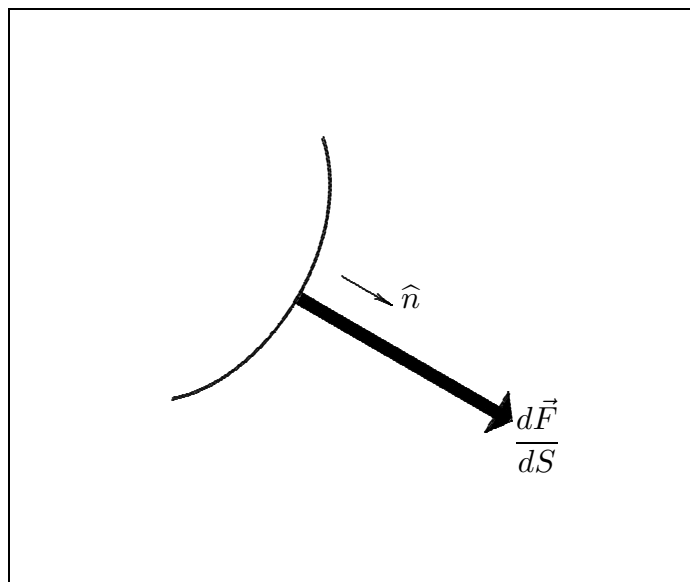


fig.3.8-1

3.9 - Immagini elettrostatiche

Enunciamo il teorema di unicit  relative alle equazioni differenziali: Due soluzioni della equazione di Laplace che soddisfano alle stesse condizioni al contorno differiscono al pi  per una costante additiva.

Da questo teorema segue che fissata una serie di condizioni al contorno la soluzione dell'equazione differenziale   una sola; sicch  se si ottiene una soluzione $\Phi(x, y, z,)$ e se questa soddisfa a tutte le condizioni al contorno, allora si   ottenuta una soluzione completa del problema. Un procedimento per raggiungere questo risultato senza risolvere una equazione differenziale   il metodo delle immagini. Esso non   universalmente applicabile a tutti i problemi di elettrostatica, ma vi   un sufficiente numero di problemi interessanti che rientrano in tale categoria.

3.10 - Carica puntiforme in presenza di piano conduttore

Si determini il campo di una carica puntiforme q , posta in un punto P_0 , in presenza di un conduttore la cui superficie si possa supporre un piano infinito Π a potenziale zero.

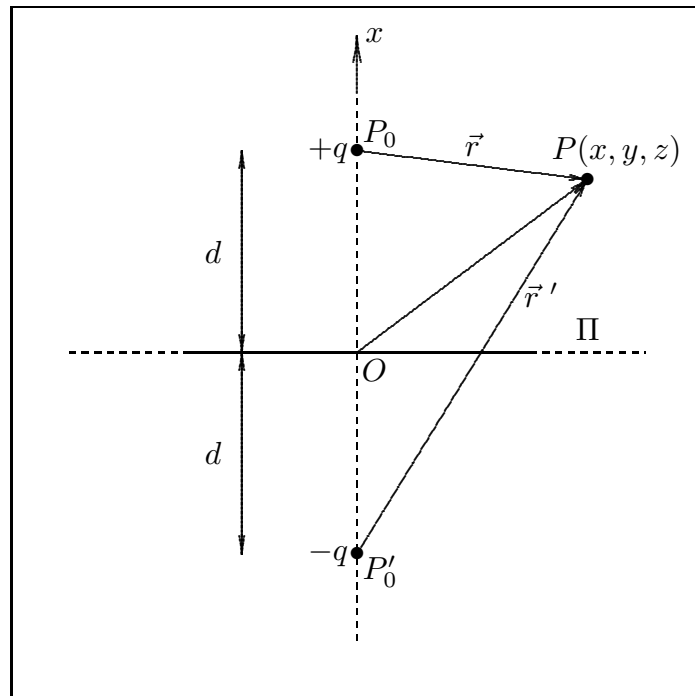


fig.3.10-1

Si immagini una carica $-q$ posta nel punto P'_0 (immagine di P_0 rispetto a Π). Consideriamo il potenziale generato dal sistema delle due cariche in un generico punto P dello

spazio:

$$\Phi(P) = k\frac{q}{r} - k\frac{q}{r'} \quad (3.10.1)$$

dove r e r' sono le distanze del punto P da P_0 e P'_0 . Ora, Φ su Π dove r é uguale a r' si annulla, quindi la funzione Φ non solo soddisfa all'equazione di Laplace in tutti i punti esterni alle cariche, ma sul piano, che biseca ortogonalmente il segmento congiungente le due cariche, si riduce a una costante (zero come nell'enunciato). Cosí la (3.10.1) soddisfa alle condizioni al contorno del problema iniziale. Poiché le soluzioni dell'equazione di Laplace sono uniche, la (3.10.1) é il potenziale in tutto il semispazio esterno al piano conduttore. La carica $-q$ é detta **immagine** della carica puntiforme q . Pertanto il potenziale é:

$$\Phi(x, y, z) = kq \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right\} \quad (3.10.2)$$

Calcoliamo il campo elettrico:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (3.10.3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = kq \left\{ \frac{-(x-d)}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x+d)}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (3.10.4)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = kq \left\{ \frac{-y}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (3.10.5)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = kq \left\{ \frac{-z}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{z}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (3.10.6)$$

Per $x = 0$ si ha:

$$E_{x(x=0)} = -2kq \frac{d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.10.7)$$

$$E_{y(x=0)} = 0 \quad (3.10.8)$$

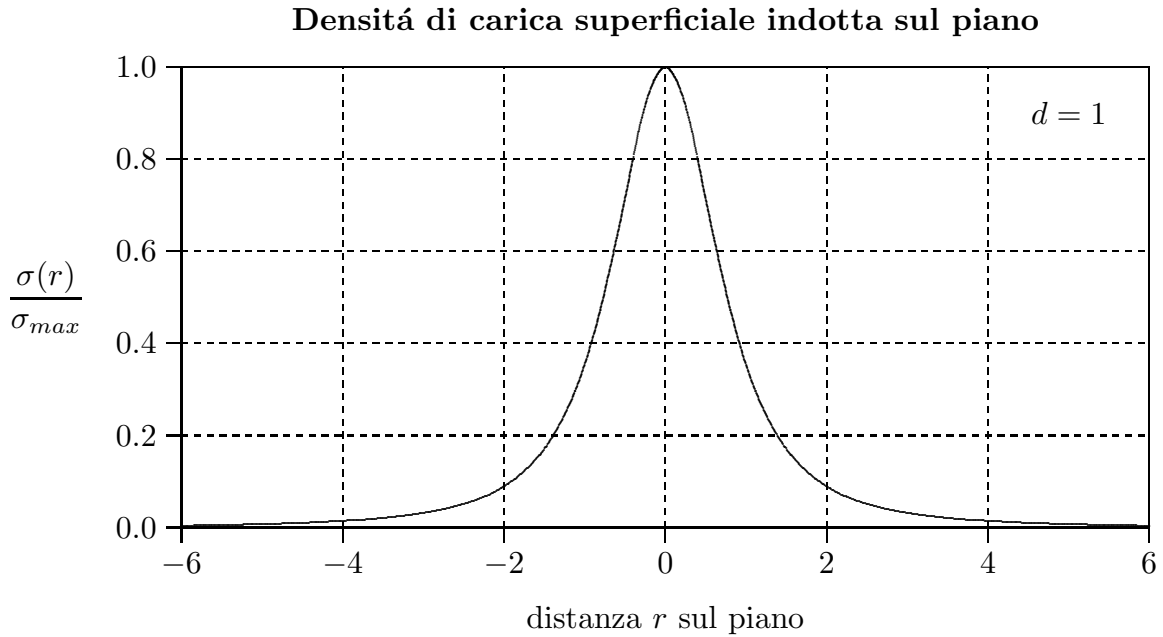
$$E_{z(x=0)} = 0 \quad (3.10.9)$$

Calcoliamo la densitá di carica indotta sul piano Π cioé nei punti $x = 0$:

$$\sigma_{ind} = \epsilon_0 E_{x(x=0)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{qd}{(d^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.10.10)$$

Calcoliamo la carica totale indotta:

Per questo calcoliamo l'area della corona circolare sul piano II



$$r = \sqrt{y^2 + z^2}; \quad dS = 2\pi r dr; \quad dq = \sigma_{ind} dS; \quad dq = -\frac{qrd}{(d^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dr$$

$$Q_{ind} = -qd \int_0^\infty \frac{r}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dr = -qd \left[-\frac{1}{(r^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^\infty = -q \quad (3.10.11)$$

Calcolo della forza esercitata fra carica inducente e piano conduttore

In ciascun punto del piano il modulo del campo elettrico é dato da:

$$E = 2kq \frac{d}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.10.12)$$

Esso é ortogonale al piano stesso, di verso entrante se la carica inducente é positiva. Applicando la formula della densità di forza calcolata con il tensore di Maxwell relativo al caso di conduttori, si ha:

$$\frac{dF}{dS} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{sup}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 4k^2 q^2 \frac{d^2}{(d^2 + r^2)^3} \quad (3.10.13)$$

Considerando una corona circolare di spessore dr si ha: $dS = 2\pi r dr$; quindi:

$$F = \frac{1}{2}\epsilon_0 4k^2 q^2 d^2 2\pi \int_0^\infty \frac{r dr}{(d^2 + r^2)^3}$$

Posto $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ risulta:

$$F = \frac{1}{2}\epsilon_0 4 \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} q^2 d^2 2\pi \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{(d^2 + r^2)^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q^2 d^2 \left[\frac{1}{4d^4} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2} \quad (3.10.14)$$

Un fatto molto importante é che questa forza é uguale a quella che si esercita fra la carica q e la sua immagine $q' = -q$.

Infatti, si deduce dalla figura che:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2} \quad (3.10.15)$$

3.11 - Carica puntiforme in presenza di sfera conduttrice a potenziale zero

La principale difficoltà nel risolvere un problema con la tecnica della immagine é trovare un gruppo di cariche immagini che, insieme con le specifiche cariche iniziali, creino sui conduttori superfici equipotenziali.

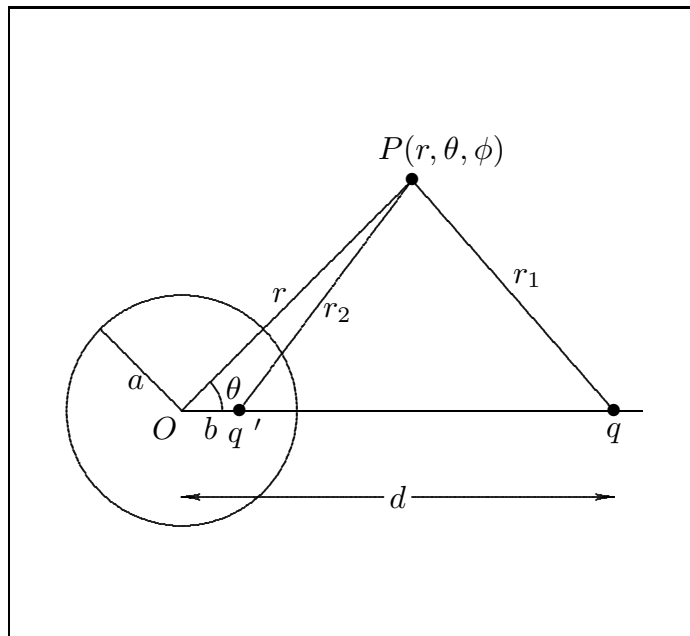


fig.3.11-1

Il problema diventa immediato solo nei casi in cui la geometria é semplice. Questo é il caso di una carica puntiforme q in prossimitá di una sfera conduttrice; perché la sfera diventi una superficie a potenziale zero occorre una sola carica immagine.

Ci proponiamo di trovare grandezza e posizione dell'immagine q' che, insieme con la carica puntiforme q , produce un potenziale nullo in tutti i punti della sfera.

$$r_1^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta \quad r_2^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta$$

La carica puntiforme q é ad una distanza d dal centro della sfera ed il raggio della sfera é a . Poniamo la carica immagine sulla retta passante per q e per il centro della sfera. Procediamo in coordinate sferiche assumendo come asse polare la retta congiungente q con l'origine delle coordinate al centro della sfera. La distanza b e il valore di q' vanno determinati in termini delle quantità note: q, d, a .

Il potenziale in un punto arbitrario P, dovuto a q e q' é dato da:

$$\Phi(r, \theta, \phi_0) = k \frac{q}{r_1} + k \frac{q'}{r_2} = k \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \right] \quad (3.11.1)$$

Questa espressione deve essere uguale a zero per $r = a$ e per tutti i valori di θ e di ϕ :

$$\begin{aligned} \Phi(a, \theta, \phi_0) &= k \left[\frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} \right] = \\ &= k \left[\frac{q}{d \sqrt{1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta}} + \frac{q'}{a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{b}{a} \cos \theta}} \right] \end{aligned} \quad (3.11.2)$$

Perché $\Phi(a, \theta, \phi_0)$ sia uguale a zero, occorre e basta che:

$$\frac{q}{d} = -\frac{q'}{a} \quad \rightarrow \quad q' = -\frac{a}{d}q \quad (3.11.3)$$

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad b = \frac{a^2}{d} \quad (3.11.4)$$

Restano cosí definite la posizione e la grandezza della carica immagine. Sostituendo i valori cosí trovati a q' e b , si ha:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi_0) &= k \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{aq}{d \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{d^2} - 2r\frac{a^2}{d} \cos \theta}} \right] = \\ &= k \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 \frac{d^2}{a^2} + a^2 - 2rd \cos \theta}} \right] \end{aligned} \quad (3.11.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = kq \left[\frac{-(r - d \cos \theta)}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{d^2}{a^2} r - d \cos \theta}{\left(r^2 \frac{d^2}{a^2} + a^2 - 2rd \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (3.11.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} (r=a) &= kq \left[\frac{-a + \frac{d^2}{a}}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right] = -kq \left[\frac{a \left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right)}{\left[\sqrt{d^2 \left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)}\right]^3} \right] = \\ &= -kq \frac{a \left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right)}{d^3 \left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (3.11.7)$$

Moltiplichiamo e dividiamo per a^2 si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} (r=a) &= -kq \frac{a^2}{a^2} \frac{\frac{a}{d^3} \left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right)}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -kq \frac{1}{a^2} \frac{a}{d} \frac{\frac{a^2}{d^2} \left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right)}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= kq \frac{1}{a^2} \frac{a}{d} \frac{1 - \frac{a^2}{d^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = kq \left[\frac{-rd \sin \theta}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-rd \sin \theta}{\left(r^2 \frac{d^2}{a^2} + a^2 - 2rd \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Ne segue:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} (r=a) = 0 \quad e \quad \text{quindi :} \quad E_{\theta(r=a)} = 0 \quad E_{r(r=a)} = -kq \frac{1}{a^2} \frac{a}{d} \frac{1 - \frac{a^2}{d^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.11.8)$$

Conseguentemente:

$$\sigma_{ind} = -\frac{1}{4\pi} \frac{q}{a^2} \frac{a}{d} \frac{1 - \frac{a^2}{d^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.11.9)$$

La σ indotta é sempre di carica opposta alla carica inducente qualunque sia θ .
Calcoliamo la carica indotta totale:

$$\begin{aligned} Q &= \int_S \sigma da = -\frac{1}{4\pi} \frac{q}{a^2} \left(\frac{a}{d}\right) \int_0^\pi \frac{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{q}{a^2} \left(\frac{a}{d}\right) 2\pi a^2 \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{q}{a^2} \left(\frac{a}{d}\right) 2\pi a^2 \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \left[-\frac{d}{a} \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^\pi = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{q}{a^2} \left(\frac{a}{d}\right) 2\pi a^2 \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \left\{ -\frac{d}{a} \left[\frac{1}{\left|1 + \frac{a}{d}\right|} - \frac{1}{\left|1 - \frac{a}{d}\right|} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.11.10)$$

Poiché $a < d$ si ha:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{a^2} \left(\frac{a}{d}\right) 2\pi a^2 \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \frac{d}{a} \frac{-2\frac{a}{d}}{1 - \frac{a^2}{d^2}} = -q \frac{a}{d} = q' \quad (3.11.11)$$

La carica indotta é uguale alla carica immagine.

La forza che si esercita sulla sfera da parte della carica inducente si può calcolare (come abbiamo già visto nel caso del piano conduttore) come se si esercitasse fra le cariche q e q' .

Si ha:

$$F = k \frac{qq'}{(d-b)^2} = -k \frac{a}{d} \frac{q^2}{\left(d - \frac{a^2}{d}\right)^2}$$

avendo posto: $q' = -q \frac{a}{d}$ e $b = \frac{a^2}{d}$.

Ancora:

$$F = -k \frac{a}{d} \frac{q^2}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^2} = -kq^2 \frac{a}{d^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^2} \quad (3.11.12)$$

Per $\frac{a^2}{d^2} \ll 1$ risulta: $F \simeq -kq^2 \frac{a}{d^3}$ cioè la forza segue la legge cubica inversa.

Verifichiamo, ora, che tale forza corrisponde a quella calcolata applicando il tensore di Maxwell relativo al caso di conduttori.

Si ha:

$$\frac{dF}{dS} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{sup}^2$$

In questo caso, tuttavia, la forza su ciascun punto del conduttore ha una direzione variabile in quanto é diretta secondo la normale alla superficie stessa. Se la scomponiamo secondo una direzione parallela all'asse congiungente la carica inducente ed il centro della sfera e la direzione ortogonale a questo asse, osserviamo che, per questioni di simmetria, l'integrale della componente normale é nulla. Quindi dobbiamo calcolare l'integrale della componente parallela della densità di forza:

$$\left(\frac{dF}{dS}\right)_{\parallel} = \frac{dF}{dS} \cos\theta \quad (3.11.13)$$

$$F_{\parallel} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \oint_S E^2 \cos\theta dS$$

con $dS = 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$

$$F_{\parallel} = \frac{1}{2} \epsilon_0 k^2 q^2 \frac{1}{a^4} \frac{a^2}{d^2} \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^2 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \cos\theta d\theta}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos\theta\right)^3} \quad (3.11.14)$$

Calcoliamo l'integrale (3.8.14) mediante integrazione per parti:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Poniamo:

$$u = \cos\theta \quad e \quad v = \int \frac{\sin\theta d\theta}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos\theta\right)^3} = \frac{-\frac{d}{4a}}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos\theta\right)^2} \quad (3.11.15)$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
 & \int \cos \theta \partial \left\{ \frac{-\frac{d}{4a}}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^2} \right\} = \cos \theta \frac{-\frac{d}{4a}}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^2} \\
 & \int_0^\pi \frac{\frac{d}{4a} \sin \theta d\theta}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^2} = \left[\frac{-\frac{d}{4a} \cos \theta}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^2} + \frac{\frac{d}{4a} \frac{d}{2a}}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)} \right]_0^\pi = \\
 & = \frac{\frac{d}{4a}}{\left(1 + \frac{a}{d}\right)^4} + \frac{\frac{d^2}{8a^2}}{\left(1 + \frac{a}{d}\right)^2} + \frac{\frac{d}{4a}}{\left(1 - \frac{a}{d}\right)^4} - \frac{\frac{d^2}{8a^2}}{\left(1 - \frac{a}{d}\right)^2} = \\
 & = \frac{d}{4a} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{a}{d}\right)^4} + \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{d}\right)^4} \right] + \frac{d^2}{8a^2} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{a}{d}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{d}\right)^2} \right] = \\
 & = \frac{d}{4a} \left[\frac{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d}\right)^2 + \left(1 + \frac{a^2}{d^2} + 2\frac{a}{d}\right)^2}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^4} \right] + \frac{1}{8} \frac{d^2}{a^2} \frac{-4\frac{a}{d}}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^2} = \\
 & = \frac{1}{4} \frac{d}{a} \frac{2 + 2\frac{a^4}{d^4} + 12\frac{a^2}{d^2}}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^4} - \frac{d}{2a} \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^2} = \\
 & = \frac{d}{4a} \left[\frac{\left(2 + 2\frac{a^4}{d^4} + 12\frac{a^2}{d^2}\right) - 2\left(1 + \frac{a^4}{d^4} - 2\frac{a^2}{d^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^4} \right] = \\
 & = \frac{16}{4} \left(\frac{a}{d}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^4} \tag{3.11.16}
 \end{aligned}$$

dove il simbolo ∂ é stato usato per evitare confusione con d .

Quindi:

$$\begin{aligned}
 F_{\parallel} &= \frac{1}{2}\epsilon_0 k^2 q^2 \frac{1}{a^4} \frac{a^2}{d^2} \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^2 2\pi a^2 \frac{16}{4} \left(\frac{a}{d}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^4} = \\
 &= \frac{1}{2}\epsilon_0 k^2 q^2 8\pi \frac{a}{d^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Nel sistema S.I. $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ e, pertanto:

$$F = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{1}{2}\epsilon_0 8\pi q^2 \frac{a}{d^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q^2 \frac{a}{d^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)^2} \quad (3.11.17)$$

che é uguale alla (3.11.12).