

Cap. 2

Il campo elettrostatico nel vuoto: II

2.1 - Energia potenziale di un sistema di cariche

Come abbiamo già visto, il prodotto del potenziale elettrostatico per la carica di un oggetto puntiforme può essere interpretato come una energia potenziale. Più esattamente se una carica puntiforme q_i è trasportata dall'infinito in un punto \vec{r}_i di una regione sede di campo elettrico descritto da un potenziale Φ che si annulla all'infinito, il lavoro eseguito sulla carica (e quindi la sua energia potenziale) è dato da:

$$W_i = q_i \Phi(\vec{r}_i) \tag{2.1.1}$$

Se esiste un campo prodotto da un insieme di $n - 1$ cariche q_j nelle posizioni \vec{r}_j ($j = 1, 2, \dots, n - 1$), si ha:

$$\Phi(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^{n-1} k \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{2.1.2}$$

L'energia della carica q_i è:

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{n-1} k \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{2.1.3}$$

Estendiamo, ora, il concetto di energia potenziale a tutto un insieme di cariche localizzate definendo **'energia potenziale di un sistema di cariche localizzate'** come il **'lavoro fatto per formare il sistema stesso ossia il lavoro fatto per portare ciascuna carica dall'infinito alla posizione assegnata'**. Quindi l'energia potenziale di un sistema discreto di n cariche si scriverà:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n k \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{2.1.4}$$

Per esempio per $n = 4$ si ha:

$$W = k \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + k \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + k \frac{q_4 q_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} + k \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} + k \frac{q_4 q_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} + k \frac{q_4 q_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|} \tag{2.1.5}$$

È ovvio che l'espressione (2.1.4) è equivalente a:

$$W = \frac{1}{2} \sum_j \sum_i k \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (i \neq j) \tag{2.1.6}$$

con l'intesa, cioè, di scartare i termini $i = j$.

Per una distribuzione continua di carica l'energia potenziale assume la forma:

$$W = \frac{1}{2} \iint k \frac{\rho(\vec{r}')\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} d^3r' d^3r'' \quad (2.1.7)$$

Il termine $k \frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} d^3r''$ rappresenta il potenziale nel punto \vec{r}' generato dalla carica infinitesima $\rho(\vec{r}'')d^3r''$ situata nel punto \vec{r}'' . La (2.1.7) si può scrivere:

$$W = \frac{1}{2} \int_V d^3r' \int_V \rho(\vec{r}') k \frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} d^3r'' = \frac{1}{2} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \int_V k \frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} d^3r'' \quad (2.1.8)$$

dove V é il volume occupato dalle cariche ed eventualmente un volume piú grande.

La (2.1.8) si può scrivere:

$$W = \frac{1}{2} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \Phi(\vec{r}') \quad (2.1.9)$$

essendo $\Phi(\vec{r}')$ il potenziale generato dalla distribuzione nel punto generico \vec{r}' della distribuzione stessa.

Vediamo adesso di presentare un punto di vista alternativo e molto fruttuoso che sottolinea il concetto di campo considerando l'energia elettrostatica come immagazzinata nel campo elettrico che circonda le cariche.

Consideriamo la (2.1.9):

$$W = \frac{1}{2} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \Phi(\vec{r}')$$

Applichiamo l'equazione di Poisson $\nabla^2\Phi = -4\pi k\rho$; da cui $\rho(\vec{r}) = -\frac{\nabla^2\Phi}{4\pi k}$

Sostituendo si ha:

$$W = -\frac{1}{8\pi k} \int_V \Phi \nabla^2\Phi d^3r' \quad (2.1.10)$$

Consideriamo, adesso, due funzioni scalari Φ e ψ e con esse ci costruiamo una funzione vettoriale $\vec{A} = \Phi \vec{\nabla}\psi$. Si ha, per una nota identità vettoriale:

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{\nabla}\psi) = \Phi \nabla^2\psi + \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\psi \quad (2.1.11)$$

Alla funzione \vec{A} applichiamo il teorema della divergenza:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} da$$

essendo S la superficie che limita V.

Sostituendo ad \vec{A} l'espressione $\Phi \vec{\nabla} \psi$ e considerando l'identità (2.1.11) si ha:

$$\int_V \left(\Phi \nabla^2 \psi + \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \psi \right) d^3 r = \oint_S \Phi \vec{\nabla} \psi \cdot \hat{n} da \quad (2.1.12)$$

che prende il nome di **prima identità di Green**.

Data l'arbitrarietà delle funzioni Φ e ψ scegliamo $\psi = \Phi$ ottenendo:

$$\int_V \left(\Phi \nabla^2 \Phi + \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) d^3 r = \oint_S \Phi \left(\vec{\nabla} \Phi \cdot \hat{n} \right) da \quad (2.1.13)$$

che prende il nome di **seconda identità di Green**.

Attribuendo a Φ il significato della nostra funzione potenziale, si ha:

$$W = -\frac{1}{8\pi k} \int_V \Phi \nabla^2 \Phi d^3 r = \frac{1}{8\pi k} \int_V \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Phi d^3 r - \frac{1}{8\pi k} \oint_S \Phi \left(\vec{\nabla} \Phi \cdot \hat{n} \right) da$$

Come abbiamo sottolineato inizialmente, il contributo di $W = \frac{1}{2} \int_V d^3 r \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r})$ non varia se aumentiamo il volume V in quanto fuori dall'effettiva distribuzione di carica, risulta: $\rho(\vec{r}) = 0$.

Riscrivendo l'espressione, si ha:

$$W = -\frac{1}{8\pi k} \int_V \Phi \nabla^2 \Phi d^3 r = \frac{1}{8\pi k} \int_V \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Phi d^3 r - \frac{1}{8\pi k} \oint_S \Phi \left(\vec{\nabla} \Phi \cdot \hat{n} \right) da \quad (2.1.14)$$

Possiamo, per quanto detto prima, assumere per V una superficie sferica che circonda completamente le cariche. Lasciamo, altresí, espandere la superficie S fino a diventare una sfera di raggio infinito.

É ovvio che, in queste condizioni, ($r \rightarrow \infty$), per una distribuzione localizzata di cariche, si ha:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S \Phi \left(\vec{\nabla} \Phi \cdot \hat{n} \right) da = 0 \quad (2.1.15)$$

in quanto, come abbiamo già osservato, per una distribuzione localizzata di cariche Φ tende all'infinito come $\frac{1}{r}$ e $\vec{\nabla} \Phi$ come $\frac{1}{r^2}$.

Quindi:

$$W = -\frac{1}{8\pi k} \int_{tutto\ lo\ spazio} \Phi \nabla^2 \Phi d^3 r = \frac{1}{8\pi k} \int_{tutto\ lo\ spazio} |E|^2 d^3 r \quad (2.1.16)$$

Da questa espressione si giustifica il concetto fisico che **l'energia potenziale elettrostatica é immagazzinata nel campo elettrico**.

2.2 - Sviluppo in serie di multipoli del potenziale di una distribuzione arbitraria di cariche

Supponiamo di avere una complicata distribuzione di cariche elettriche, come per esempio le molecole dell'acqua, e di essere interessati soltanto ai campi a grande distanza.

Faremo vedere che é possibile trovare per i campi un'espressione relativamente semplice, che é adatta per grandi distanze in confronto alle dimensioni dell'oggetto.

Consideriamo una distribuzione arbitraria di cariche e poniamo l'origine delle nostre coordinate in un punto interno alla distribuzione in modo da ridurre il numero di coordinate.

Inoltre questa distribuzione puó tutta essere racchiusa da una sfera di raggio a piccolo rispetto alla distanza dal punto di osservazione.

Indichiamo con \vec{r}' un punto arbitrario dentro la distribuzione di cariche (punto sorgente), con $\rho(\vec{r}')$ la densità di carica in quel punto, e con \vec{r} il punto di osservazione (punto campo).

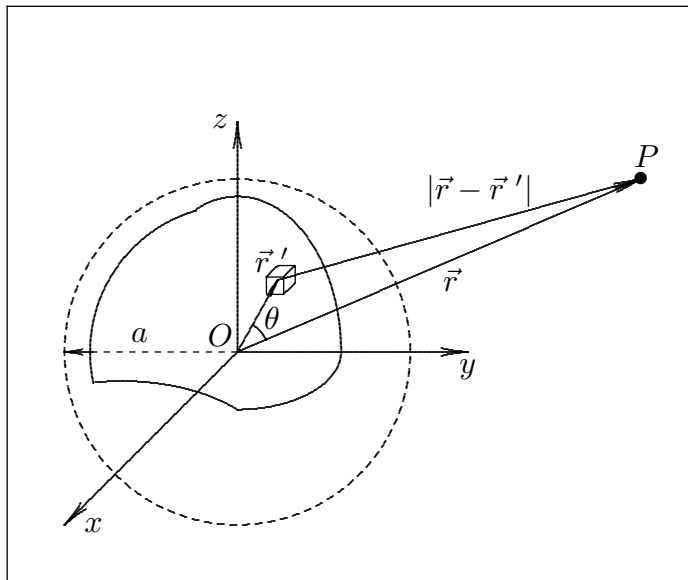


fig.2.2-1

Il potenziale in \vec{r} é dato da:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.2.1)$$

dove d^3r' é un elemento di volume dello spazio in cui é distribuita la carica e V tutto il volume occupato dalla distribuzione di cariche.

Consideriamo la quantità $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$. Per il teorema di Carnot si ha:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}; \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.2.2)$$

Mettendo, dentro le parentesi, in evidenza r^2 , si ha:

$$(r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2)^{-\frac{1}{2}} = \left[r^2 \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.2.3)$$

Se il termine $\left| \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right|$ risulta < 1 la quantità dentro parentesi può essere sviluppata con la formula del binomio e se $\left| \frac{r'}{r} \right|^2 + \left| 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right| < 1$ la serie converge assolutamente. Per garantire questo basta prendere il punto P sufficientemente lontano.

Posto: $\delta = \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}$ si ha:

$$(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 + \dots \quad (2.2.4)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} (r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{3}{8} \left(\frac{r'^4}{r^4} - 4 \frac{r'^3}{r^3} \cos \theta + 4 \frac{r'^2}{r^2} \cos^2 \theta \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Ordinando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{3}{2} \frac{r'^2}{r^2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \frac{r'^2}{r^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

La (2.2.6) si può scrivere in forma compatta come:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\theta) \left(\frac{r'}{r} \right)^n \quad (2.2.7)$$

dove le quantità $P_n(\theta)$, come vedremo meglio in seguito, sono i cosiddetti **polinomi di Legendre** che riportiamo:

$$\begin{aligned} P_0(\theta) &= 1, \quad P_1(\theta) = \cos \theta, \quad P_2(\theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ P_3(\theta) &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \quad etc. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

La serie (2.2.7) converge se $\frac{r'}{r} < 1$.

Quindi:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int_V \rho d^3r' + \frac{1}{r^2} \int_V r' \cos \theta \rho d^3r' + \frac{1}{r^3} \int_V r'^2 \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} \rho d^3r' + \dots \right] \quad (2.2.9)$$

che si può scrivere:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int_V \rho d^3r' + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3r' + \frac{1}{r^3} \int_V r'^2 \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} \rho d^3r' + \dots \right] \quad (2.2.10)$$

L'espressione (2.2.10) é facilmente interpretabile.

Il primo integrale $\int_V \rho d^3r'$ é chiaramente la carica totale della distribuzione; pertanto il primo termine del secondo membro:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int_V \rho d^3r' \right] \quad (2.2.11)$$

rappresenta il potenziale che risulterebbe se questa carica totale fosse concentrata nella origine. Esso prende il nome di **potenziale di monopolo della distribuzione** e può anche essere nullo se la distribuzione é neutra ossia se la carica totale é nulla.

Il secondo integrale $\int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3r'$ prende il nome di **momento di dipolo della distribuzione** e si indica con \vec{p} ; pertanto il secondo termine del secondo membro:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{p} \right] \quad (2.2.12)$$

rappresenta il **potenziale di dipolo della distribuzione**. Il terzo integrale prende il nome di **momento di quadrupolo della distribuzione** e cosí via.

É interessante osservare che può esistere una distribuzione di cariche che pur avendo la carica totale nulla può presentare termini superiori di potenziali diversi da zero.

Teorema - Il momento di dipolo di una **distribuzione neutra** di cariche é indipendente dall'origine delle coordinate.

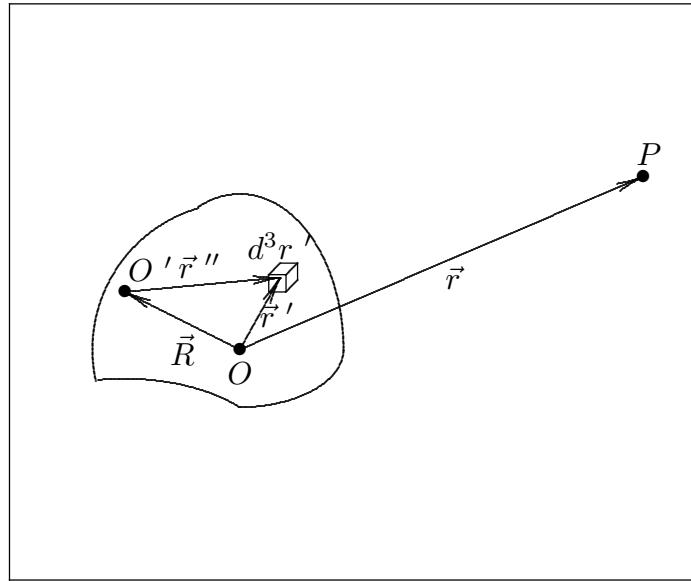


fig.2.2-2

Per verificare ciò consideriamo un nuovo sistema di coordinate con origine nel punto individuato dal vettore posizione \vec{R} rispetto al vecchio sistema (fig.2.2-2). Sia cioè:

$$\vec{r}' = \vec{r}'' + \vec{R} \quad (2.2.13)$$

essendo \vec{r}' e \vec{r}'' i vettori posizione dell'elemento della distribuzione rispetto al vecchio e al nuovo sistema di riferimento rispettivamente.

Ne segue che:

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3r' = \int_V (\vec{r}'' + \vec{R}) \rho(\vec{r}') d^3r' = \int_V \vec{r}'' \rho d^3r' + \vec{R}Q \quad (2.2.14)$$

Pertanto, se $Q = 0$ allora: $\vec{p} = \vec{p}'$.

Un tipico esempio di campo elettrico di dipolo é quello generato da una singola molecola neutra. Per essa infatti il potenziale di monopolo é nullo e il potenziale di dipolo per alcuni tipi di distribuzioni di carica intramolecolare come in figura 2.2-3 é certamente diverso da zero. In generale si trascura quasi sempre il potenziale di ordine superiore (quadrupolo, etc.).

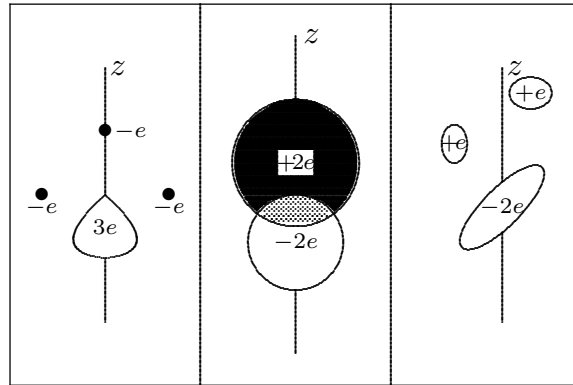


fig.2.2-3

L'esempio piú classico di una distribuzione generante un campo di dipolo **nei punti lontani** é quello costituito da due cariche puntiformi di segno opposto separati da una distanza s .

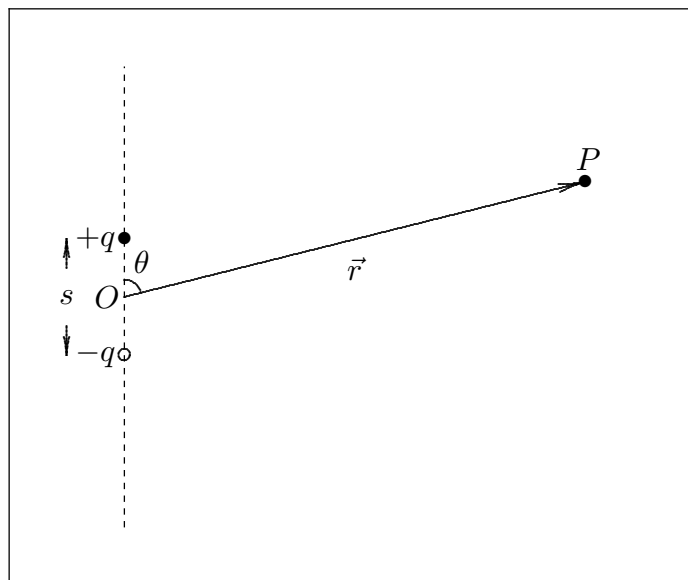


fig.2.2-4

Il potenziale $\Phi(\vec{r})$ della distribuzione di figura 2.2-4 é:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{s^2}{4} - 2\frac{s}{2}r \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{s^2}{4} + 2\frac{s}{2}r \cos \theta}} \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{s^2}{4r^2} - \frac{s}{r} \cos \theta}} - \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{s^2}{4r^2} + \frac{s}{r} \cos \theta}} \right] \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Sviluppando in serie secondo la $(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\delta$, la (2.2.15) si scrive:

$$\Phi(\vec{r}) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{8} \frac{s^2}{r^2} + \frac{s}{2r} \cos \theta - 1 + \frac{1}{8} \frac{s^2}{r^2} + \frac{s}{2r} \cos \theta \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs \cos \theta}{r^2} = k \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (2.2.16)$$

dove $p = qs$ é il modulo del momento di dipolo della distribuzione; esso é un vettore orientato dalla carica negativa a quella positiva.

La (2.2.16) é l'espressione del potenziale dipolare da noi già definito.

2.3 - Linee di forza del campo elettrico di un dipolo

É interessante valutare la distribuzione del vettore campo elettrico nello spazio, cosa che in generale va fatta per qualunque distribuzione.

Noi particolarizziamo il concetto riferendoci all'importante caso del campo di un dipolo.

Riscriviamo l'espressione del potenziale dipolare:

$$\Phi_{dip} = k \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (2.3.1)$$

Il campo elettrico corrispondente a tale funzione potenziale é, in componenti:

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 2pk \frac{\cos \theta}{r^3} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = k \frac{p}{r^3} \sin \theta \quad E_\phi = 0 \quad (2.3.2)$$

É importante osservare che **il tipico campo elettrico di un dipolo va all'infinito con legge $\frac{1}{r^3}$** .

Si definisce **linea di forza del campo elettrico il luogo dei punti dello spazio tale che in ciascuno di essi il vettore campo elettrico é tangente all'elemento $d\vec{s}$ del luogo geometrico**. Dal punto di vista matematico l'equazione della linea di forza é, in base alla definizione:

$$\vec{E} \times d\vec{s} = 0 \quad (2.3.3)$$

Note le componenti del vettore \vec{E} , la soluzione della forma differenziale (2.3.3) ci fornisce le equazioni della linea di forza. Applichiamo la (2.3.3) al caso di un dipolo, osservando che poiché il campo non dipende da ϕ la linea di forza è contenuta in un piano e quindi il problema è bidimensionale.

Pertanto, in coordinate polari:

$$d\vec{s} = (dr)\hat{e}_r + (rd\theta)\hat{e}_\theta \quad (2.3.4)$$

Quindi l'espressione (2.3.3) si esprime:

$$rE_r d\theta - E_\theta dr = 0 \quad (2.3.5)$$

che è conveniente scrivere:

$$\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta} d\theta \quad (2.3.6)$$

Sostituendo le espressioni delle componenti del campo date dalle (2.3.2) si ha:

$$\frac{dr}{r} = \frac{2pk \frac{\cos \theta}{r^3}}{k \frac{p}{r^3} \sin \theta} d\theta = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad (2.3.7)$$

Integrando la (2.3.7) si ha:

$$\ln r = 2 \ln |\sin \theta| + \ln C = \ln \sin^2 \theta + \ln C \quad (2.3.8)$$

la cui soluzione è:

$$r = C \sin^2 \theta \quad (2.3.9)$$

La (2.3.9), al variare della costante arbitraria C , ci fornisce l'equazione delle linee di forza il cui grafico è illustrato in figura.

**Linee di forza del campo elettrico (linea continua)
e linee equipotenziali (linea tratteggiata) di un dipolo elettrico**

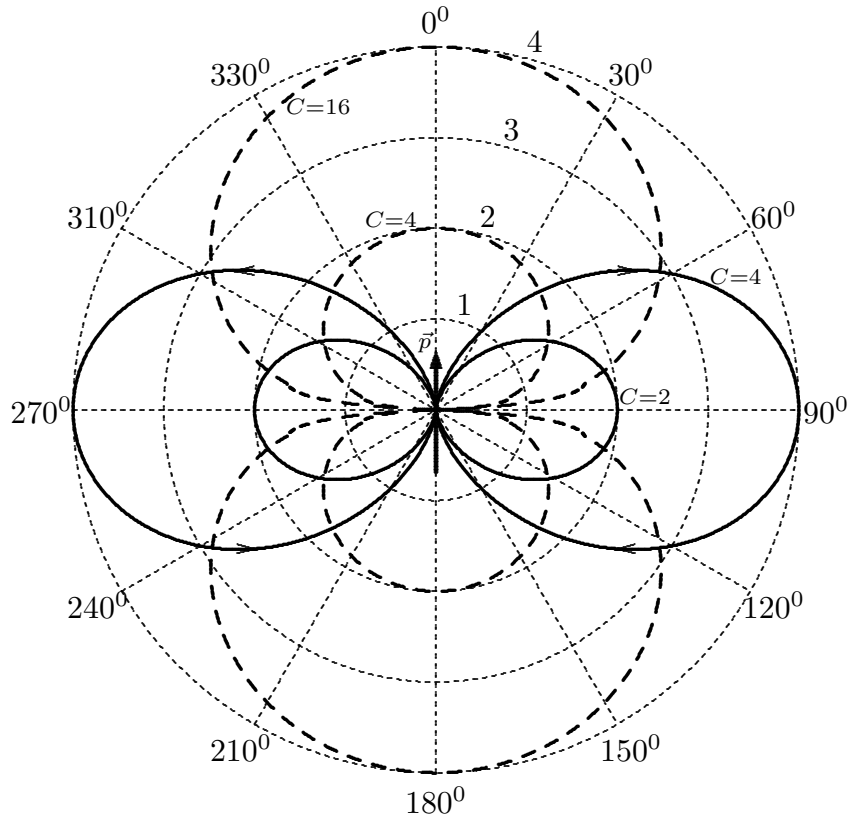


fig.2.3-1

É interessante tracciare le **linee equipotenziali** cioè quelle linee sulle quali il potenziale assume valore costante.

L'equazione si ottiene imponendo che:

$$\Phi = k \frac{p \cos \theta}{r^2} = \text{costante} \quad (2.3.10)$$

la cui soluzione é:

$$r^2 = C \cos \theta \quad (2.3.11)$$

Anche le linee equipotenziali sono tracciate in figura 2.3-1.

Dalla (2.3.10) segue che la linea equipotenziale é caratterizzata dall'essere $d\Phi = 0$ su tutta la linea.

Poiché:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} \quad (2.3.12)$$

ne segue che sulla linea equipotenziale deve essere: $\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = 0$ cioè $\vec{\nabla}\Phi$ é ortogonale punto per punto alla linea stessa. Questo vuol dire che **in ciascun punto della linea equipotenziale il campo elettrico é ivi ortogonale.**

2.4 - Momento torcente e forze agenti su un dipolo posto in un campo elettrico esterno.

Il modello che scegliamo per illustrare il momento torcente e le forze agenti su un dipolo é quello di due cariche tenute insieme meccanicamente in modo che la distanza s fra di esse si mantenga costante.

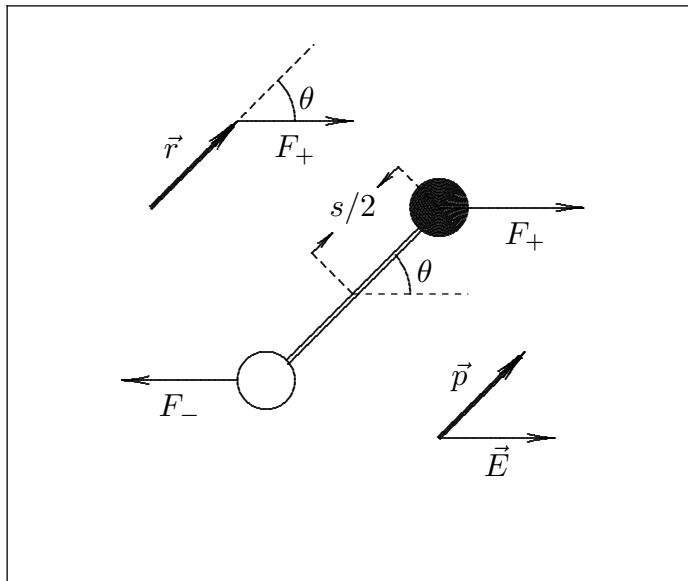


fig.2.4-1

Introduciamo il **dipolo** in un campo elettrico esterno **uniforme**. L'estremo positivo del dipolo sará spinto verso destra, mentre l'estremo negativo sará spinto verso sinistra, da una forza di intensitá Eq . La forza risultante esercitata sul dipolo sará nulla e se esso forma un angolo θ con la direzione del campo (che é anche quella della forza) vi sará un momento meccanico $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$. \vec{N} é un vettore perpendicolare al piano di figura:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}_+ + (-\vec{r}) \times \vec{F}_-$$

la cui intensitá vale:

$$\frac{s}{2}Eq \sin \theta + \frac{s}{2}Eq \sin \theta = qsE \sin \theta = pE \sin \theta \tag{2.4.1}$$

In forma vettoriale la (2.4.1) si puó scrivere:

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{2.4.2}$$

Il dipolo si orienta con l'asse parallelo al campo. In questa posizione corrisponde l'energia piú bassa.

Calcoliamo il lavoro necessario per far ruotare il dipolo di un angolo θ_0 , partendo dalla direzione parallela al campo.

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \int_0^{\theta_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2 \int_0^{\theta_0} \vec{F} \cdot (\vec{r} \times d\vec{\theta}) = \\
 &= 2 \int_0^{\theta_0} (\vec{F} \times \vec{r}) \cdot d\vec{\theta} = - \int_0^{\theta_0} Nd\theta = - \int_0^{\theta_0} pE \sin \theta d\theta = pE(1 - \cos \theta_0)
 \end{aligned}
 \tag{2.4.3}$$

Prima di concludere é indispensabile scrivere l'espressione del campo elettrico generato da un dipolo nel caso generale. Esso é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}
 \tag{2.4.4}$$

che in componenti é identica alla (2.3.2).

Si noti che la (2.4.4) si riferisce ad un dipolo nell'origine delle coordinate ($\vec{r}' = 0$)

Infine é importante osservare che nell'ipotesi in cui si abbia una distribuzione di cariche per cui il momento di dipolo é nullo il campo preponderante sará quello di quadrupolo e l'intensitá del campo elettrico diminuirá con l'inverso della quarta potenza della distanza. Un esempio é dato in figura 2.4-2.

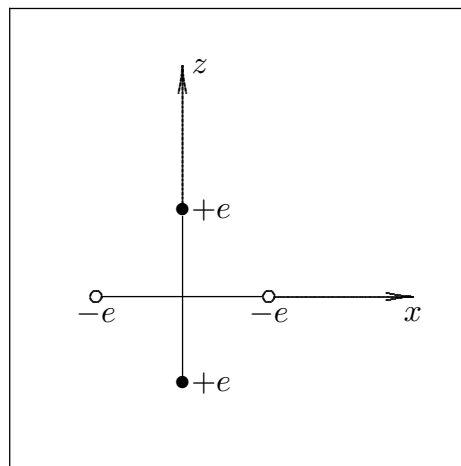


fig.2.4-2

2.5 - Ulteriori esempi di calcolo del campo elettrostatico, del potenziale e della energia potenziale di alcune distribuzioni di cariche elettriche

Applicazioni del teorema di Gauss

In certe situazioni di simmetria, é conveniente procedere al calcolo del campo elettrico per mezzo del teorema di Gauss.

Sfera omogenea piena di cariche.

Si abbia una distribuzione sferica, di raggio a , di carica positiva con densità volumica $\rho = \text{costante}$.

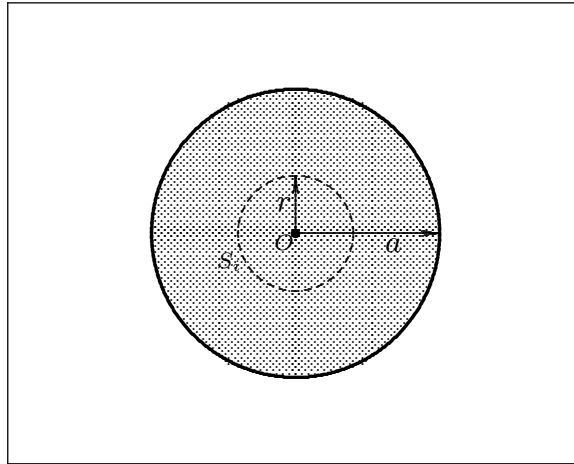


fig.2.5-1

Applichiamo il teorema di Gauss. Sia S_i una superficie sferica interna di raggio r , si ha:

$$\oint_{S_i} \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi k q_i \quad (2.5.1)$$

Poiché, per simmetria, il campo elettrico dipende soltanto dal modulo della distanza e la sua direzione coincide con la normale in ciascun punto della sfera di superficie S_i , la (2.5.1) diventa:

$$E4\pi r^2 = 4\pi k \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{essendo} \quad q_i = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ne segue, quindi, che in ciascun punto interno alla sfera il campo elettrico si scrive:

$$E = \frac{4}{3}k\rho r \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.5.2)$$

Per $r > a$ la superficie gaussiana si prende all'esterno della sfera piena di cariche e si ha:

$$E4\pi r^2 = 4\pi k \rho \frac{4}{3}\pi a^3 \quad \text{per cui} \quad E = \frac{4}{3}k\rho \pi \frac{a^3}{r^2} \quad (r > a) \quad (2.5.3)$$

Nel SI, la (2.5.2) e la (2.5.3) diventano:

$$E_{int} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \qquad E_{ext} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \qquad (2.5.4)$$

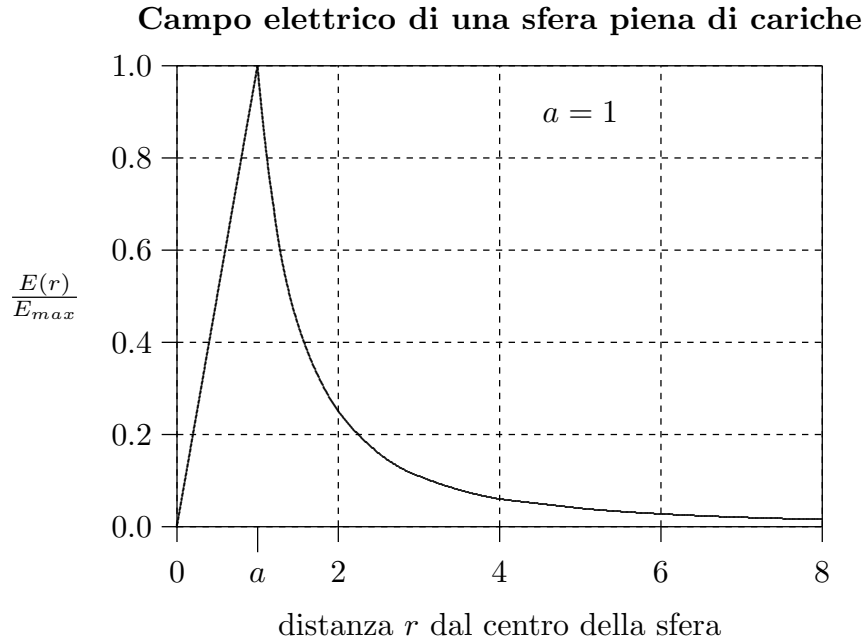


fig.2.5-2

Calcoliamo, ora, l'energia potenziale della sfera applicando la formula (2.1.16). Per questo, riscriviamo i campi elettrici nei punti interni e in quelli esterni alla sfera.

$$E_{int} = \frac{4}{3} k \pi \rho r \qquad 0 \leq r \leq a \qquad (2.5.5)$$

$$E_{ext} = \frac{4}{3} k \rho \pi \frac{a^3}{r^2} \qquad (r > a) \qquad (2.5.6)$$

Per la formula (2.1.16) si ha:

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int_{\text{tutto lo spazio}} |E|^2 d^3r$$

cioé:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi k} \left[\int_0^a \left(\frac{4}{3} \pi \rho k \right)^2 r^2 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \left(\frac{4}{3} \pi \rho k \right)^2 \frac{a^6}{r^4} 4\pi r^2 dr \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{4}{3} \pi \rho k \right)^2 4\pi \left[\int_0^a r^4 dr + \int_a^\infty a^6 \frac{1}{r^2} dr \right] = \\ &= \frac{16\pi^2 \rho^2 k^2 4\pi}{8 \cdot 9 \cdot \pi \cdot k} \left\{ \frac{1}{5} a^5 + \left[a^6 \left(\frac{-1}{r} \right) \right]_a^\infty \right\} = \frac{8\pi^2 \rho^2 k}{9} \left[\frac{1}{5} a^5 + a^5 \right] \end{aligned} \qquad (2.5.7)$$

che si può scrivere:

$$W = \frac{16 \cdot 3}{9 \cdot 5} \pi^2 \rho^2 k a^5 \quad (2.5.8)$$

La (2.5.8) si può esprimere in funzione della quantità totale di carica $Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$, quindi: $Q^2 = \frac{16}{9} \pi^2 a^6 \rho^2$. Ne segue:

$$W = k \frac{3}{5} \frac{Q^2}{a} \quad (2.5.9)$$

È interessante confrontare il risultato dato dalla (2.5.9) con il calcolo dell'energia potenziale elettrostatica di un guscio sferico carico il cui campo elettrico interno e quello esterno sono dati dalla (1.15.7), cioè, in modulo:

$$E_{int} = 0 \quad E_{ext} = k \frac{Q}{r^2} \quad (2.5.10)$$

Si ha:

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int_a^\infty k^2 \frac{Q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} k Q^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_a^\infty = \frac{1}{2} k \frac{Q^2}{a} \quad (2.5.11)$$

Risulta così che il lavoro fatto per costruire una distribuzione sferica di cariche è maggiore di quello necessario per costruire un guscio sferico carico.

2.6 - Sfera cava omogenea

Consideriamo una distribuzione di carica compresa fra due sfere concentriche di raggi R_1 e R_2 ed applichiamo il teorema di Gauss nelle tre regioni in cui è suddivisa la sfera.

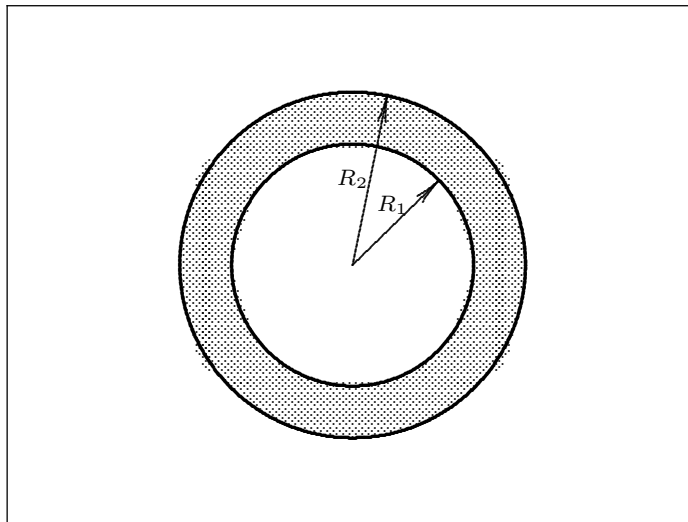


fig.2.6-1

Per $r < R_1$ segue immediatamente che $E=0$.

Per $R_1 < r < R_2$ si ha:

$$\oint_{S_i} \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi k q_i \quad \text{da cui} \quad E 4\pi r^2 = 4\pi k \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi R_1^3 \right)$$

Pertanto:

$$E = \frac{4}{3} \pi k \rho \left[r - \frac{R_1^3}{r^2} \right] \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (2.6.1)$$

Per $r \geq R_2$ si ha:

$$E 4\pi r^2 = 4\pi k \rho \left(\frac{4}{3} \pi R_2^3 - \frac{4}{3} \pi R_1^3 \right) \rightarrow E = \frac{4}{3} \pi k \rho (R_2^3 - R_1^3) / r^2 \quad r \geq R_2 \quad (2.6.2)$$

Campo elettrico di una sfera cava omogenea

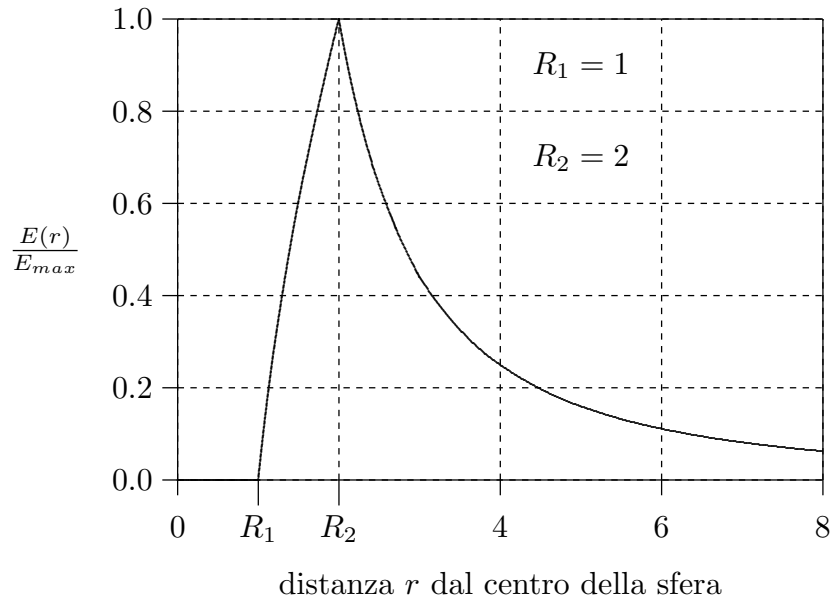


fig.2.6-2

2.7 - Applicazione dell'equazione di Poisson

Sfera omogenea piena di cariche

Il problema della sfera omogenea piena di cariche, già sviluppato per mezzo del teorema di Gauss, si può risolvere per mezzo dell'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi_{int} = -4\pi k \rho \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.7.1)$$

scritta in coordinate sferiche.

Poiché, per simmetria, Φ é funzione del modulo di r soltanto, la (2.7.1) diventa:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_i}{dr} \right) = -4\pi k \rho$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_i}{dr} \right) = -4\pi k \rho r^2 \quad r^2 \frac{d\Phi_i}{dr} = -\frac{4}{3}\pi k \rho r^3 + C_1$$

$$\frac{d\Phi_i}{dr} = -\frac{4}{3}\pi k \rho r + \frac{C_1}{r^2} \quad \Phi_i = -\frac{2}{3}\pi k \rho r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$$

dove C_1 e C_2 sono costanti da determinare.

Osserviamo subito che, poiché il punto $r = 0$ appartiene al nostro sistema e il potenziale non deve mai divergere, la costante C_1 deve necessariamente essere nulla.

La costante C_2 va determinata dalla condizione di continuità:

$$\Phi_{int(r=a)} = \Phi_{ext(r=a)} \tag{2.7.2}$$

Per Φ_{ext} (che abbiamo già calcolato) si ha: $\Phi_{ext(r=a)} = k \frac{Q}{a} = \frac{4}{3} k \pi \rho a^2$

La (2.7.2) diventa:

$$-\frac{2}{3}\pi k \rho a^2 + C_2 = \frac{4}{3}\pi k \rho a^2$$

Ne segue: $C_2 = 2\pi k \rho a^2$ quindi:

$$\Phi_{int} = 2\pi k \rho \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad 0 \leq r \leq a \tag{2.7.3}$$

Il campo elettrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$, calcolato con il vettore $\vec{\nabla}$ espresso in coordinate sferiche risulta identico a quello valutato precedentemente.

2.8 - Applicazione del principio di sovrapposizione

Sfera cava omogenea di raggi R_1 e R_2

Un metodo originale ed elegante per risolvere il problema della sfera cava omogenea, già affrontato, é il seguente: il potenziale della sfera cava omogenea si può considerare come la somma del potenziale di una sfera piena di raggio R_2 meno il potenziale di una sfera piena di raggio R_1 .

$$\Phi_{2ext} = \frac{4}{3}\pi k \rho \frac{R_2^3}{r} \quad \Phi_{2int} = 2\pi k \rho \left(R_2^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

$$\Phi_{1ext} = \frac{4}{3}\pi k \rho \frac{R_1^3}{r} \quad \Phi_{1int} = 2\pi k \rho \left(R_1^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

Per un punto interno $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\Phi_{(R_1 \leq r \leq R_2)} = \Phi_{2i} - \Phi_{1e} = 2k\pi\rho \left(R_2^2 - \frac{r^2}{3} \right) - \frac{4}{3}\pi k\rho \frac{R_1^3}{r} \quad (2.8.1)$$

$$\Phi_{(r \geq R_2)} = \Phi_{2e} - \Phi_{1e} = \frac{4}{3}k\pi\rho \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r} \quad (2.8.2)$$

$$\Phi_{(r \leq R_1)} = \Phi_{2i} - \Phi_{1i} = 2k\pi\rho (R_2^2 - R_1^2) \quad (2.8.3)$$

cioé costante.

I campi elettrici coincidono con le formule (2.6.1) e (2.6.2).

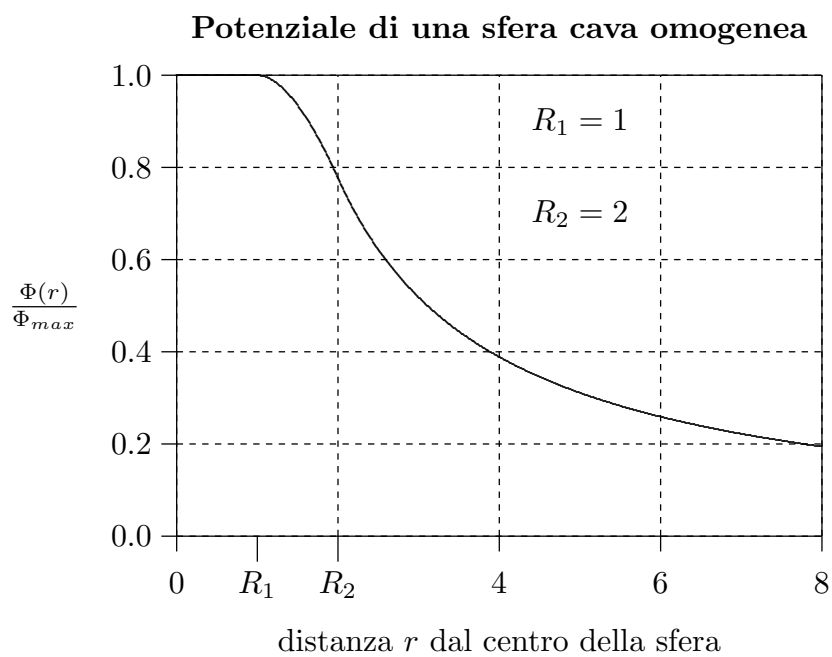


fig.2.8-1

Fine del Cap.2