

Cap. 12

**Fenomeni elettrici e magnetici dipendenti dal tempo:
Induzione elettromagnetica - Mutua e Autoinduzione
- Energia magnetica - Forze e coppie agenti su circuiti
rigidi - Calcolo del coefficiente di mutua e di autoindu-
zione di alcune geometrie di fili - Rocchetto di Ruhm-
korff - Dinamo a disco - Equazioni di Maxwell - Dalle
equazioni di Maxwell alla Teoria dei circuiti**

12.1 - Il fenomeno dell'induzione elettromagnetica

Uno dei piú importanti ed affascinanti fenomeni dello elettromagnetismo é quello dell'induzione elettromagnetica. Le prime osservazioni quantitative sulle relazioni fra campi elettrici e campi magnetici dipendenti dal tempo furono eseguite da **Faraday** nel 1831 mediante esperimenti sul comportamento delle correnti in circuiti immersi in campi magnetici variabili nel tempo. Faraday osservó che si generano delle correnti transitorie nei seguenti casi:

a) quando in un circuito adiacente viene 'accesa' o 'spenta' una corrente; b) quando il circuito adiacente con corrente costante, viene spostato rispetto al circuito in studio; c) quando un magnete permanente viene avvicinato o allontanato rispetto al circuito in esame.

Non vi é nessun passaggio di corrente se la corrente nel circuito adiacente non varia o se la posizione relativa dei due circuiti non cambia. Faraday attribuí la causa della corrente transitoria in tutti e tre i casi alla **variazione del flusso magnetico** concatenato con il circuito in esame: **la variazione del flusso induce nel circuito un campo elettrico la cui circuitazione viene chiamata forza elettromotrice indotta**, ϵ_{ind} . La forza elettromotrice produce un flusso di corrente, in accordo con la legge di Ohm.

Esprimiamo, ora, i risultati delle osservazioni di Faraday in forma matematica. Consideriamo una superficie S , con versore normale \hat{n} , che abbia il circuito C come contorno. Sia \vec{B} il vettore induzione magnetica nella regione occupata dal circuito; il flusso magnetico concatenato é definito dalla formula $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da$. La forza elettromotrice ϵ_{ind} lungo C é:

$$\epsilon_{ind} = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} \quad (12.1.1)$$

dove \vec{E}' é il campo elettrico indotto in corrispondenza dell'elemento $d\vec{l}$ di C . I risultati delle osservazioni di Faraday sono riassunti nella formula:

$\epsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$	Legge di Faraday (12.1.2)
--------------------------------------	----------------------------------

che così si esprime: **la forza elettromotrice indotta nel circuito é uguale alla rapidità di variazione temporale del flusso di induzione magnetica concatenato con il circuito.**

Il segno - corrisponde alla legge di **Lenz**, che stabilisce che il verso della forza elettromotrice indotta é tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha generata.

Tale concetto si esprime meglio dicendo che **il verso della corrente indotta deve essere tale che il campo magnetico da essa generato avrà verso tale da contribuire alla diminuzione del flusso se questo aumenta, all'aumento del flusso se questo diminuisce.**

Consideriamo gli esperimenti b) e c); ci si attende, e l'osservazione lo conferma, che la stessa corrente venga indotta in un circuito secondario sia che esso si muova rispetto ad un circuito primario percorso da corrente e stazionario, sia che il secondario sia fermo mentre il primario si muove in modo che il moto relativo sia lo stesso.

Consideriamo, ora, la legge di Faraday per un circuito secondario in moto e vediamo la conseguenza dei postulati relativistici:

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da \quad (12.1.3)$$

La forza elettromotrice indotta é uguale alla derivata totale rispetto al tempo del flusso di \vec{B} concatenato - flusso che può cambiare sia perché cambia \vec{B} , sia perché cambia la forma, la posizione o l'orientamento del circuito secondario.

La formula (12.1.3) rappresenta in effetti una generalizzazione importantissima della legge di Faraday. La linea di integrazione C può infatti essere pensata come una linea geometrica chiusa qualsiasi, non necessariamente materializzata da un filo conduttore, e la (12.1.3) diventa così una relazione generale fra i campi. É tuttavia importante notare che il campo elettrico \vec{E}' é il campo elettrico nel punto in cui si trova l'elemento $d\vec{l}$, misurato nel sistema di coordinate (o nel mezzo materiale) in cui $d\vec{l}$ é in quiete, giacché \vec{E}' é la causa del flusso di corrente che si genera se $d\vec{l}$ é un elemento di un circuito conduttore materialmente presente. Consideriamo un circuito C che si muove con velocità \vec{v} in una certa direzione, come indicato in figura.

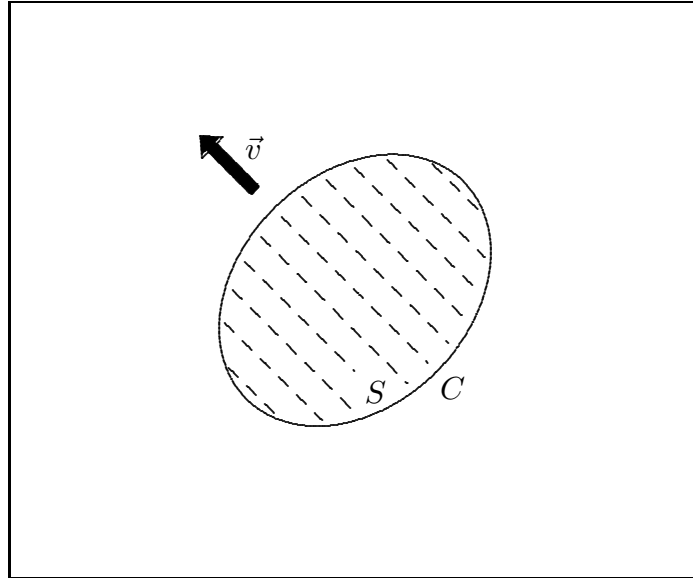


fig.12.1-1

La derivata totale temporale che compare nella (12.1.3) deve tenere conto anche di questo movimento. Il flusso concatenato nel circuito può cambiare: a) perché varia col tempo il valore di \vec{B} in tutti o in qualche punto; b) perché il movimento del circuito fa cambiare nel tempo la posizione del contorno. Infatti, se S si mantiene invariata, si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \hat{n} da \quad (12.1.4)$$

Sia $\vec{B} = \vec{B}(t, x(t), y(t), z(t))$ il vettore induzione magnetica. Si ha:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (12.1.5)$$

Ma:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (12.1.6)$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \quad (12.1.7)$$

che si può scrivere in forma compatta:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (12.1.8)$$

Abbiamo supposto velocità piccole per poter considerare trasformazioni di Galilei.

Ne segue che:

$$\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \hat{n} da = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} da + \int_S [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}] \cdot \hat{n} da \quad (12.1.9)$$

Ma:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) - \vec{B} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (12.1.10)$$

Poiché $\vec{v} = costante$ si ha $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Inoltre, per la fondamentale legge della magnetostatica risulta: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Quindi la (12.1.9) diventa:

$$\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \hat{n} da = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} da + \int_S [\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v})] \cdot \hat{n} da \quad (12.1.11)$$

Applicando il teorema di Stokes alla (12.1.11) si ha:

$$\int_S \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot \hat{n} da = \oint_C (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} \quad (12.1.12)$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} da + \oint_C (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} \quad (12.1.13)$$

Applicando la (12.1.3):

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = - \oint_C (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} da \quad (12.1.14)$$

che si può scrivere nella forma:

$$\oint_C [\vec{E}' - (\vec{v} \times \vec{B})] \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} da \quad (12.1.15)$$

Questa non é altro che una diversa enunciazione della legge di Faraday applicata al circuito in moto C . Ma possiamo anche interpretarla diversamente. Possiamo considerare il circuito C e la superficie S come situati, ad un certo istante, in una posizione fissa rispetto al sistema del laboratorio. Applicando la legge di Faraday a questo **circuito fisso**, possiamo scrivere:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} da \quad (12.1.16)$$

dove \vec{E} é il campo elettrico misurato nel sistema del laboratorio. L'ipotesi di invarianza relativistica implica che i primi membri delle due ultime equazioni devono essere eguali. Ciò significa che il campo elettrico \vec{E}' , misurato nel sistema di coordinate in moto, deve soddisfare alla:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (12.1.17)$$

Applicando il teorema di Stokes:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} da = 0 \quad (12.1.18)$$

Poiché l'equazione (12.1.18) vale qualunque sia S , la funzione integranda deve essere nulla:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (12.1.19)$$

Questa é la legge dell'induzione elettromagnetica per circuiti in quiete ed é **una delle quattro equazioni di Maxwell**.

12.2 - Induzione mutua

Come conseguenza diretta del fenomeno generale dell'induzione elettromagnetica, parliamo della mutua induzione fra due circuiti.

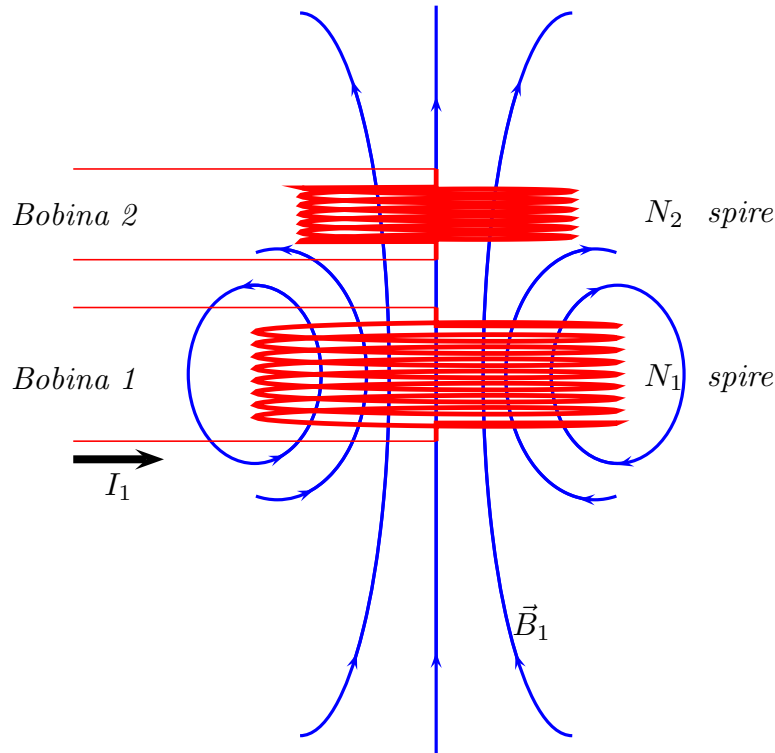


fig.12.2-1

La bobina 1 ha N_1 spire ed é percorsa dalla corrente I_1 che genera un campo magnetico \vec{B}_1 . Poiché le due bobine sono vicine l'una all'altra, alcune linee di campo magnetico generate dalla bobina 1 passeranno attraverso la bobina 2. Sia Φ_{21} il flusso del campo magnetico attraverso una spira della bobina 2 dovuto alla corrente I_1 . Variando la corrente I_1 nel tempo e quindi il flusso Φ_{21} , per la legge di Faraday, si genererà una forza elettromotrice indotta, e quindi una corrente, nella seconda bobina:

$$\epsilon_{21} = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -N_2 \int_{bobina\ 2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 \quad (12.2.1)$$

La variazione nel tempo del flusso Φ_{21} attraverso la bobina 2 é certamente proporzionale alla variazione nel tempo della corrente I_1 che scorre nella bobina 1, come si evince dalla legge di Biot e Savart (8.5.5). Pertanto:

$$N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} = M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (12.2.2)$$

dove la costante di proporzionalità M_{21} viene chiamata **Coefficiente di Mutua Induzione**. Dalla equazione (12.2.2) deriva:

$$\boxed{M_{21} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}} \quad (12.2.3)$$

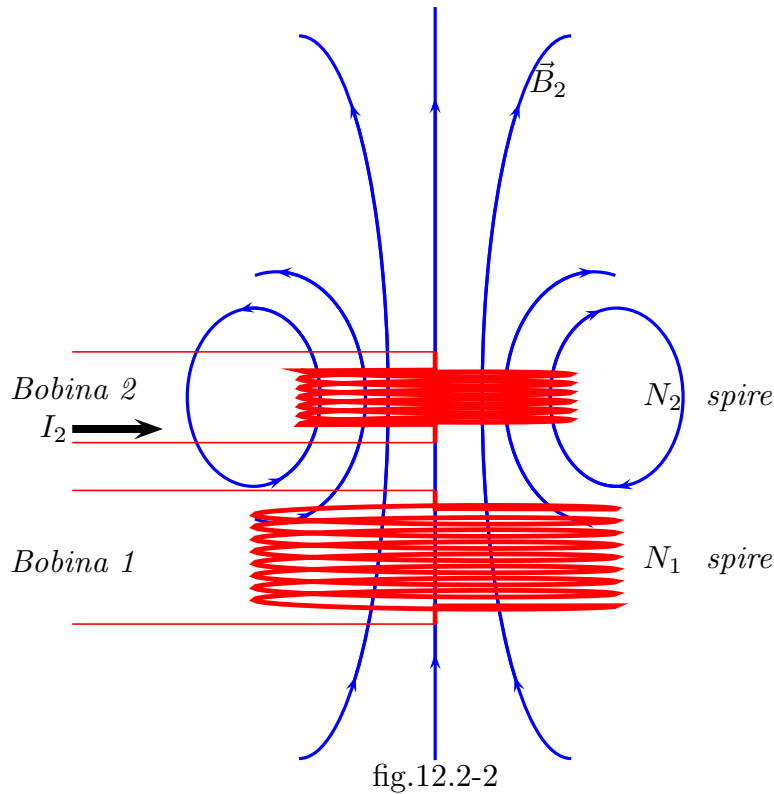
Esso nel SI si misura in henry (H):

$$1 \text{ henry} = 1 H = 1 Tm^2/A \quad (12.2.4)$$

Vedremo che il coefficiente di mutua induzione dipende dalle proprietà geometriche delle due bobine per esempio dal numero di spire e dal raggio di esse.

In maniera simile supponiamo invece che vi sia una corrente I_2 nella seconda bobina variabile nel tempo. Allora la forza elettromotrice indotta nella bobina 1, e quindi una corrente I_1 , diventa:

$$\epsilon_{12} = -N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_1 \int_{bobina\ 1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{a}_1 \quad (12.2.5)$$



Questa variazione di flusso nella bobina 1 é certamente proporzionale alla variazione della corrente nella bobina 2: Pertanto:

$$N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (12.2.6)$$

dove la costante di proporzionalitá \$M_{12}\$ viene chiamata anch'essa **Coefficiente di Mutua Induzione**. Dalla equazione (12.2.6) deriva:

$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} \quad (12.2.7)$$

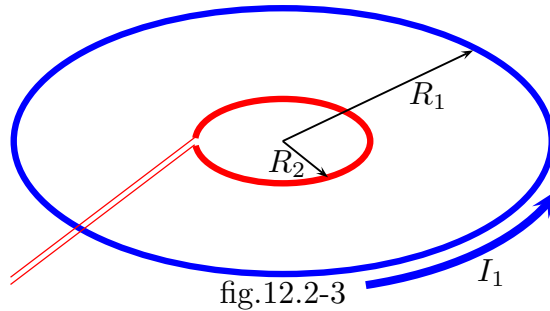
Tuttavia, come dimostreremo nel paragrafo 12.4, i due coefficienti sono eguali:

$$M_{21} = M_{12} = M \quad (12.2.8)$$

Come primo esempio calcoliamo il coefficiente di mutua induzione di due spire circolari complanari concentriche (\$R_1 \gg R_2\$).

Consideriamo due singole spire circolari concentriche di raggi \$R_1\$ ed \$R_2\$, con \$R_1 \gg R_2\$,

come mostrato in figura 12.2-3.



Applicando la formula 8.6.5 del capitolo 8 per $z = 0$, vediamo che il campo di induzione magnetica al centro della spira di raggio R_1 e dovuto alla corrente I_1 circolante nella spira esterna é:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \quad (12.2.9)$$

Poiché abbiamo ipotizzato $R_1 \gg R_2$, possiamo approssimare il campo di induzione magnetica in ogni punto della superficie circondata dalla spira interna con quello al centro della spira stessa. Quindi il flusso attraverso la seconda bobina (quella interna) é:

$$\Phi_{21} = B_1 A_2 = \left(\frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \right) \pi R_2^2 \quad (12.2.10)$$

Cosí il coefficiente di mutua induzione fra i due circuiti, nell'ipotesi che $R_1 \gg R_2$, é:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \quad (12.2.11)$$

Il risultato mostra che il coefficiente di mutua induzione dipende soltanto dai fattori geometrici R_1 ed R_2 ed é indipendente dalla corrente I_1 nella spira.

Come secondo esempio calcoliamo il coefficiente di Mutua Induzione di una bobina avvolta su un solenoide.

Un lungo solenoide di lunghezza l e di sezione trasversale di area A é costituito di N_1 spire. Una bobina isolata di N_2 spire é avvolta su di esso, come mostrato in figura 12.2-3.

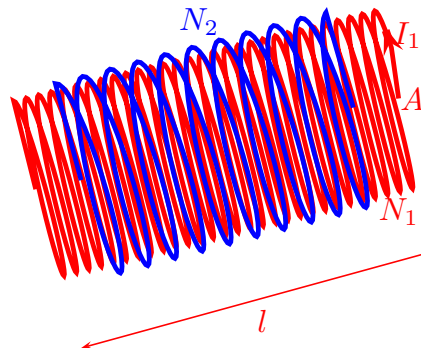


fig.12.2-3

Il flusso del campo magnetico attraverso ciascuna spira dell'avvolgimento esterno dovuto al solenoide é:

$$\Phi_{21} = BA = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} A \quad (12.2.12)$$

essendo I_1 la corrente che circola nel solenoide e, per la formula (8.8.6), $\frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$ é il campo di induzione magnetica, pressoché uniforme, all'interno del solenoide supposto infinitamente lungo.

Cosí il coefficiente di mutua induzione é:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \quad (12.2.13)$$

12.3 - Il fenomeno dell'autoinduzione¹⁾

Un fenomeno di induzione elettromagnetica si produce, anche, quando si abbia un unico circuito, nel quale la corrente vari di intensitá.

Infatti, **il campo magnetico variabile generato dalla corrente determinerá la produzione di una forza elettromotrice indotta nel circuito stesso, la quale produrrá aumento di intensitá, allorché la corrente decresce e diminuzione di intensitá nel caso inverso.** In una parola, l'induzione d'un circuito su sé stesso, ossia l'*autoinduzione*, ha per effetto di attenuare le variazioni d'intensitá della corrente nel circuito. Questo effetto é paragonabile a quello dell'inerzia posseduta da un corpo in moto, in virtú della quale sono attenuate le brusche variazioni di velocitá; i volanti dei motori industriali agiscono appunto cosí in virtú della loro inerzia. Ma una simile analogia é puramente superficiale.

La forza elettromotrice d'autoinduzione (o autoindotta) ad un dato istante é proporzionale alla *velocitá*, con cui nell'istante considerato varia l'intensitá della corrente, come pure ad un coefficiente, che ha ricevuto il nome di *coefficiente di autoinduzione L*, o semplicemente *autoinduzione*, il quale dipende dalla forma del circuito.

Matematicamente la forza elettromotrice autoindotta, per una bobina di N spire, puó essere definita come:

$$\epsilon_L = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -N \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da \quad (12.3.1)$$

che si puó anche scrivere:

$$\epsilon_{selfind} = -N \frac{d\Phi_B}{dI} \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (12.3.2)$$

¹⁾ Augusto Righi e Bernardo Dessau: La Telegrafia senza filo - Zanichelli, Bologna, 1903, pag. 78.

Ossia:

$$L = N \frac{d\Phi_B}{dI} = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (12.3.3)$$

Il coefficiente di autoinduzione L é piccolo se il circuito é rettilineo, mentre assume valori elevati nel caso di un circuito avvolto ad elica o a spirale. Ritorna minimo se l'elica é doppia, ed uno dei rami serve di ritorno alla corrente che arriva per l'altro.

La corrente, che ad un istante qualunque percorre il circuito, si puó considerare come somma di due termini, e cioé della corrente che esisterebbe, se non esistesse autoinduzione, e di quella dovuta a questo fenomeno. Quest'ultima si suole chiamare extracorrente. Essa é *inversa*, cioé di direzione opposta alla corrente principale, quando questa sta aumentando d'intensitá, e *diretta* nel caso opposto.

Cosí, quando si chiude il circuito di una pila, si produce una extracorrente inversa, mentre si produce una extracorrente diretta durante il periodo variabile di cessazione della corrente per interruzione del circuito.

A queste extracorrenti é dovuto il fenomeno, dell'essere debolissima la scintilla di chiusura di un circuito comprendente molte coppie voltaiche o molti accumulatori, e assai brillante la scintilla d'interruzione, specialmente quando il circuito possiede una grande autoinduzione.

Il fenomeno dell'autoinduzione fu scoperto nel 1832, dal fisico americano **Joseph Henry** (17 dicembre 1797, Albany, U.S.A - 13 maggio 1878, Washington, U.S.A.)

Come esempio di calcolo del coefficiente di autoinduzione, calcoliamo quello di un solenoide di N spire, di lunghezza l e raggio a in cui, in ciascuna spira, scorre una corrente I , come mostrato in figura 8.8.1.

Considerando il solenoide infinitamente lungo, il campo di induzione magnetica al suo interno é dato dalla formula (8.8.6):

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z} \quad (12.3.2)$$

essendo $n = \frac{N}{l}$ il numero di spire per unitá di lunghezza. Il flusso del campo magnetico attraverso ciascuna spira é:

$$\Phi_B = BA = \mu_0 n I \pi a^2 \quad (12.3.3)$$

Cosí il coefficiente di autoinduzione é:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l} = \mu_0 n^2 \pi a^2 l \quad (12.3.4)$$

L dipende soltanto dai fattori geometrici (n, a, l) ed é indipendente dalla corrente I .

Supponiamo di avere due solenoidi dello stesso raggio a e della stessa lunghezza l , uno con N_1 spire e l'altro con N_2 spire.

I coefficienti di autoinduzioni per i due solenoidi sono:

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 \pi a^2 l \quad (12.3.5)$$

$$L_2 = \mu_0 n_2^2 \pi a^2 l \quad (12.3.6)$$

Consideriamo la seguente quantità:

$$\sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{\mu_0 n_1^2 \pi a^2 l} \sqrt{\mu_0 n_2^2 \pi a^2 l} = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \quad (12.3.7)$$

che é la formula (12.2.13) del coefficiente di mutua induzione fra due solenoidi coassiali dello stesso raggio. In generale é piú conveniente scriverla come:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad 0 < k < 1 \quad (12.3.8)$$

dove k é il **coefficiente di accoppiamento**. Nel nostro esempio abbiamo $k = 1$ che significa che tutto il flusso magnetico prodotto dal solenoide passa attraverso la bobina esterna, e viceversa, in questa idealizzazione.

12.4 - La formula di Neumann^{1),2)}

Consideriamo la prima legge di Laplace data dall'equazione (8.4.12) del capitolo 8:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (12.4.1)$$

In essa \vec{r} é il vettore posizione del punto campo rispetto all'elemento $d\vec{l}$ posto nella origine del sistema di riferimento.

Nel caso piú generale l'elemento $d\vec{l}_1$ (sorgente) é individuato dal vettore posizione \vec{r}_1 e il punto campo dal vettore posizione \vec{r}_2 rispetto ad una origine O . Allora la formula (12.4.1) si scrive:

$$dB(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (12.4.2)$$

Ne segue che il campo di induzione magnetica calcolato nel punto individuato dal vettore posizione \vec{r}_2 rispetto all'origine O , dovuto ad un circuito C_1 il cui elemento $d\vec{l}_1$ é individuato dal vettore posizione \vec{r}_1 rispetto all'origine O , é:

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (12.4.3)$$

¹⁾ Neumann Franz Ernst: Joachimsthal (Germania), 11 settembre 1798 - Königsberg (attuale Kaliningrad) ex Prussia Orientale, 23 maggio 1895.

²⁾ Reitz John R., Milford Frederick J.: Elettromagnetismo - Manfredi Editore, Milano, 1971, pag.204.

Consideriamo, ora, due circuiti stazionari rigidi, C_1 e C_2 , posti in un mezzo lineare (vuoto per il momento). Il coefficiente di mutua induzione é dato dalla formula (12.2.3):

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \quad (12.4.4)$$

Applicando la formula (12.4.3), il flusso del campo di induzione magnetica generato dal circuito C_1 che attraversa il circuito C_2 é:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right\} \cdot \hat{n} da_2 \quad (12.4.5)$$

L'integrale all'interno delle parentesi graffe dipende solo dalle coordinate con indice 1. Tenendo presente che, dalla formula del capitolo 1 (1.9.2), si ha:

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right), \quad (12.4.6)$$

dove l'operatore $\vec{\nabla}$ opera su \vec{r} , possiamo scrivere, ponendo $\vec{r} = \vec{r}_2$ e $\vec{r}' = \vec{r}_1$:

$$\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\vec{\nabla}_{(2)} \left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) \quad (12.4.7)$$

dove si deve intendere che l'operatore $\vec{\nabla}_{(2)}$ opera su \vec{r}_2 .

Quindi, l'equazione (12.4.5) si scrive:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left\{ \oint_{C_1} \vec{\nabla}_{(2)} \left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) \times d\vec{l}_1 \right\} \cdot \hat{n} da_2 \quad (12.4.8)$$

Poiché $\vec{\nabla}_{(2)}$ non opera sulle coordinate di integrazione si può uscire dall'integrale e scrivere:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \vec{\nabla}_{(2)} \times \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right\} \cdot \hat{n} da_2 \quad (12.4.9)$$

Applicando il teorema di Stokes, formula (1.7.7) del Capitolo 1:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{n} da \quad (\text{Teorema di Stokes}) \quad (12.4.10)$$

l'equazione (12.4.9) si può scrivere:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (12.4.11)$$

In definitiva:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad \text{formula di Neumann} \quad (12.4.12)$$

Essa é nota come **formula di Neumann** della mutua induttanza. **La simmetria $M_{21} = M_{12}$ risulta evidente dall'equazione (12.4.12).**

Indicando con $\epsilon(1, 2)$ l'angolo fra $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$, la (12.4.12) si puó anche scrivere:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dl_1 dl_2 \cos \epsilon(1, 2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad \text{formula di Neumann} \quad (12.4.13)$$

La formula di Neumann é ugualmente applicabile alla autoinduttanza, nel qual caso viene scritta nella forma:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}'_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'_1|} \quad (12.4.14)$$

Nell'applicazione della formula (12.4.14), bisogna fare attenzione, data la singolaritá in $\vec{r}_1 = \vec{r}'_1$.

12.5 - L'energia magnetica¹⁾

Prima di continuare con il calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione per varie topologie di circuiti, introduciamo il concetto di **energia magnetica o immagazzinata nel campo magnetico**.

Per generare un campo magnetico occorre spendere energia; questo deriva direttamente dalla legge dell'induzione di Faraday. Se ad un circuito si applica una fonte esterna di forza elettromotrice ε_0 , allora in genere la corrente attraverso il circuito può essere espressa tramite l'equazione:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon = IR, \quad (12.5.1)$$

dove ε è la forza elettromotrice indotta e R è la resistenza del circuito. Il lavoro fatto da ε_0 nello spostare l'incremento di carica $dq = Idt$ attraverso il circuito è:

$$\varepsilon_0 dq = \varepsilon_0 Idt = -\varepsilon Idt + I^2 R dt = Id\Phi + I^2 R dt, \quad (12.5.2)$$

dove l'ultima espressione è stata ottenuta mediante la legge di Faraday $\varepsilon = -d\Phi/dt$. Il termine $I^2 R dt$ rappresenta la conversione irreversibile di energia elettrica in calore da parte del circuito, ma questo termine assorbe tutto il lavoro speso solo nei casi in cui la variazione di flusso è zero. L'altro termine $Id\Phi$ è il lavoro fatto contro la forza elettromotrice indotta nel circuito; questa è la frazione di lavoro fatto da ε_0 che altera effettivamente la struttura del campo magnetico. Trascurando il termine $I^2 R dt$ scriviamo:

$$dW_b = Id\Phi, \quad (12.5.3)$$

dove b indica che questo lavoro è fatto dalle sorgenti di energia elettrica esterne (per esempio batterie). L'incremento di lavoro (12.5.3) può essere positivo o negativo. È positivo quando la variazione di flusso $d\Phi$ attraverso il circuito è nella stessa direzione del flusso creato dalla corrente I .

Per un circuito stazionario rigido in cui non vi sono perdite di energia oltre la perdita per effetto Joule, (per esempio non c'è isteresi), il termine dW_b è uguale alla variazione di **energia magnetica** nel circuito. La perdita per isteresi sarà discussa nel paragrafo xxxxx, ma per ora limiteremo la nostra attenzione ai sistemi magnetici reversibili.

Ricaviamo, ora, una espressione dell'energia magnetica di un sistema di circuiti di corrente interagenti ossia accoppiati. Se vi sono n circuiti, allora, secondo l'equazione (12.5.3), il lavoro elettrico fatto contro la forza elettromotrice indotta è dato da:

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i. \quad (12.5.4)$$

Questa espressione è perfettamente generale; essa è valida indipendentemente da come gli incrementi di flusso $d\Phi$ sono prodotti. In particolare tuttavia ci interessa il caso in cui

¹⁾ Reitz John R., Milford Frederick J.: *Elettromagnetismo* - Manfredi Editore, Milano, 1971, pag.267.

i $d\Phi_i$ sono prodotti dalle variazioni di corrente negli n circuiti stessi. In questi casi le variazioni di flusso sono direttamente proporzionali alle variazioni delle correnti:

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{j=1}^n M_{ij} dI_j \quad (12.5.5)$$

Se i circuiti sono rigidi e stazionari allora le variazioni di flusso $d\Phi_i$ non sono accompagnate da lavoro meccanico e dW_b è proprio eguale alla variazione di energia magnetica dW del sistema. Si osservi che noi limitiamo la nostra attenzione ai circuiti stazionari sicchè l'energia magnetica può essere calcolata come un termine di lavoro. Successivamente supporremo che i vari circuiti si muovano uno rispetto all'altro, ma allora non potremo identificare dW con dW_b .

L'energia magnetica W di un insieme di n circuiti stazionari rigidi si ottiene integrando l'equazione (12.5.4) fra lo stato di flusso zero (corrispondente a tutti gli $I_i = 0$) e la serie finale dei valori del flusso. Per un insieme di **circuiti rigidi** contenenti, o posti in, **mezzi magnetici lineari**, i Φ_i sono linearmente correlati alle correnti dei circuiti e l'energia magnetica è indipendente dal modo in cui queste correnti sono portate al loro valore finale.

Poichè questo caso è particolarmente importante ci occuperemo in particolare del circuito rigido, caso lineare.

Essendo l'energia finale indipendente dall'ordine con cui le correnti sono state variate, possiamo scegliere un particolare schema per il quale W è facilmente calcolabile. In questo schema tutte le correnti (e pertanto tutti i flussi) sono portati insieme al loro valore finale, cioè ad un dato momento tutte le correnti (e tutti i flussi) avranno un uguale valore pari alla stessa frazione del loro valore finale. Chiamiamo questa frazione a . Se i valori finali della corrente vengono indicati con i simboli:

$$I_1^{(f)}, \quad I_2^{(f)}, \quad \dots, \quad I_n^{(f)}, \quad (12.5.6)$$

allora $I_i = aI_i^{(f)}$; inoltre, $d\Phi_i = \Phi_i^{(f)} da$. Integrando l'equazione (12.5.4) si ha:

$$W = \sum_{i=1}^n I_i^{(f)} \Phi_i^{(f)} \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i^{(f)} \Phi_i^{(f)}. \quad (12.5.7)$$

Avendo impiegato l'indice (f) semplicemente per designare una quantità che rimane costante mentre α varia, troviamo ora conveniente togliere l'indice e scrivere:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \quad (\text{circuiti rigidi, mezzi lineari}). \quad (12.5.8)$$

Con l'aiuto dell'equazione (12.5.5), che per un circuito rigido, sistema lineare può essere integrata direttamente, l'energia magnetica può essere espressa nella forma seguente:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j = \\ &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \dots + \frac{1}{2} L_n I_n^2 + \\ &+ M_{12} I_1 I_2 + M_{13} I_1 I_3 + \dots + M_{1n} I_1 I_n + M_{23} I_2 I_3 + \\ &+ \dots + M_{n-1, n} I_{n-1} I_n \quad (\text{circuiti rigidi, mezzi lineari}). \end{aligned} \quad (12.5.9)$$

Qui abbiamo applicato i risultati dei paragrafi precedenti:

$$M_{ij} = M_{ji}; M_{ii} = L_i \quad (12.5.10)$$

Per due circuiti accoppiati, l'ultima equazione si riduce a:

$$W = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + MI_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \quad (12.5.11)$$

dove, per semplicità abbiamo scritto M per M_{12} . Il termine MI_1I_2 può essere positivo o negativo, ma l'energia magnetica totale deve essere positiva (o nulla) per ogni coppia di valori di corrente: I_1 e I_2 . Indicando il rapporto di corrente I_1/I_2 con x , otteniamo:

$$W = \frac{1}{2}I_2^2 (L_1x^2 + 2Mx + L_2) \geq 0. \quad (12.5.12)$$

Il valore di x che rende minimo (o massimo) W si trova differenziando W rispetto a x e ponendo il risultato eguale a zero:

$$x = -\frac{M}{L_1}. \quad (12.5.13)$$

La derivata seconda di W rispetto a x è positiva; ciò mostra che la (12.5.13) è la condizione per un minimo. L'energia magnetica è $W \geq 0$ per ogni x ; in particolare il valore minimo di W (definito da $x = -M/L_1$) è maggiore o eguale a zero. Pertanto è:

$$\frac{M^2}{L_1} - \frac{2M^2}{L_1} + L_2 \geq 0 \quad (12.5.14)$$

ossia:

$$M^2 - 2M^2 + L_1L_2 = -M^2 + L_1L_2 \geq 0 \quad \text{quindi} \quad L_1L_2 \geq M^2, \quad (12.5.15)$$

risultato enunciato, ma non dimostrato, nel paragrafo 12.3.

L'equazione (12.5.8) fornisce l'energia magnetica di un insieme di correnti in termini dei parametri del circuito: correnti e induttanze. Tale formulazione è particolarmente utile, perchè questi parametri sono direttamente misurabili. D'altronde un'altra formulazione dell'energia magnetica in termine dei vettori di campo \vec{B} e \vec{H} è molto interessante giacchè fornisce una rappresentazione in cui l'energia magnetica è immagazzinata nel campo magnetico stesso. Questa rappresentazione può essere ampliata, com'è fatto nel capitolo 15, per mostrare come in processi non stazionari l'energia si muova attraverso il campo elettromagnetico.

Consideriamo un gruppo di circuiti rigidi percorsi da corrente, nessuno dei quali si estende all'infinito, immersi in un mezzo con proprietà magnetiche lineari. L'energia di questo sistema è data dall'equazione (12.5.8).

Per la presente discussione conviene assumere che ciascun circuito sia costituito solo da una spira; allora il flusso Φ_u può essere espresso come:

$$\Phi = \int_{S_i} \vec{B} \cdot \hat{n} da = \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{l}_i, \quad (12.5.16)$$

dove \vec{A} è il potenziale vettore locale. Sostituendo questo risultato nella (12.5.8) si ha:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} C_i I_i \vec{A} \cdot d\vec{l}_i \quad (12.5.17)$$

Vorremmo rendere l'equazione (12.5.16) alquanto più generale. Supponiamo che non vi siano circuiti di corrente ben definiti, ma invece che ciascun **circuito** sia un percorso chiuso nel mezzo (che prendiamo conduttore). Si può fare in modo che l'equazione (12.5.17) si avvicini molto a questa condizione scegliendo un grande numero di circuiti contigui (C_i), sostituendo $\vec{I}_i d\vec{l}_i \rightarrow \vec{J} dv$ e prendendo \int_V per $\sum_i \oint_{C_i}$.

Pertanto è:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dv. \quad (12.5.18)$$

Quest'ultima equazione può essere ancora trasformata impiegando l'equazione del campo $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ e l'identità vettoriale:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}, \quad (12.5.19)$$

quindi:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} dv - \frac{1}{2} \int_S \vec{A} \times \vec{H} \cdot \hat{n} da, \quad (12.5.20)$$

dove S è la superficie che delimita il volume V . Poichè per ipotesi nessuno dei **circuiti** di corrente si estende all'infinito, conviene spostare la superficie S sino ad una distanza molto grande in modo che tutte le parti di questa superficie siano lontane dalle correnti. Naturalmente il volume dell'insieme deve essere aumentato in conseguenza. Ora \vec{H} decresce come $1/r^2$, dove r è la distanza fra una origine vicina al centro della distribuzione di corrente e un punto caratteristico sulla superficie S ; \vec{A} decresce almeno con $1/r$ e l'area della superficie è proporzionale a r^2 . Pertanto il contributo dell'integrale di superficie nella equazione (12.5.19) decresce come $1/r$ o più velocemente, e se S viene portata all'infinito, questo contributo si annulla.

Sopprimendo nella (12.5.20) l'integrale di superficie e estendendo il termine di volume sino ad includere tutto lo spazio, abbiamo:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dv. \quad (12.5.21)$$

poichè $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Questo risultato é del tutto analogo alla espressione della energia elettrostatica. La validità dell'equazione (12.5.20) è limitata agli insiemi contenenti mezzi magnetici lineari, giacchè è stata ricavata dalla equazione (12.5.8).

Ragionando come nel paragrafo 6-3, siamo portati ad introdurre il concetto di densità di energia in un campo magnetico.

$$w = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}, \quad (12.5.22)$$

che per il caso di materiali magnetici isotropi si riduce alla:

$$w = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (12.5.23)$$

12.6 - Forze e coppie agenti su circuiti rigidi¹⁾

Sino a questo punto abbiamo elaborato varie espressioni dell'energia magnetica di un insieme di circuiti di corrente. Queste sono date dalle equazioni (12.5.8) e (12.5.9) e dalla (12.5.21). Mostriamo ora come la forza o la coppia agente su uno di questi circuiti possa essere calcolata dalla conoscenza dell'energia magnetica.

Supponiamo ora che uno dei circuiti si sposti rigidamente di $d\vec{r}$ sotto l'influenza delle forze magnetiche agenti su di esso, mentre tutte le altre correnti rimangono costanti. Il lavoro meccanico prodotto dall'insieme in queste circostanze è:

$$dW_m = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (12.6.1)$$

Ma la conservazione dell'energia richiede che:

$$dW + dW_m = dW_b, \quad (12.6.2)$$

dove dW è la variazione di energia magnetica del sistema e dW_b è il lavoro eseguito dalle sorgenti di energia esterne contro le fem indotte.

Prima che si possa giungere ad una relazione fra W e la forza di un circuito occorre eliminare dW_b dall'equazione (12.6.2). Questo è facilmente ottenibile per un insieme di circuiti rigidi in mezzi magnetici lineari. Se la geometria del sistema è alterata ma tutte le correnti rimangono inalterate, allora in accordo con l'equazione (12.5.8)

$$dW = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i \quad (12.6.3)$$

Ma dall'equazione (5.12.4):

$$dW_b = \sum_i I_i d\Phi_i \quad (12.6.4)$$

Pertanto:

$$dW_b = 2dW. \quad (12.6.5)$$

Impiegando questa equazione per eliminare dW_b , dalla (12.6.2) e combinando il risultato con la (12.6.1) otteniamo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (12.6.6)$$

oppure:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}W \quad (12.6.7)$$

La forza agente sul circuito è il gradiente dell'energia magnetica.

Se il circuito in esame è fatto ruotare intorno al suo asse allora l'equazione (12.6.1) può essere sostituita con:

$$dW_m = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \tau_1 d\theta_1 + \tau_2 d\theta_2 + \tau_3 d\theta_3, \quad (12.6.8)$$

¹⁾ Reitz John R., Milford Frederick J.: Elettromagnetismo - Manfredi Editore, Milano, 1971, pag.272.

dove $\vec{\tau}$ è il momento della coppia agente sul circuito e $d\vec{\theta}$ è lo spostamento angolare. Con queste condizioni:

$$\tau_1 = \frac{\partial W}{\partial \theta_1}, \quad (12.6.9)$$

e così via.

Proprio come nel caso elettrostatico (discusso nel paragrafo 6-7) per applicare il metodo dell'energia occorre esprimere W in forma analitica, cioè è necessario specificare la dipendenza di W dalle variabili $(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Dopo aver fatto questo, però, il metodo dell'energia diventa una tecnica molto utile per calcolare forze e coppie.

Illustreremo il metodo con due esempi. Altri esercizi di questo tipo si trovano nei problemi alla fine del capitolo.

Come primo esempio calcoliamo la forza fra due circuiti di corrente rigidi. L'energia magnetica è data dall'equazione (12.5.10), e la forza sul circuito 2 è:

$$\vec{F}_2 = \vec{\nabla}_2 W = I_1 I_2 \vec{\nabla}_2 M, \quad (12.6.10)$$

dove la mutua induttanza deve essere scritta in modo che si veda la sua dipendenza da \vec{r}_2 . La formula di Neumann (equazione 12.4.13) mostra esplicitamente questa dipendenza, così possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{\nabla}_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \end{aligned} \quad (12.6.11)$$

espressione che mostra chiaramente la sua naturale simmetria, cioè $F_2 = -F_1$. Però noi abbiamo già una espressione della forza fra due circuiti, l'equazione di Biot e Savart (8.25), che è una variazione della equazione appena ricavata. Effettivamente le due espressioni sono equivalenti, come può essere verificato facilmente. Sviluppiamo il prodotto triplo nell'integrando della equazione (8-25):

$$d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = d\vec{l}_1 [d\vec{l}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2). \quad (12.6.12)$$

L'integrale contenente l'ultimo termine a destra è identico alla (12.6.11); quello contenente il primo termine può essere scritto:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}. \quad (12.6.13)$$

Ora $d\vec{l}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ è $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ volte la proiezione di $d\vec{l}_2$ sul vettore $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Indichiamo $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ con r_{21} ; allora la proiezione di $d\vec{l}_2$ è proprio dr_{21} . L'integrale esteso a C_2 può essere eseguito tenendo $d\vec{l}_1$ fisso:

$$\oint_{C_2} \frac{dr_{21}}{r_{21}^2} = - \left[\frac{1}{r_{21}} \right]_a^b, \quad (12.6.14)$$

il limite superiore e il limite inferiore sono identici trattandosi di un circuito chiuso. Pertanto l'equazione (12.6.13) diventa nulla e l'equazione (12.6.12) é equivalente alla equazione(8.25).

Come secondo esempio, consideriamo un lungo solenoide formato di \mathcal{N} spire, di lunghezza l , percorso da corrente I . Lungo l'asse del solenoide è inserita una sottile sbarra di ferro con permeabilità μ e sezione A . Se si estrae la sbarra (figura 12.6-1a) fino a quando dentro il solenoide ne rimane solo metà, calcolare approssimativamente la forza tendente a riportarla a suo posto.

La struttura del campo magnetico associata con questo problema è complessa; fortunatamente però non dobbiamo calcolare tutta l'energia magnetica del sistema, ma solo la differenza di energia fra le due situazioni della figura 12.6-1 a) e b). Il campo in presenza della sbarra di ferro magnetizzata é complesso, ma si sposta longitudinalmente con la sbarra. La differenza sostanziale fra le configurazioni a) e b) è che un tratto Δx è stato effettivamente trasferito dall'estremità destra della sbarra (fuori della zona del campo) nella zona di campo uniforme dentro il solenoide, in un punto dove non si risente l'influenza smagnetizzante del polo magnetico. Pertanto:

$$W(x_0 + \delta x) \approx W(x_0) + \frac{1}{2} \int_{A\Delta x} (\mu - \mu_0) H^2 dv = W(x_0) + \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{\mathcal{N}^2 I^2}{l^2} A \Delta x, \quad (12.6.15)$$

e

$$F_x \approx \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{\mathcal{N}^2 I^2 A}{l^2} \quad (12.6.16)$$

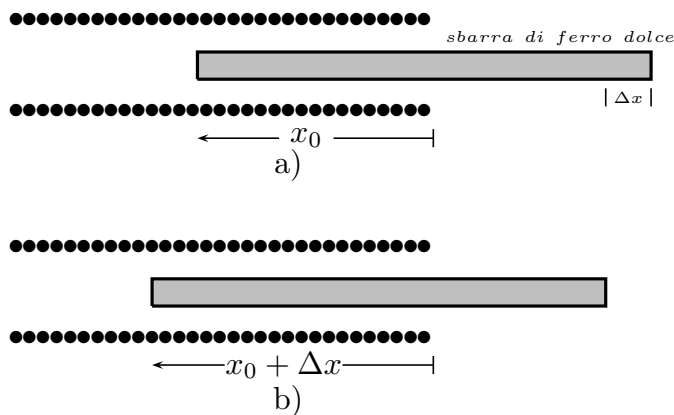


fig.12.6-1

12.7 - Coefficiente di Mutua Induzione fra due fili rettilinei, uguali e paralleli¹⁾

Applichiamo ora l'equazione (12.4.12) per calcolare il coefficiente di mutua induzione fra due fili rettilinei, uguali, paralleli, disposti come in figura (12.7-1), orientati nello stesso verso e di lunghezza l , grande rispetto alla loro distanza d . In questo caso $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$ sono paralleli, dello stesso verso, con modulo dl_1 e dl_2 .

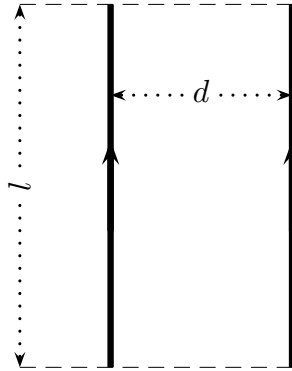


fig.12.7-1

Si ha cosí:

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_1} dl_1 \int_{l_2} \frac{dl_2}{r}. \quad (12.7.1)$$

Calcoliamo, ora, il secondo integrale. Poniamo (vedi figura (12.7-2)) l'asse delle z parallelo al filo, il piano xy nel suo punto di mezzo, siano x_0, y_0, z_0 , le coordinate di un suo punto generico P_0 ; ovviamente x_0, y_0 , sono le stesse per ogni punto del filo.

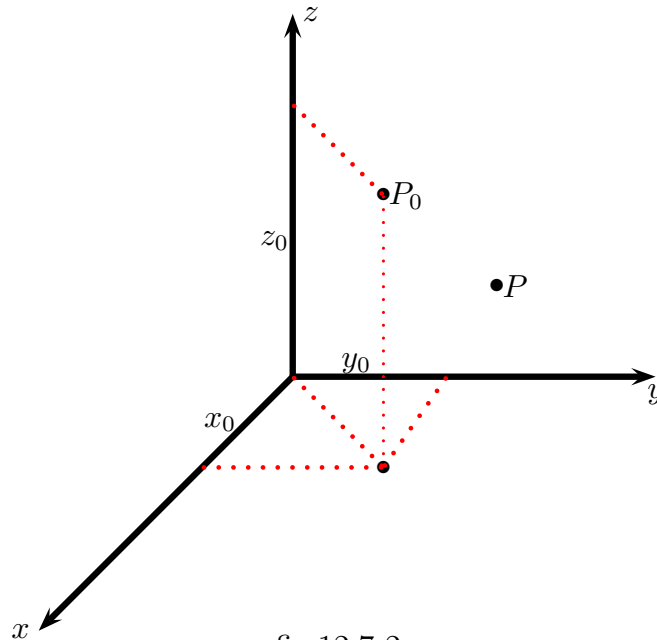


fig.12.7-2

¹⁾ Dario Graffi: *Teoria Matematica dell'Elettromagnetismo* - Casa Editrice Pátron, Bologna, 1972, pag.316 e pag.113.

Ora se P é un punto di coordinate x, y, z , la distanza r fra P_0 e P é eguale a:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (12.7.2)$$

e, quindi, risulta:

$$\int_{l_2} \frac{dl_2}{r} = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (12.7.3)$$

Poniamo, per brevità:

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \quad (12.7.4)$$

essendo d la distanza di P dal filo.²⁾

Ponendo inoltre $(z - z_0) = \xi$, ossia $z_0 = z - \xi$ e $dz_0 = -d\xi$, l'equazione (12.7.3) si può scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{l_2} \frac{dl_2}{r} &= \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \int_{z+l/2}^{z-l/2} -\frac{d\xi}{\sqrt{d^2 + \xi^2}} = \\ &= \int_{z-l/2}^{z+l/2} \frac{d\xi}{\sqrt{d^2 + \xi^2}} = \left[\log \left(\xi + \sqrt{d^2 + \xi^2} \right) \right]_{z-l/2}^{z+l/2} = \\ &= \log \left[\left(z + \frac{l}{2} \right) + \sqrt{d^2 + \left(z + \frac{l}{2} \right)^2} \right] - \log \left[\left(z - \frac{l}{2} \right) + \sqrt{d^2 + \left(z - \frac{l}{2} \right)^2} \right] = \quad (12.7.5) \\ &= \log \frac{\sqrt{d^2 + \left(z + \frac{l}{2} \right)^2} + \left(z + \frac{l}{2} \right)}{\sqrt{d^2 + \left(z - \frac{l}{2} \right)^2} + \left(z - \frac{l}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore della frazione contenuta nell'ultimo termine dell'equazione (12.7.5) per la quantità $\left(\sqrt{d^2 + \left(z - \frac{l}{2} \right)^2} - \left(z - \frac{l}{2} \right) \right)$. In definitiva, si può scrivere:

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} =$$

$$= \log \frac{\left[\sqrt{d^2 + \left(z + \frac{l}{2} \right)^2} + \left(z + \frac{l}{2} \right) \right] \left[\sqrt{d^2 + \left(z - \frac{l}{2} \right)^2} - \left(z - \frac{l}{2} \right) \right]}{d^2} \quad (12.7.6)$$

²⁾ Herbert Bristol Dwight: Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Fourth Edition, 1961, pag.50, n.200.01: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} = \log \left(x + \sqrt{(x^2 + a^2)} \right) + c.$

Questa formula si semplifica notevolmente quando il punto P si trova abbastanza vicino al filo e sufficientemente lontano dagli estremi così da poter ritenere d^2 trascurabile rispetto a $\left(\frac{l}{2} - z\right)^2$ e $\left(\frac{l}{2} + z\right)^2$. Quindi:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \simeq \\
 & \simeq \log \frac{\left[\left(z + \frac{l}{2}\right) + \left(z + \frac{l}{2}\right)\right] \left[\left|z - \frac{l}{2}\right| - \left(z - \frac{l}{2}\right)\right]}{d^2} = \\
 & = \log \frac{\left[\left(z + \frac{l}{2}\right) + \left(z + \frac{l}{2}\right)\right] \left[\left(\frac{l}{2} - z\right) + \left(\frac{l}{2} - z\right)\right]}{d^2} = \\
 & = \log \frac{4\left(\frac{l}{2} - z\right)\left(\frac{l}{2} + z\right)}{d^2} = \log \frac{4\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - z^2\right]}{d^2}
 \end{aligned} \tag{12.7.7}$$

In definitiva:

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \simeq \log \frac{4\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - z^2\right]}{d^2}.$$

(12.7.8)

Ne segue che la formula (12.7.1), in forma approssimata, valida per tutto il filo salvo che nelle vicinanze degli estremi, dove però il contributo a \mathcal{M}_{12} si può ritenere trascurabile, e posto l'asse z parallelo ai fili e l'origine nella loro mezzaria, si scrive:³⁾

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \log \frac{4\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - z^2\right]}{d^2} dz = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \log\left(\frac{l}{2} - z\right) dz + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \log\left(\frac{l}{2} + z\right) dz + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} (\log 4 - \log d^2) dz.
 \end{aligned} \tag{12.7.9}$$

Posto $x = \frac{l}{2} - z$ e, quindi, $dz = -dx$, si ha:

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \log\left(\frac{l}{2} - z\right) dz = \int_{+l}^0 -\log x dx = \int_0^{+l} \log x dx = [x \log x - x]_0^{+l} = l \log l - l$$

(12.7.10)

³⁾ Herbert Bristol Dwight: Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Fourth Edition, 1961, pag.141, n.610: $\int \log x dx = x \log x - x + c$.

Posto $x = \frac{l}{2} + z$ e, quindi, $dz = dx$, si ha:

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \log\left(\frac{l}{2} + z\right) dz = \int_0^{+l} \log x dx = [x \log x - x]_0^{+l} = l \log l - l \quad (12.7.11)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} (2l \log l - 2l) + \frac{\mu_0}{4\pi} (l \log 4 - l \log d^2) = \frac{\mu_0}{4\pi} [2l (\log l - 1) + 2l \log 2 - 2l \log d] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2l (\log l + \log 2 - \log d - 1) = \frac{\mu_0}{2\pi} l (\log 2l - \log d - 1). \end{aligned} \quad (12.7.12)$$

In conclusione:

Coefficiente di Mutua induzione fra due fili paralleli di lunghezza l e distanti d ($d \ll l$)

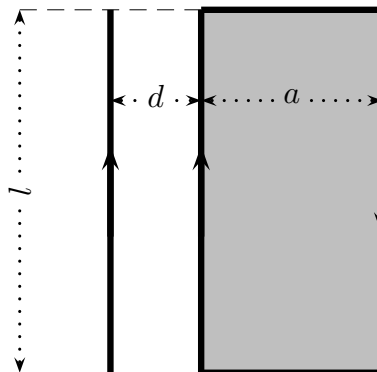
$$\mathcal{M}_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\log \frac{2l}{d} - 1 \right).$$

Formula Approssimata (12.7.13)

Dalla equazione (12.7.1) e dalle formule ottenute si ha subito il coefficiente di mutua induzione fra un filo conduttore di forma rettangolare avente due lati di lunghezza l paralleli al primo conduttore e gli altri due lati di lunghezza a e disposti come in figura (12.7-3). I lati di lunghezza a non danno alcun contributo al coefficiente di mutua induzione, perchè su ciascuno di essi è $\cos \epsilon = 0$; detta d la distanza fra il primo conduttore ed il lato più vicino del rettangolo, supposti entrambi orientati nello stesso verso, il contributo di essi al coefficiente di mutua induzione è espresso dalla (12.7.13) purchè si cambi il segno del secondo membro e si ponga $d + a$ in luogo di d ; si ha così:

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\log \frac{2l}{d} - \cancel{1} - \log \frac{2l}{d+a} + \cancel{1} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} l \log \frac{d+a}{d}. \quad (12.7.14)$$

Coefficiente di Mutua induzione fra un filo conduttore di forma rettangolare e un filo conduttore lungo l e distanti d ($d \ll l$)



Formula Approssimata

fig.12.7-3

12.8 - Coefficiente di Autoinduzione di un filo rettilineo¹⁾

Consideriamo l'energia immagazzinata nel campo magnetico:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{tutto lo spazio}} \vec{H} \cdot \vec{B} d^3r' \quad (12.8.1)$$

che si può scrivere:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{tutto lo spazio}} \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} d^3r' \quad (12.8.2)$$

essendo \vec{A} il potenziale vettore.

Tenendo conto che, date due funzioni vettoriali \vec{C} e \vec{D} , si ha:²⁾

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{C} - \vec{C} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{D} \quad (12.8.3)$$

ossia:

$$\vec{D} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) + \vec{C} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{D} \quad (12.8.4)$$

Ponendo \vec{H} al posto di \vec{D} e \vec{A} al posto di \vec{C} , si ha:

$$\vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (12.8.5)$$

Quindi:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{tutto lo spazio}} \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} d^3r' = \frac{1}{2} \int_{\text{tutto lo spazio}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) d^3r' + \frac{1}{2} \int_{\text{tutto lo spazio}} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} d^3r' \quad (12.8.6)$$

Applicando il teorema della divergenza al terzo integrale e la legge di Ampere (9.1.33) ($\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$) alla funzione integranda del terzo integrale si ottiene:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{tutto lo spazio}} \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} d^3r' = \frac{1}{2} \int_{S_\infty} (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} d^2r' + \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} d^3r' \quad (12.8.7)$$

essendo V il volume che racchiude le correnti.

Poiché $\vec{A} \times \vec{H}$ si avvicina all'infinito come $1/r^2$, il secondo integrale si annulla. In definitiva:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} d^3r' \quad (12.8.8)$$

¹⁾ Dario Graffi: Teoria Matematica dell'Elettromagnetismo - Casa Editrice Pátron, Bologna, 1972, pag. 318÷322.

²⁾ vedi Formulario in Appunti di Fisica II: Settima relazione differenziale.

Poiché:

$$W = \frac{1}{2} \mathcal{L} I^2 \quad (12.8.9)$$

essendo \mathcal{L} il coefficiente di autoinduzione. Confrontando la (12.8.9) con la (12.8.8), risulta:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{I^2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} d^3 r'. \quad (12.8.10)$$

Indicando con P un punto generico del volume V del conduttore si ha:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{I^2} \int_V \vec{A}(\vec{r}') \cdot \vec{J}(r') d^3 r'. \quad (12.8.11)$$

D'altra parte, per la formula (9.2.13), si può scrivere:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \quad (12.8.12)$$

dove con $d^3 r'$ si indica ancora il volume del conduttore (conviene, come ora vedremo, distinguere il volume su cui si calcola $\vec{A}(\vec{r})$ da quello su cui si calcola \mathcal{L}) e con P' un suo punto generico, in generale diverso da P ; $|\vec{r} - \vec{r}'|$, al solito, è la distanza fra P e P' . Sostituendo la (12.8.12) nella (12.8.11) è allora:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \int_V \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r d^3 r'. \quad (12.8.13)$$

Ammettiamo ora l'esistenza di una sezione Σ del conduttore su cui la corrente possa ritenersi distribuita uniformemente e questa sezione sia incontrata normalmente da tutte le linee del vettore \vec{J} tracciate nel volume V . Queste ipotesi si possono ritenere verificate se il conduttore è filiforme. Siano ora $d\Sigma$ e $d\Sigma'$ due porzioni elementari di Σ , l e l' gli assi dei tubi di flusso di \vec{J} che le attraversano e $d\Sigma$ e $d\Sigma'$ siano scelti in modo che P e P' cadano rispettivamente su l ed l' ; sicchè si può scrivere:

$$\vec{J}(P) = J(P)\hat{t}, \quad \vec{J}(P') = J(P')\hat{t}', \quad (12.8.14)$$

dove \hat{t} e \hat{t}' sono due vettori unitari paralleli e nello stesso verso di $\vec{J}(\vec{r})$ e $\vec{J}(\vec{r}')$; cioè ambedue tangenti a l ed l' . Ora, si può identificare $d^3 r$ con un tronco, di altezza infinitesima dl , del tubo di asse l , sicchè si ha:

$$\vec{J}(\vec{r}) d^3 r = J(\vec{r}) d\Sigma_1 \hat{t} dl, \quad (12.8.15)$$

dove $d\Sigma_1$ è la sezione del tubo l , fatta nel punto P , fatta nel punto P . Ma $J(P)d\Sigma_1$ è il flusso di \vec{J} attraverso una sezione del tubo, flusso uguale in ogni altra sezione (si ricordi he

la corrente è stazionaria o può ritenersi tale) quindi $J(P)d\Sigma_1$ vale il flusso di J attraverso $d\Sigma$, che è $\frac{I}{\Sigma}d\Sigma$; perciò:

$$\vec{J}(P)dV = \frac{I}{\Sigma}\hat{t}dl d\Sigma \quad (12.8.16)$$

e in modo analogo:

$$\vec{J}(P')dV' = \frac{I}{\Sigma}\hat{t}'dl' d\Sigma'. \quad (12.8.17)$$

Quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{I}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} d\Sigma \int_{\Sigma'} d\Sigma' \int_l \int_{l'} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\hat{t} \cdot \hat{t}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl dl' \quad (12.8.18)$$

Ora l'integrale esteso a l ed l' non è altro (vedi formula 12.4.12) che il coefficiente di Mutua Induzione fra l ed l' (si osservi infatti che $\hat{t}dl$ e $\hat{t}'dl'$ non sono altro che i vettori infinitesimi dP e dP' , tangenti rispettivamente a l ed l'), quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{I}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \mathcal{M}(l, l') d\Sigma d\Sigma'. \quad (12.8.19)$$

Cioè il coefficiente di Autoinduzione é la media, su una sezione del conduttore normale alle linee di corrente, dei coefficienti di mutua induzione fra le linee predette.

Come applicazione calcoliamo il coefficiente di autoinduzione di un conduttore cilindrico di lunghezza L , sezione Σ (L molto grande rispetto alle dimensioni di Σ), percorso da corrente parallela al suo asse e distribuita uniformemente nella sua sezione.

Posto un sistema di assi cartesiani, con l'asse z parallelo all'asse del cilindro, siano x_0, y_0, x_1, y_1 le coordinate di due punti generici P_0 e P_1 della sezione Σ ; la distanza fra questi due punti sarà:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}. \quad (12.8.20)$$

Allora, per la (12.7.13), il coefficiente di mutua induzione fra le linee di corrente l ed l' (in questo caso segmenti paralleli all'asse del tubo) passanti rispettivamente per P_0 e P_1 :

$$\mathcal{M}(l, l') = \frac{\mu_o L}{2\pi} \left(\log \frac{2L}{d} - 1 \right) = \frac{\mu_o L}{2\pi} \left(\log \frac{2L}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} - 1 \right). \quad (12.8.21)$$

Ora, posto:

$$d\Sigma = dx_0 dy_0, \quad d\Sigma_1 = dx_1 dy_1 \quad (12.8.22)$$

($d\Sigma_1$ è il luogo dei punti P_1) si ha, dalla (12.8.19), la seguente espressione per l'autoinduzione del filo;

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_o L}{2\pi \Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma_1} \left(\log \frac{2L}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} - 1 \right) dx_0 dy_0, dx_1, dy_1 \quad (12.8.23)$$

Se ora, seguendo Maxwell, chiamiamo media distanza geometrica della sezione Σ il numero D definito nel seguente modo:

$$\log D = \frac{1}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma_1} \log \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} dx_0 dy_0 dx_1 dy_1, \quad (12.8.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\mu_0 L}{2\pi \Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma_1} \log 2L dx_0 dy_0 dx_1 dy_1 - \\ &- \frac{\mu_0 L}{2\pi \Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma_1} \log \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} dx_0 dy_0 dx_1 dy_1 - \\ &- \frac{\mu_0 L}{2\pi \Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma_1} dx_0 dy_0 dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (12.8.25)$$

ossia:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0 L}{2\pi \Sigma^2} \log 2L \Sigma^2 - \frac{\mu_0 L}{2\pi} \log D - \frac{\mu_0 L}{2\pi \Sigma^2} \Sigma^2 \quad (12.8.26)$$

In definitiva:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \left(\log \frac{2L}{D} - 1 \right). \quad (12.8.27)$$

Il problema consiste nel calcolare l'integrale (12.8.24). Per uniformarci alla trattazione di Sommerfeld¹⁾, la (12.8.24) la scriviamo nella seguente maniera:

$$\log \bar{\rho} = \frac{1}{q^2} \int dq_1 \int dq_2 \log \rho_{12} \quad (12.8.28)$$

avendo sostituito D con $\bar{\rho}$, Σ con q .

Maxwell chiama la quantità $\bar{\rho}$ qui introdotta la distanza geometrica media degli elementi dq_1 , dq_2 all'interno della sezione trasversale q .²⁾

Nel suo trattato Egli afferma che l'integrale (12.8.28) é la media aritmetica di tutti i valori di $\log \rho$ che si ottengono sulla nostra superficie q . Alla luce della relazione:

$$\Sigma \log \rho_i = \log \Pi \rho_i \quad (12.8.29)$$

questa media aritmetica dei logaritmi é allo stesso tempo il logaritmo della media geometrica di tutte le ρ_i .

Esso può essere determinato più elegantemente da una considerazione elettrostatica che dal diretto calcolo.

¹⁾ Arnold Sommerfeld: Electrodynamics Volume III - Academic Press 1952, pag. 108.

²⁾ Maxwell James Clerk: Trattato di Elettricità e Magnetismo - Classici UTET, 1973, Volume II, §691, pag. 451.

In termine di coordinate polari l'equazione bidimensionale del potenziale diventa:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (12.8.30)$$

A parte di una costante moltiplicativa e di una costante additiva la soluzione indipendente da ϕ , come dimostrato nel capitolo 3 (formula (3.4.1)), é il potenziale logaritmico:

$$\Phi = \log \rho \quad (12.8.31)$$

Questo significa, in due dimensioni, una carica negativa concentrata nel punto $\rho = 0$. Se la carica é distribuita su una superficie di area q con una densitá superficiale di carica f , e indicando con dq_2 un elemento di superficie di q , il teorema di Green comporta per il suo potenziale nel punto di riferimento l :

$$2\pi\Phi_1 = - \int_q f \log \rho_{12} dq_2. \quad (12.8.32)$$

Se, nell'equazione (12.8.32) poniamo $f = -2\pi$, otteniamo l'integrale interno della (12.8.28):

$$\Phi_1 = \int_q \log \rho_{12} dq_1 \quad (12.8.33)$$

e la nostra desiderata media geometrica di separazione può essere scritta:

$$\log \bar{\rho} = \frac{1}{q^2} \int \Phi_1 dq_1. \quad (12.8.34)$$

L'integrale (12.6.30) può essere prontemente risolto nel caso in cui q é un cerchio di raggio b ed il punto l coincide con il centro del cerchio. Noi allora abbiamo $\rho_{12} = \rho$, cioè eguale alle coordinate polari impiegate precedentemente e $dq_2 = \rho d\rho d\phi$. Denotiamo con Φ_0 il valore specifico corrispondente di Φ_1 . L'equazione (12.8.29) allora prende la forma:

$$\Phi_0 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^b \log \rho \rho d\rho \quad (12.8.35)$$

L'integrale rispetto a ρ può essere risolto per parti; cosí:

$$\int_0^b \log \rho \rho d\rho = \left[\frac{\rho^2}{2} \log \rho \right]_0^b - \int_0^b \frac{\rho}{2} d\rho = \frac{b^2}{2} \left(\log b - \frac{1}{2} \right). \quad (12.8.36)$$

Quindi la (12.8.34) si scrive:

$$\Phi_0 = \pi b^2 \left(\log b - \frac{1}{2} \right). \quad (12.8.37)$$

Inoltre Φ_1 , come il potenziale di una distribuzione superficiale nota, può essere calcolata per una posizione arbitraria del punto l direttamente dalla equazione di Poisson, che, in due dimensioni prende la forma:

$$\nabla^2 \Phi_1 = -f, \tag{12.8.38}$$

dove f è la densità superficiale. Nel nostro caso speciale ($f = -2\pi$), il cerchio q di raggio b , Φ_1 una funzione solo di ρ , essa diventa:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \right) = 2\pi \tag{12.8.39}$$

Integrando due volte:

$$\rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} = \pi \rho^2 + A, \implies \Phi_1 = \frac{\pi \rho^2}{2} + A \log \rho + B. \tag{12.8.40}$$

Affinché questa espressione per Φ_1 possa passare, per $\rho = 0$, nell'espressione (12.8.33) per Φ_0 , dobbiamo impostare:

$$A = 0, \quad B = \Phi_0, \quad \text{quindi} \quad \Phi_1 = \pi b^2 \left(\log b - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{b^2} \right). \tag{12.8.41}$$

Se noi sostituiamo questa espressione di Φ_1 nell'equazione (12.8.30) otteniamo:

$$\begin{aligned} \log \bar{\rho} &= \frac{1}{q} \int dq_1 \left(\log b - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2q} \int dq_1 \frac{\rho^2}{b^2} = \\ &= \log b - \frac{1}{2} + \frac{1}{b^4} \int_0^b \rho^3 d\rho = \log b - \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{12.8.42}$$

Per $\bar{\rho}$ otteniamo, quindi:

$$\bar{\rho} = e^{\left(\log b - \frac{1}{4} \right)} = e^{\log b} \cdot e^{-1/4} = b \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{e}}. \tag{12.8.43}$$

che è lo stesso risultato ottenuto da Maxwell.

Sostituendo nella (12.8.27) l'espressione di $\log D$ data dalla (12.8.42), si ottiene la espressione per il coefficiente di autoinduzione \mathcal{L} , ossia:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} (\log 2L - \log D - 1) = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \left(\log 2L - \log b + \frac{1}{4} - 1 \right) \tag{12.8.44}$$

In definitiva:

**Filo cilindrico
lungo L e di
raggio b**

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} L \left[\log \frac{2L}{b} - \frac{3}{4} \right].$$

**Formula
approssimata del
coefficiente di
autoinduzione** (12.8.45)

12.9 - Coefficiente di Autoinduzione di un filo rettilineo, secondo metodo¹⁾

Formule per i coefficienti di auto e mutue induttanze di fili rettilinei e rettangoli si trovano in vari libri e riviste, ma le loro dimostrazioni sono generalmente omesse e spesso le formule che sono approssimate vengono fornite come se fossero esatte. In particolar modo questo accade per il calcolo dei coefficienti relativi ai fili conduttori di forma rettilinea. L'importanza dello studio di questi conduttori é dovuta al fatto che nell'esperimento di Hertz relativo alla scoperta delle onde elettromagnetiche risulta determinante per il calcolo della frequenza emessa, il valore del coefficiente di autoinduzione di un conduttore di forma cilindrica.

In questo paragrafo abbiamo derivato le formule nel modo piú semplice possibile, utilizzando la legge di Biot e Savart nella forma differenziale invece di quella di Neumann, in quanto fornisce una migliore visione fisica dei vari problemi considerati. Questa legge, ovviamente, non é stata verificata sperimentalmente per circuiti non chiusi; ma l'autoinduttanza di un circuito aperto significa semplicemente la sua autoinduttanza come parte di un circuito chiuso, la cui induttanza totale non puó essere determinata finché non viene specificato l'intero circuito. In questo senso l'uso della legge di Biot e Savart per ottenere l'autoinduttanza di un circuito non chiuso é perfettamente legittima. Abbiamo anche mostrato come, mediante l'uso di alcune distanze medie aritmetiche oltre alla media geometrica distanze, la precisione di alcune formule puó essere aumentata.

Nelle seguenti dimostrazioni si presume il campo magnetico essere istantaneo; in altre parole, le dimensioni del circuito si presume siano abbastanza piccole e la frequenza della corrente lenta in modo che non sia necessario tener conto della finito velocità di propagazione del campo. Questo puó essere fatto anche quando il campo é integrato all'infinito.

¹⁾ Edward B. Rosa: The Self and Mutual Inductances of Linear Conductors - Bulletin of the Bureau of Standards. Vol. 4, No. 2, pp.301-344, 1908.

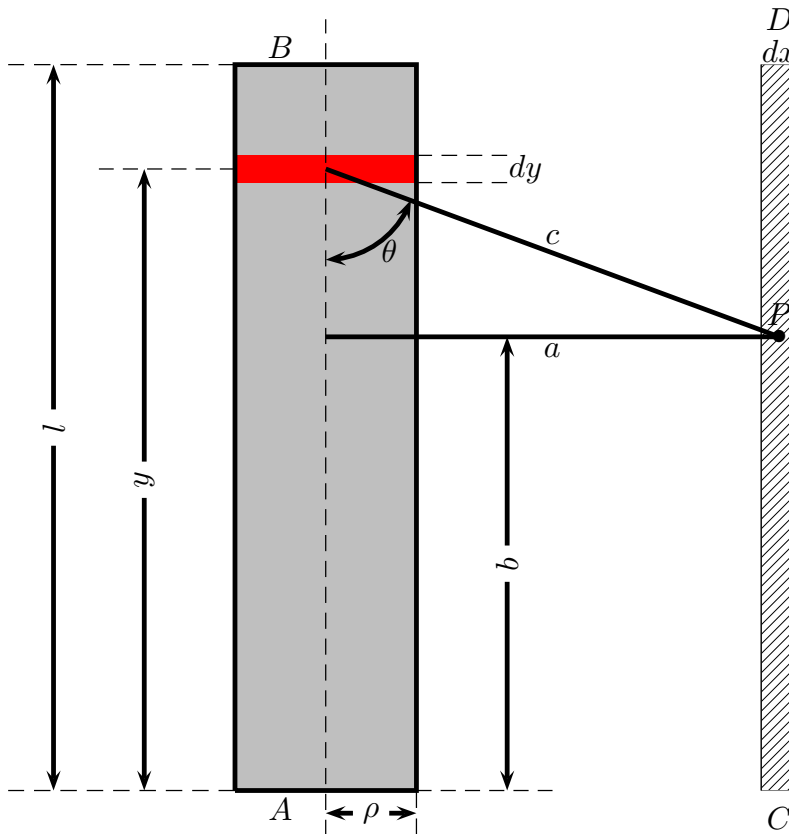


fig.12.9-1

Sia AB un tratto di filo cilindrico di raggio ρ e di lunghezza l attraversato da una corrente I distribuita uniformemente sulla sezione trasversale del filo. Su di esso si stacchi un elemento dy e si calcoli il suo contributo al vettore induzione magnetica nel punto P . Esso è ortogonale alla pagina ed il suo modulo vale (vedi formula 8.5.2):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dy}{c^2} \sin \theta \quad (12.9.1)$$

Dalla figura si ha:

$$a = c \sin \theta = \sqrt{a^2 + (y - b)^2} \sin \theta \quad (12.9.2)$$

ossia:

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (y - b)^2}} \quad (12.9.3)$$

Ne segue:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I dy \frac{a}{[a^2 + (y - b)^2]^{3/2}} \quad (12.9.4)$$

È facile mostrare che l'induzione magnetica in qualsiasi punto al di fuori di un cilindro retto è lo stesso come se la corrente fosse concentrata sull'asse del filo. Il campo B dovuto

all'intero filo, nel punto P esterno al filo, è allora:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^l \frac{a}{[a^2 + (y-b)^2]^{3/2}} dy \quad (12.9.5)$$

Per calcolare $\int_0^l \frac{a}{[a^2 + (y-b)^2]^{3/2}} dy$, poniamo $y-b = u$, da cui $dy = du$; quindi:

$$\int_0^l \frac{a}{[a^2 + (y-b)^2]^{3/2}} dy = \int_{-b}^{l-b} \frac{a}{[a^2 + u^2]^{3/2}} du \quad (12.9.6)$$

Risulta:¹⁾

$$\int_{-b}^{l-b} \frac{a}{[a^2 + u^2]^{3/2}} du = \frac{1}{a} \left[\frac{u}{(a^2 + u^2)^{1/2}} \right]_{-b}^{l-b} \quad (12.9.7)$$

In definitiva:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^l \frac{a}{[a^2 + (y-b)^2]^{3/2}} dy = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left\{ \frac{l-b}{a\sqrt{a^2 + (l-b)^2}} + \frac{b}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \right\} \quad (12.9.8)$$

Consideriamo, ora, un striscia CD larga dx e lunga l nella zona esterna contenente il punto P . Calcoliamo il flusso del vettore induzione magnetica attraverso tale striscia, ossia $\int \vec{B} \cdot \hat{n} dS$, essendo $dS = dbdx$. Si ha:

$$d\Phi_{ext} = \frac{\mu_0}{4\pi} Idx \int_0^l \frac{l-b}{a\sqrt{a^2 + (l-b)^2}} db + \frac{\mu_0}{4\pi} Idx \int_0^l \frac{b}{a\sqrt{a^2 + b^2}} db \quad (12.9.9)$$

Il primo integrale si risolve ponendo $l-b = u$ e, quindi, $db = -du$:²⁾

$$\int_0^l \frac{l-b}{a\sqrt{a^2 + (l-b)^2}} db = \int_0^l \frac{u}{a\sqrt{a^2 + u^2}} du = \frac{1}{a} \left[(u^2 + a^2)^{1/2} \right]_0^l = \frac{1}{a} \sqrt{l^2 + a^2} - 1 \quad (12.9.10)$$

Il secondo integrale è ²⁾:

$$\int_0^l \frac{b}{a\sqrt{a^2 + b^2}} db = \frac{1}{a} \left[\sqrt{a^2 + b^2} \right]_0^l = \frac{1}{a} \sqrt{l^2 + a^2} - 1 \quad (12.9.11)$$

¹⁾ Herbert Bristol Dwight: Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Fourth Edition, 1961, pag.50, n.200.03: $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} + c$.

²⁾ Herbert Bristol Dwight: Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Fourth Edition, 1961, pag.51, n.201.01: $\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = (x^2 + a^2)^{1/2} + c$.

In definitiva:

$$d\Phi_{ext} = \frac{\mu_0}{4\pi} I dx \left\{ \frac{2}{a} \sqrt{l^2 + a^2} - 2 \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2dx}{a} \left[\sqrt{l^2 + a^2} - a \right] \quad (12.9.12)$$

L'equazione (12.9.12) rappresenta il flusso del vettore induzione magnetica attraverso la striscia tratteggiata di figura 12.9-1.

Per avere il flusso totale esterno al filo bisogna integrare l'equazione (12.9.12) rispetto a x da $x = \rho$ a $x = \infty$. Così sostituendo a con x si ha:

$$\Phi_{ext} = \frac{\mu_0}{4\pi} I 2 \int_{\rho}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{l^2 + x^2}}{x} - 1 \right] dx \quad (12.9.13)$$

D'altra parte si ha:³⁾

$$\int_{\rho}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{l^2 + x^2}}{x} - 1 \right] dx = \left[\sqrt{x^2 + l^2} - l \log \frac{l + \sqrt{x^2 + l^2}}{x} - x \right]_{\rho}^{\infty} \quad (12.9.14)$$

Osserviamo subito che per $x \rightarrow \infty$ l'espressione contenuta all'interno delle parentesi quadre nell'equazione (12.9.14) tende a zero.

Infatti:

$$\text{Per } x \gg l \rightarrow \sqrt{x^2 + l^2} - x \simeq x - x = 0 \quad (12.9.15)$$

Analogamente:

$$\text{Per } x \gg l \rightarrow l \log \frac{l + \sqrt{x^2 + l^2}}{x} \simeq l \log \left[\frac{l}{x} + \frac{x}{x} \right] \simeq l \log 1 = 0 \quad (12.9.16)$$

Quindi:

$$\Phi_{ext} = \frac{\mu_0}{4\pi} I 2 \left[-\sqrt{\rho^2 + l^2} + l \log \frac{l + \sqrt{\rho^2 + l^2}}{\rho} + \rho \right] \quad (12.9.17)$$

Per $\rho \ll l$ la formula (12.9.17) si può così semplificare:

$$\Phi_{ext} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} I 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - 1 \right] \quad (12.9.18)$$

Da questa formula del flusso possiamo definire un coefficiente di autoinduzione esterno dalla formula $\Phi_{ext} = \mathcal{L}_1 I$; da cui

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - 1 \right]$$

Formula approssimata del coefficiente di autoinduzione esterno (12.9.19)

³⁾ Herbert Bristol Dwight: Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Fourth Edition, 1961, pag.57, n.241.01: $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \log \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + c.$

Dobbiamo ora trovare \mathcal{L}_2 ossia il coefficiente di autoinduzione dovuto al campo interno al filo.

La figura (12.9-2) rappresenta la sezione del filo:

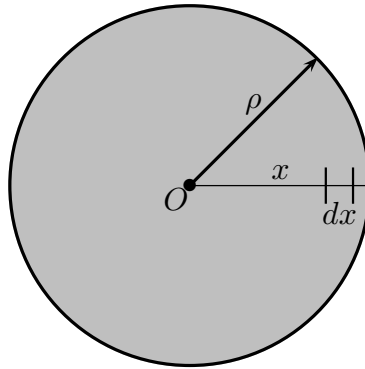


fig.12.9-2

Il campo di induzione magnetica nei punti interni al filo si può calcolare applicando il teorema di Ampère dato dall'equazione (9.1.35).

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (12.9.20)$$

Questa formula può essere usata per calcolare l'induzione magnetica in situazioni di particolare simmetria così come avviene all'interno del conduttore cilindrico in cui le linee di campo magnetico sono circolari. La corrente I che figura nella (12.9.20) è quella contenuta in un generico cilindro interno di raggio x . Si ha:

$$I_{int} = J\pi x^2 \quad \text{essendo} \quad J = \frac{I}{\pi \rho^2} \quad \text{ossia} \quad I_{int} = I \frac{x^2}{\rho^2} \quad (12.9.21)$$

Quindi:

$$\oint_{C_{int}} \vec{B}_{int} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \frac{x^2}{\rho^2} \quad (12.9.22)$$

Sviluppando, essendo B_{int} costante lungo il circuito di integrazione, si ha:

$$B_{int} 2\pi x = \mu_0 I \frac{x^2}{\rho^2}$$

L'intensità del campo di induzione magnetica all'interno del filo è:

$$B_{int} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I \frac{x}{\rho^2} \quad (12.9.23)$$

L'energia immagazzinata nel campo magnetico all'interno del conduttore cilindrico è:⁴⁾

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} d^3r \quad (12.9.24)$$

⁴⁾ S.Barbarino: Appunti di Campi elettromagnetici - Cap. I, pag.66, formula (1.15.43).

Sostituendo l'espressione (12.9.23), l'equazione (12.9.24) si scrive:

$$W_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 l \int_0^\rho \frac{x^2}{\rho^4} x dx = \frac{1}{4} \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 l \quad (12.9.25)$$

Poichè:

$$W_m = \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 I^2 = \frac{1}{4} \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 l \quad (12.9.26)$$

da cui:

$$\boxed{\mathcal{L}_2 = \frac{\mu_0 l}{4\pi \cdot 2}} \quad \text{Formula del coefficiente di autoinduzione interno} \quad (12.9.27)$$

Il coefficiente di autoinduzione totale è:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \quad (12.9.28)$$

Se consideriamo la formula approssimata (12.9.19) risulta:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - 1 \right] + \frac{\mu_0 l}{4\pi \cdot 2} \quad (12.9.29)$$

che si può scrivere:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - 1 + \frac{1}{4} \right] \quad (12.9.30)$$

In definitiva:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - \frac{3}{4} \right]} \quad \text{Formula approssimata del coefficiente di autoinduzione} \quad (12.9.31)$$

La formula (12.9.32) é importantissima. Essa è servita a Heinrich Rudolf Hertz per calcolare la frequenza di risonanza del circuito utilizzato per la generazione delle onde elettromagnetiche.

A titolo di esempio calcoliamo il coefficiente di autoinduzione di un filo cilindrico lungo 10 piedi (304.8 cm) e 2 mm di diametro ($\rho = 1 \text{ mm}$):⁵⁾

$$\mathcal{L} = 10^{-7} \cdot 2 \cdot 304.8 \cdot 10^{-2} \left[\log \frac{2 \cdot 304.8 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}} - \frac{3}{4} \right] = \underline{\underline{4.8557 \cdot 10^{-6} H}} \text{ (Henry)} \quad (12.9.32)$$

⁵⁾ Frederick W. Grover: Inductance Calculations - Dover Publications, 1973, pag. 36, Example 3.

Allo stesso modo calcoliamo il coefficiente di autoinduzione del filo utilizzato da Hertz; esso è lungo 150 cm ed ha un diametro di 5 mm.⁶⁾

$$\mathcal{L}_{Hertz} = 10^{-7} \cdot 2 \cdot 150 \cdot 10^{-2} \left[\log \frac{2 \cdot 150 \cdot 10^{-2}}{2.5 \cdot 10^{-3}} - \frac{3}{4} \right] = \underline{\underline{1.9020 \cdot 10^{-6} H}} = 1.9020 \mu H \quad (12.9.33)$$

Nell'ipotesi che il materiale conduttore abbia permeabilità magnetica relativa μ_r la formula del coefficiente di autoinduzione interno (12.9.27) deve essere moltiplicata per μ_r . Ne segue, in questo caso, che la formula del coefficiente di autoinduzione si scrive:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - 1 + \frac{\mu_r}{4} \right]. \quad \text{Formula approssimata del coefficiente di autoinduzione} \quad (12.9.34)$$

Questa formula fu originariamente data da Neumann.

Per conduttore cilindrico di spessore molto piccolo o per correnti alternate di frequenza molto alta ossia che essa giace solo nello strato esterno del conduttore, quando non vi è campo magnetico all'interno del filo, il coefficiente di autoinduzione invece delle formule (12.9.33) e (12.9.34) si scrive:

Nel caso di alta frequenza

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - 1 \right]. \quad \text{Formula approssimata del coefficiente di autoinduzione} \quad (12.9.35)$$

⁶⁾ Heinrich Rudolf Hertz: Electric Waves - Dover Publications, 1962, pag. 50 e pag. 51.

12.10 - Bobina ad Induzione^{1),2)}

Una importantissima applicazione del fenomeno dell'induzione elettromagnetica che ha rivoluzionato la fisica e l'ingegneria elettrica dalla metà del secolo diciannovesimo in poi e che ha trovato utilizzazione in esperienze svariatissime, in particolare nella produzione delle onde elettromagnetiche utilizzate nella telegrafia senza filo alla fine del diciannovesimo secolo fino agli inizi del ventesimo, é la cosiddetta **bobina ad induzione** qualche volta chiamata **bobina o rocchetto di Ruhmkorff (Heinrich Daniel)** (Hannover, 15 Gennaio 1803 - Parigi, 20 Dicembre 1877), dal nome del primo costruttore che l'ha realizzata nel 1851.

Poiché é un apparecchio funzionante per induzione elettromagnetica, ci sembra questo il luogo adatto per darne una descrizione sommaria.

Il primo modello di macchina ad induzione di questo tipo fu concepito e realizzato da un prete irlandese, **Nicholas J. Callan**, nel 1837, dopo aver studiato presso l'Università La Sapienza di Roma, periodo in cui ebbe modo di conoscere i lavori di Galvani e Volta. La comunità scientifica non diede alcun peso all'invenzione, che pur pubblicata finí nel dimenticatoio

La bobina ad induzione si compone di due avvolgimenti, detti *primario e secondario*, aventi un nucleo di ferro dolce (per es. lega di ferro con 3-4% di Silicio - facilmente magnetizzabile e smagnetizzabile) in comune (vedi figure 12.10-1 e 12.10-2). **Il nucleo viene magnetizzato inviando nel circuito primario una corrente continua; un interruttore la taglia bruscamente: il nucleo si smagnetizza, e la variazione del flusso dell'induzione magnetica produce nel secondario una f.e.m. che può essere considerevole, se la variazione é molto brusca ed il numero delle spire secondarie molto grande.**

Il nucleo é costituito da un fascio di fili di ferro dolce, isolati gli uni dagli altri mediante vernice: bisogna infatti evitare la produzione di correnti di Foucault, che riscalderebbero il nucleo e rallenterebbero la diminuzione del flusso dell'induzione magnetica.

Il circuito primario é avvolto attorno al nucleo; la sua autoinduttanza é molto bassa in modo tale che la corrente si stabilizzi rapidamente, e che si possa pertanto mettere in gioco una piú grande potenza per il crescente numero di interruzioni. Esso comporta un numero ristretto di spire, qualche centinaia al massimo, nelle quali deve passare una corrente molto intensa per magnetizzare fortemente il nucleo; il filo che lo costituisce é del grosso filo di rame, da due a tre millimetri di diametro; la sua resistenza totale é dell'ordine di una frazione di Ohm, e si possono farvi passare, senza riscaldamento esagerato, delle correnti raggiungendo, per le bobine potenti, diverse decine di ampere.

Il circuito secondario é avvolto attorno al circuito primario; esso può comprendere un numero di spire dell'ordine di 10000, di lunghezza di decine di chilometro di filo; é costituito da filo di rame fine, da uno a due decimi di millimetro di diametro, e la sua resistenza può essere di piú decine di migliaia di Ohm. La principale difficoltà di costruzione proviene dalla necessità di realizzare fra le differenti spire un isolamento sufficiente.

1) G. Bruhat: Cours de Physique generale, Electricité - Masson Editeurs, 1967

2) Augusto Righi e Bernardo Dessau: La Telegrafia senza filo - Zanichelli, Bologna, 1903.

Negli avvolgimenti ordinari, si avvolge uno strato di filo da una estremitá all'altra della bobina, e poi si ritorna indietro; la spira che termina il secondo strato é avvolta direttamente al di sopra della prima spira del primo strato, mentre essa é separata, nel circuito, da tutte le spire contenute nei due strati. Durante l'interruzione del circuito primario, esiste fra queste due spire una differenza di potenziale eguale alla somma di tutte le f.e.m. indotte nelle spire intermedie; essa é molto piú grande se la bobina é piú lunga, e puó essere sufficiente a perforare l'isolante che circonda il filo., Nelle bobine potenti, si assicura l'isolamento avvolgendo il secondario in bobine corte disposte le une in seguito alle altre; esse sono separate da pareti isolanti sufficientemente spesse per sopportare la differenza di potenziale che puó esistere fra due bobine vicine; esse sono egualmente attentamente isolate dal primario (non mostrate nelle figure).

Interruttore

Come si puó notare sul lato destro nelle figure, vi é disegnato un apparecchio interruttore, che serve, cioé, a produrre automaticamente le interruzioni del circuito induttore. Ve ne sono di piú specie, ma basterá qui far conoscere quello iniziale e, a nostro avviso, il piú schematico.

L'interruttore a martello oscillante é il piú semplice, e consiste in una disposizione affatto simile a quella conosciutissima di una soneria elettrica, salvo le dimensioni del martello o áncora di ferro e dei pezzi di contatto, le quali variano in certo modo in proporzione di quelle del rocchetto, e salvo la maggior accuratezza di costruzione. Nella sua posizione di riposo il martello di ferro posto a poca distanza da una delle estremitá del fascio di fili di ferro, tocca un pezzo metallico fisso, e la corrente, che passa nel filo induttore del rocchetto, é obbligata ad attraversare la superficie di contatto, ossia, **il circuito é chiuso.**

Senonché, magnetizzandosi il fascio di fili, esso attrae il martelletto, ciò che ha per conseguenza il distacco fra questa ed il suddetto pezzo fisso.

La corrente resta cosí interrotta, cala rapidamente la magnetizzazione del ferro, ed il martelletto ristabilisce il contatto, dopo di che le stesse vicende si riproducono indefinitamente. Il martelletto assume dunque un moto vibratorio, il cui periodo dipende dalle sue dimensioni, accompagnato da interruzioni della corrente con lo stesso periodo.

Affinché il contatto metallico si stabilisca senza ritardo, e onde togliere alcuni altri inconvenienti, si rivestono di platino le parti che devono toccarsi. Una versione in miniatura del rocchetto completa di interruttore (o ruttore) (anche se le vecchie punte platiniate sono sostituite da circuiti elettronici) e di condensatore, é ancora oggi presente nelle nostre automobili con il nome di 'spinterogeno'.

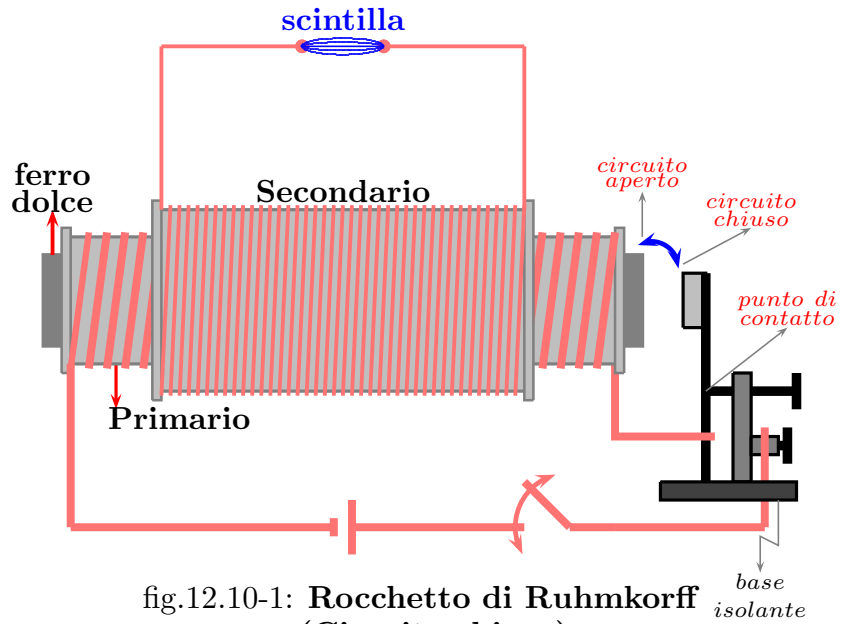


fig.12.10-1: Rocchetto di Ruhmkorff (Circuito chiuso)

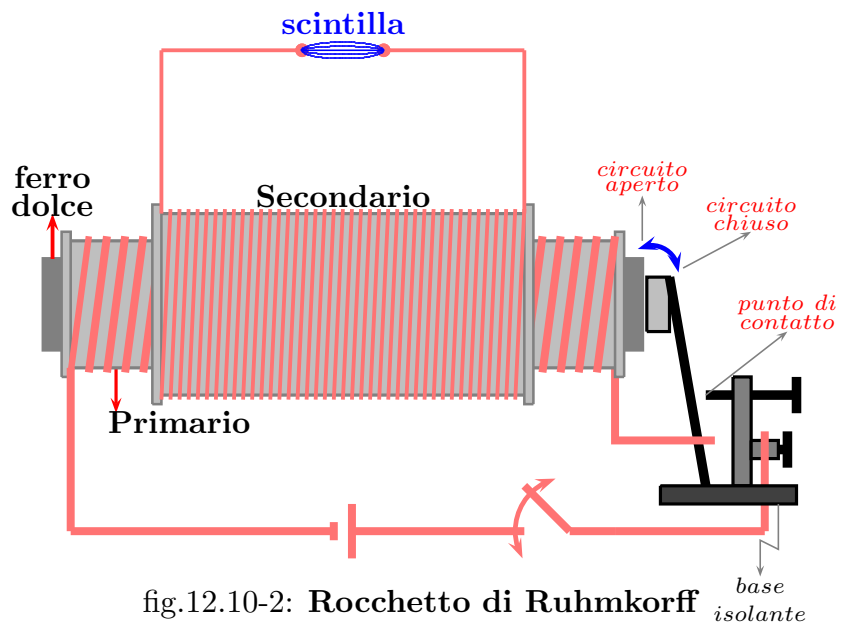


fig.12.10-2: Rocchetto di Ruhmkorff (Circuito aperto)

Intensità di corrente nel circuito primario

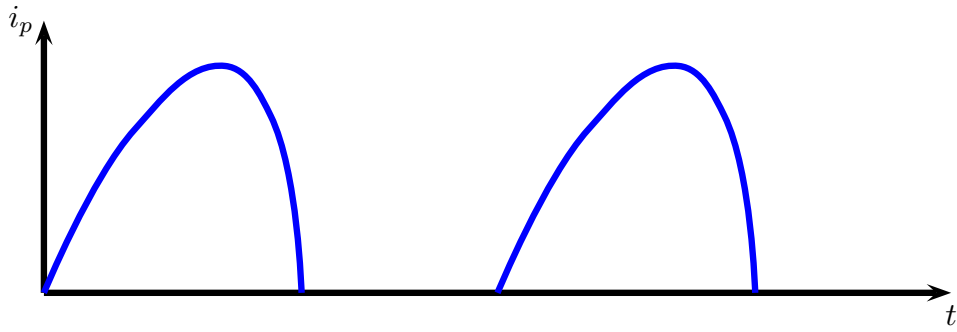


fig.12.10-3

Alta tensione nel circuito secondario



fig.12.10-4

12.11 - Dinamo omopolare a disco di Faraday

Un'altra importantissima applicazione delle leggi di Faraday che é stata anche un Suo esperimento é la generazione di corrente per mezzo di una dinamo omopolare.

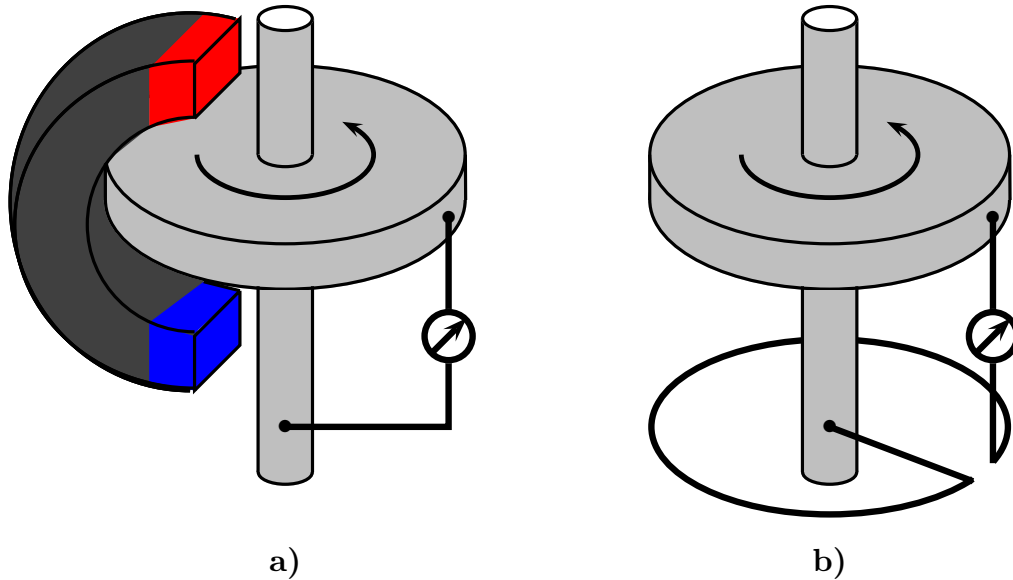


fig.12.11-1

Consideriamo un disco conduttore che ruota attorno al proprio asse in presenza di un campo di induzione magnetica **uniforme o no**. Una differenza di potenziale esiste, allora, fra l'asse e l'orlo del disco, facendo scorrere una corrente elettrica se questi sono connessi da un filo.

Michael Faraday fece ruotare un disco di rame tra i poli di un magnete e osservó una corrente elettrica scorrente attraverso un filo collegato tra due diversi punti del disco, per mezzo di contatti striscianti, in particolare fra l'asse e l'orlo del disco come in figura 12.11-1 a).

Da allora, ci sono stati molti tentativi di sviluppare pratiche macchine su questo principio omopolare, chiamato cosí perché il disco si muove continuamente fra la stessa coppia di poli.

La carica libera presente nel disco é sottoposta, quindi, ad una velocità diretta lungo la tangente alle circonferenze costituenti il disco. Conseguentemente esisterá un campo elettrico

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (12.11.1)$$

Supponiamo, adesso, B uniforme e diretto lungo l'asse del disco che assumiamo essere l'asse z di un sistema di riferimento.

Scriviamo l'equazione (12.11.1) in coordinate cilindriche:

$$E_\rho \hat{e}_\rho + E_\phi \hat{e}_\phi + E_z \hat{z} = (v_\rho \hat{e}_\rho + v_\phi \hat{e}_\phi + v_z \hat{z}) \times B_z \hat{z} \quad (12.11.2)$$

Poiché:

$$\vec{v} = v_\phi \hat{e}_\phi \quad (12.11.3)$$

il secondo membro della (12.11.2) si scrive:

$$v_\phi \hat{e}_\phi \times B_z \hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{z} \\ 0 & v_\phi & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \hat{e}_\rho v_\phi B_z \quad (12.11.4)$$

Quindi sugli elettroni liberi nel disco esiste un campo elettrico radiale:

$$E_\rho = v_\phi B_z \quad (12.11.5)$$

Poiché:

$$v_\phi = \omega \rho \quad (12.11.6)$$

essendo ω la velocità angolare di rotazione del disco, si ha, infine

$$E_\rho = \omega \rho B_z \quad (12.11.7)$$

La f.e.m fra il centro del disco ed il suo bordo é:

$$\epsilon = \int_0^a E_\rho d\rho = \int_0^a \omega \rho B_z d\rho = \frac{1}{2} \omega a^2 B_z \quad (12.11.8)$$

essendo a il raggio del disco.

Nella figura (12.11-1 b) si é aggiunta una spira collegata come in figura. Una volta che passa la corrente nel circuito di figura (12.11-1 a) si toglie il magnete che ha iniziato il processo e lo stesso continua con il campo magnetico generato dalla spira. Questo dispositivo prende il nome di **dinamo ad autoeccitazione**.

12.12 - Corrente di spostamento ed equazioni di Maxwell

Le leggi fondamentali dei fenomeni elettrici e magnetici che abbiamo discusso finora sono, come abbiamo già visto caso per caso, riassunte nelle seguenti quattro equazioni differenziali vettoriali:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{Legge di Coulomb} \quad (12.12.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \text{Legge di Ampere } (\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0) \quad (12.12.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Legge di Faraday} \quad (12.12.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Inesistenza di poli magnetici liberi} \quad (12.12.4)$$

Queste equazioni, la cui validità è assicurata anche in presenza di materia, sono state ricavate da osservazioni eseguite in condizioni stazionarie ad esclusione della legge di Faraday. Infatti la (12.12.2) non è compatibile con fenomeni non stazionari per i quali è:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (12.12.5)$$

Questo si può verificare calcolando la divergenza dei due membri della (12.12.2); infatti:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (12.12.6)$$

Il primo membro è sempre nullo, mentre la relazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ è solo un caso particolare della relazione di continuità fra cariche e correnti (12.12.5):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (12.12.7)$$

È stato necessario il genio di **J.C. Maxwell**, stimolato dalle osservazioni di Faraday per identificare la contraddizione insita nel sistema (12.12.1) ÷ (12.12.4) e modificare le equazioni trasformandole in un sistema completamente coerente, che permette di prevedere fenomeni fisici nuovi, sconosciuti a quel tempo, ma che furono poi verificate sperimentalmente in tutti i dettagli. Per questo brillante successo, raggiunto nel 1865, il sistema di equazioni modificato è giustamente designato e conosciuto col nome di **equazioni di Maxwell**. Poiché l'equazione difettosa è la legge di Ampere, Maxwell aggiunse ad essa il termine

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (12.12.8)$$

ottenendo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (12.12.9)$$

Risulta evidente che la (12.12.9) é compatibile con l'equazione di continuitá, infatti applicando ad essa scalarmente l'operatore $\vec{\nabla}$ si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (12.12.10)$$

Il primo membro é ovviamente nullo cosí come il secondo membro; infatti cambiando di posto gli operatori $\vec{\nabla}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$, il secondo termine del secondo membro della (12.12.10) si puó scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

che per la (12.12.1) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

Ne segue, quindi, che la (12.12.10) diventa:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (12.12.11)$$

Maxwell chiamó **corrente di spostamento** il termine aggiuntivo (12.12.8) nella equazione (12.12.2). Questo termine aggiuntivo diventa di importanza fondamentale quando i campi oscillano rapidamente nel tempo. Senza di esso **non esisterebbe la radiazione elettromagnetica**.

Il sistema di quattro equazioni:

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$		(12.12.12)
$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$		(12.12.13)
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$		(12.12.14)
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$		(12.12.15)

Equazioni

di

Maxwell

note come **equazioni di Maxwell** costituisce la base di tutti i fenomeni elettromagnetici classici. Combinate con la formula della forza di Lorentz e la seconda legge del moto di Newton, esse forniscono una descrizione completa della dinamica classica delle interazioni fra le particelle cariche e i campi elettromagnetici.

12.13 - Dalle equazioni di Maxwell alla teoria dei Circuiti¹⁾

É istruttivo mostrare che la teoria dei circuiti é un caso molto speciale della teoria del campo elettromagnetico. Per dirlo in un altro modo, le equazioni della teoria dei circuiti sono le equazioni di Maxwell riadattate in forme piú applicabili. Ciò non implica che si debba iniziare con le equazioni di Maxwell per risolvere un problema di circuito. Ciò che intendiamo mostrare qui é da dove provengono le equazioni di circuito e, in particolare, quale ipotesi deve essere fatta affinché queste equazioni siano valide. per risolvere un problema di circuito

Consideriamo innanzitutto la geometria piuttosto semplice della figura 12.13-1. Una sorgente dipendente dal tempo é applicata ai terminali nella forma dipendente dal tempo. Ci si aspetterebbe un qualche tipo di corrente su e all'interno del conduttore di conducibilitá finita. Un campo elettrico interno sará necessario per supportare questa corrente.

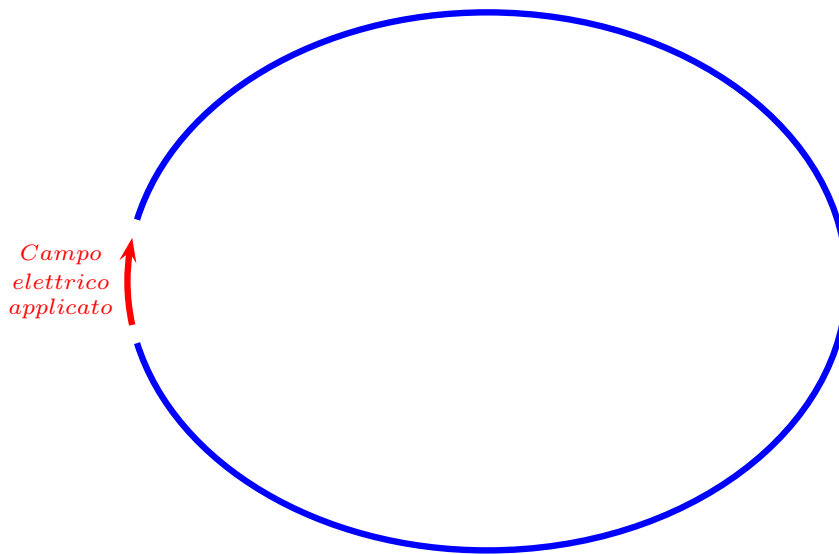


fig.12.13-1

Un certo tipo di autoinduttanza distribuita non uniforme, sia interna che esterna, sarebbe associata a questa geometria. Inoltre, ci si aspetterebbe una resistenza non uniforme (nel senso dc). Se le dimensioni lineari della geometria sono apprezzabili rispetto alla lunghezza d'onda ($\lambda = \frac{c}{\nu} = (\nu\sqrt{\mu\epsilon})^{-1}$), si verificherebbero fenomeni di radiazione introducendo ulteriori complicazioni. Sicuramente esiteremmo a chiamare questa geometria un circuito. Il meglio che potremmo fare, e questo solo per la variazione del tempo sinusoidale, sarebbe associare una resistenza e reattanza (induttiva o capacitiva?) o impedenza, ai terminali pilotati o "input". Qualsiasi sviluppo teorico oltre le equazioni di partenza dipenderebbe da una bella geometria semplice.

Il paragrafo precedente dipinge un quadro piuttosto desolante. In realt, molte delle difficult incontrate possono essere superate se i presupposti della certina possono essere

¹⁾ Herbert P. Neff, jr.: Introductory Electromagnetics - John Wiley & Sons, 1991, pag.162.

giustificati Innanzitutto, e fondamentalmente, consideriamo solo i caases per i quali le dimensioni lineari della geometria sono piccole rispetto a $\left(\lambda = \frac{c}{\nu} = (\nu\sqrt{\mu\epsilon})^{-1}\right)$. In altre parole, la geometria é piccola fisicamente, o la frequenzaa é bassa, o entrambe. Questo essenzialmente elimina la radiazione. Adesso cerchiamo di investigare la geometria di figura 12.13-2, che certamente sembra un 'circuito'. Supponiamo che i conduttori di interconnessione siano filamentososi ovunque, ad eccezione del piccolo cilindro con perdita di conduttività σ e delle piastre dell'area s_c . Quest'ultimo requisito elimina gli effetti interni ad eccezione del cilindro con perdita e la regione tra le piastre. le dimensioni sono indicate nella figura 8.12-2. Lascia che sia applicato un campo elettrico dipendente dal tempo da una sorgente completamente indipendente sul terminale a-b. Questo é l'"input".

CIRCUITO RLC SERIE

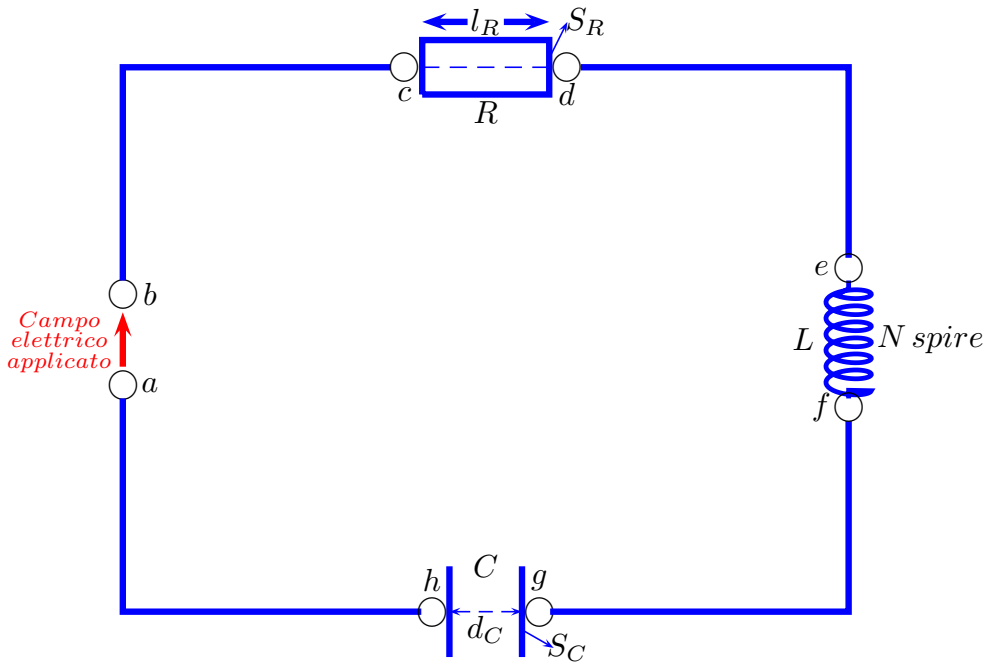


fig.12.13-2

Valutiamo la circuitazione del campo elettrico attorno al cammino chiuso l , definito dai conduttori filiformi e dalle linee tratteggiate. La legge di Faraday é:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}. \quad (12.13.1)$$

Consideriamo il lato sinistro dell'equazione (12.13.1) e facciamo ulteriori ipotesi che sembrano necessarie. I terminali a-b sono molto vicini in modo che l'unico effetto qui sia quello prodotto dal campo applicato, e

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -v_{ba}. \quad (12.13.2)$$

v_{ba} é chiamata tensione applicata fra i punti b e a nella teoria dei circuiti.

Supponiamo ora che il conduttore filiforme é perfettamente conduttore o che la conducibilitá é abbastanza grande cosicché $\vec{\mathcal{E}}$ trascurabile lungo il cammino di integrazione. In questo caso, noi abbiamo:

$$\int_b^c \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \int_d^e \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \int_e^f \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \int_f^g \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \int_h^a \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (12.13.3)$$

Notiamo in particolare che l'integrale di linea, da e a f, attorno all'elica é zero. Ora, attraverso la resistenza, ricordando che $\vec{\mathcal{J}} = \sigma \vec{\mathcal{E}}$, noi abbiamo:

$$\int_c^d \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \int_c^d \frac{\vec{\mathcal{J}}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \frac{\vec{\mathcal{J}}}{\sigma} \int_c^d d\vec{l} = \frac{i l_R}{\sigma S_R} = iR \quad (12.13.4)$$

dove σ ed $\vec{\mathcal{E}}$ sono assunti uniformi nel materiale con perdite. R é la resistenza del cilindro che dissipa. Noi abbiamo assunto assenza di corrente di spostamento nel materiale con perdite. Nella regione fra le armature del condensatore, assumiamo nessuna corrente di conduzione. La corrente che fluisce fra le armature é interamente corrente di spostamento, ma essa deve eguagliare (come abbiamo visto prima) la corrente di conduzione nel materiale con perdite. Allora:

$$\int_g^h \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \int_g^h \frac{\vec{\mathcal{D}}}{\epsilon} \cdot d\vec{l} = \frac{\vec{\mathcal{D}}}{\epsilon} \int_g^h d\vec{l} = \frac{\rho_S S_c}{\epsilon S_c} d_c = \frac{q}{C} \quad (12.13.5)$$

dove C é la capacitá 'statica' (dipendente dalla geometria). La corrente puó essere correlata alla carica, perché questa corrente, che scorre a sinistra lontano dal terminale h , deve essere uguale alla frequenza temporale dell'aumento della carica in h (fuori dalla piastra). Cosí:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad o \quad q = \int idt + Q_0 \quad (12.13.6)$$

Notiamo che la stessa corrente (dq/dt) scorre nel terminale g (fuori la piastra). Questo ultimo risultato dovrebbe essere confrontato con l'equazione (3.5). Finalmente noi abbiamo:

$$\int_g^h \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{C} \int idt + \frac{Q}{C} \quad (12.13.7)$$

e

$$\oint_l \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = -v_{ba} + iR + \frac{1}{C} \int idt + \frac{Q}{C} = -\frac{d}{dt} \int \int_S \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{S}. \quad (12.13.8)$$

Ci rimane il lato destro che contiene un integrale di superficie. La superficie S é molto complicata poiché é quella superficie delimitata dal percorso l , ma almeno é fissa nel tempo. É ragionevole trascurare il flusso che collega sempre la superficie aperta, tranne

che attraverso la bobina con N spire, poiché il campo magnetico che passa attraverso la bobina é molto pi grande che in qualsiasi altro posto. Cosí:

$$-\frac{d}{dt} \int \int_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\psi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} (Li) = -L \frac{di}{dt}, \quad (12.13.9)$$

poiché L é l'induttanza esterna, determinata solo dalla geometria della bobina fissa. Il risultato finale é:

$$-v_{ba} + iR + \frac{1}{C} \int idt + \frac{Q_0}{C} = -L \frac{di}{dt} \quad (12.13.10)$$

o

$$v_{ba} = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt + \frac{Q_0}{C} \quad (12.13.11)$$

un risultato ben conosciuto. É ovvio dallo sviluppo che abbiamo un R, L e C concentrati che formano il nostro circuito, e la legge di Faraday ha portato alla legge sulla tensione di Kirchhoff.

In simile modo, puó essere mostrata la conservazione della carica; l'equazione (12.13.11) conduce alla legge delle correnti di Kirchhoff. É estremamente importante ricordare il grande numero di ipotesi fatti inn questo sviluppo. Riassumendo, esse sono:

- 1) Tutte le dimensioni lineari sono molto minori di $(\nu\sqrt{\mu\epsilon})^{-1}$.
- 2) Viene impiegato un cammino filiforme.
- 3) Conduttori perfetti esistono ovunque nel circuito tranne nel gap di ingresso, fra le armature del condnnsatore, e fra i terminali del resistore.
- 4) La corrente di spostamento é confinata nel capacitore.
- 5) Il flusso magnetico é confinato nell'induttore.
- 69 La geometria é fissa nel tempo.

Queste restrizioni possono essere in qualche modo allentate solo dopo aver acquisito una notevole esperienza con i casi piú semplici.

Appendice al Cap. 12

12A.1 - Breve biografia di Michael Faraday^{1) 2) 3) 4)}

Michael Faraday nacque il 22 Settembre 1791 a Newington Butts, Surrey, un antico borgo, ora una zona del distretto londinese di Southwark. Egli era il terzo figlio di James and Margaret Faraday che erano da poco emigrati a London dal piccolo villaggio di Clapham nello Yorkshire. Suo padre era fabbro e apparteneva ad una piccola setta di Cristianità chiamata dei Sandemani (una setta cristiana fondamentalista che praticava una forma di cristianesimo primitivo - fondata in Scozia agli inizi del XVIII secolo da John Glas, già ministro presbiteriano, e modificata dal genero Robert Sandeman), sua madre era figlia di un contadino di Mallerstang e faceva la domestica prima di venire a London. Michael ricevette poca scolarizzazione. Da bambino frequenta una comune scuola dove Egli apprende i rudimenti di lettura, scrittura e aritmetica. Nel 1804, all'età di 13 anni, inizia a compiere commissioni per George Riebau, un rilegatore di libri emigrato dalla Francia. Il 7 ottobre 1805 Faraday comincia un apprendistato come rilegatore di libri sempre da George Riebau, che gestisce una libreria a 2, Blandford street. Durante i suoi sette anni di apprendistato, sviluppa un prevalente interesse per le scienze, trascorrendo il tempo dopo le ore di lavoro a leggere i libri che rilegava. Uno di questi fu una copia dell'Enciclopedia Britannica, terza edizione del 1797, dove ebbe l'occasione di scorrere l'articolo del chimico ribelle James Tytler sull'elettricità, un argomento che catturò subito la sua attenzione. Rilegò, inoltre, e lesse le 'Conversazioni sulla Chimica' di Jane Marcet, la moglie di un medico svizzero, che aveva pubblicaato il suo libro nel 1809 per l'Uditorio creato da Humphry Davy. In 1809 inizia a tenere un 'miscellanea filosofica' dove registra ciò che legge e comincia ad eseguire gli esperimenti che può nel retro del negozio. Nel 1810 Faraday comincia a partecipare alle riunioni del City Philosophical Society e a conferenze su argomenti scientifici tra cui l'elettricità tenuta da John Tatum, e a prendere appunti attenti e vincolanti. Il 30 Ottobre 1810 muore suo padre. Fra il mese di Febbraio e il mese di Aprile del 1812 Egli ha assistito alle ultime quattro conferenze del Prof. Davy, alla Royal Institution, che aveva visto i suoi appunti delle lezioni di Tatum. Anche in questo caso prende appunti attento e li rilega in un libro. Il 12 luglio 1812 Faraday scompone il solfato di magnesio. Il 7 Ottobre 1812 finisce il suo apprendistato e si impiega come rilegatore di libri da Henri De La Roche. Nel mese di Dicembre del 1812 Faraday invia una lettera e le sue note delle lezioni a Davy. La risposta di Davy, datata la vigilia di Natale é 'gentile e favorevole'. Nel 1813 Faraday é invitato per un colloquio con Davy, ma non esiste attualmente alcuna posizione disponibile presso il Royal Institution. Poche settimane dopo l'assistente di laboratorio si dimette. Il primo Marzo del 1813 Davy suggerisce il nome di Faraday per questo posto recentemente disponibile.

¹⁾ Bern Dibner: The Founding Fathers of the Electrical Science - VIII Michael Faraday and the discovery of electromagnetic induction - Electrical Engineering, November 1954.

²⁾ The Royal Institution - Science Lives Here - Interactive Timeline: Michael Faraday.

³⁾ John Meurig Thomas: Michael Faraday. La Storia romantica di un genio - Firenze University Press, 2006.

⁴⁾ Ian Glynn: La scienza elegante Edizioni Dedalo, 2012.

Il 13 Ottobre del 1813 Davy invita Faraday ad accompagnarlo in un tour del continente come suo assistente. Faraday accetta di accompagnarlo. Nel mese di Giugno del 1814 Davy e Faraday in viaggio attraverso l'Italia incontrano Alessandro Volta a Milano. Il 17 Aprile del 1815 Davy interrompe il suo tour del continente in seguito alla fuga di Napoleone dall'isola d'Elba e ritorna in Inghilterra. Il 15 Maggio del 1815 viene riconfermato al suo posto come assistente di laboratorio presso il Royal Institution. Faraday cominciò a lavorare alla Royal Institution in London come assistente di laboratorio di Humphry Davy, un eccezionale chimico e sperimentatore elettrico di quel tempo. Attraverso Davy, Faraday incontrava importanti scienziati d'Inghilterra e del Continente, inclusi Ampere, Count Rumford e Volta. Al Royal Institution Faraday visse e sperimentò in Chimica e in Elettrocità. Una serie di conferenze e dimostrazioni davanti ad un pubblico illustre, tra cui reali, ha portato il lavoro di questi sperimentatori di fronte alla rapida espansione del mondo della scienza.

Dal 1818 al 1822 Faraday lavora su un progetto per migliorare la qualità delle leghe di acciaio. Il 21 Maggio del 1821 viene nominato Sovrintendente della Casa della Royal Institution. Il 2 Giugno del 1821 sposa Sarah Barnard e poche settimane più tardi fa la sua confessione di fede nella Chiesa Sandemaniana. Il 3 Settembre 1821 scopre la rotazione elettromagnetica (che può essere vista come il principio alla base del motore elettrico). Il 6 marzo 1823 liquefa un gas (cloro) per la prima volta. L'otto Gennaio del 1824 fu eletto Fellow della Royal Society; poco dopo diventa segretario del Club Ateneo. Inizia il lavoro per l'articolazione della Royal Society e del Consiglio di comitato Longitudine per migliorare il vetro ottico.

Gli esperimenti elettrici di Faraday cominciarono a ricevere attenzione nel 1821 quando Egli dimostrò la rotazione elettromagnetica, in cui il flusso di corrente elettrica causava un magnete a ruotare attorno ad un filo percorso da corrente o un filo percorso da corrente a ruotare attorno ad un magnete fisso. I moti continuano fintanto che la corrente continuava a fluire. Egli poi riuscì a porre un filo percorso da corrente in equilibrio in presenza del solo campo magnetico terrestre. Da allora in poi per dieci anni, Faraday si interessò al problema di convertire la forza magnetica in qualche forma di forza elettrica. Egli studiò intensamente che cosa altri sperimentatori avevano compiuto e, in particolare, il fenomeno dell'induzione elettrostatica. Quattro volte in questi dieci anni Faraday si era applicato alla specifica ricerca della generazione magnetoelettrica, con nessun risultato.

Nell'estate del 1831 cominciò un quinto tentativo per risolvere il problema. Egli prese un anello di ferro dolce (per es. lega di ferro con 3-4% di Silicio - facilmente magnetizzabile e smagnetizzabile) di circa 6 pollici di diametro (circa 15.24 cm) e avvolse una bobina di filo di rame su un lato dell'anello ed una seconda bobina sull'altro lato. Successivamente pose un ago magnetico ad una breve distanza dall'anello in prossimità della prima bobina; una batteria fu connessa alla seconda bobina. Nell'istante della connessione l'ago magnetico si mosse e si mise in equilibrio; quando la batteria fu disconnessa il moto dell'ago si ripeté nella direzione opposta.

Egli verificò la vera natura *magnetica* della corrente prodotta sostituendo un anello di rame al posto del ferro e osservando un piccolo moto. Faraday allora avvolse una bobina di 220 piedi di filo (circa 67.1 m) su un solenoide e connesse i suoi estremi ad un galvanometro. Quando Egli immerse una barra cilindrica magnetizzata nella bobina l'ago

del galvanometro si mosse; quando Egli la tolse, l'ago si mosse in direzione opposta. Egli quindi concluse che era il moto relativo fra la barra magnetizzata e la bobina che aveva indotto la corrente elettrica.

Seguendo lo spunto stabilito dalla momentanea generazione di un impulso elettrico da una sorgente magnetica, il 28 Ottobre 1831, Faraday completó l'insieme di una macchina elettrica consistente di un grande magnete della Royal Society fra i cui poli Egli montó un disco di rame di 12 pollici di diametro (circa 30.48 cm) su un asse terminante con una manovella. Sul disco c'erano due strisce, una sull'asse e l'altra sul bordo del disco, e queste strisce erano collegate ad un galvanometro. L'asse ed il bordo del disco dove c'era il contatto con le strisce erano trattate con amalgama. Quando Faraday faceva ruotare il disco con la manovella, il galvanometro mostrava una deflessione; quando Egli invertiva il verso di rotazione la deflessione avveniva in verso opposto. Faraday visualizzò il suo disco che *'tagliava'* le linee di campo magnetico che fluivano da polo a polo del grande magnete. Poté dimostrare queste linee mettendo limatura di ferro nel percorso tra un polo e l'altro. Quando Egli sostituí il disco con un filo che muoveva attraverso il campo magnetico, seguirono gli stessi risultati.

Egli trascorse dieci giorni di intensa attività sperimentale per accertare la natura dell'elettricità così prodotta e, finalmente, alla fine di Novembre annunciò la sua piú importante scoperta davanti alla Royal Society. L'elettricità finalmente é stata prodotta dal magnetismo. Questa scoperta fu formulata in un articolo pubblicato sotto il titolo "Experimental Researches in Electricity" ed fu il primo di una serie di 29 che continuó fino al 1852, annunciando i molti contributi di Faraday alla Scienza che Egli ha aiutato a fondare.

Dopo il maggiore contributo di Faraday, vi fu la scoperta delle correnti autoindotte, la polarità nei corpi diamagnetici, linee e campi di forze del campo magnetico, e l'uso delle correnti indotte come una misura dell'intensità del campo. Nel lavoro del suo precedente interesse, la chimica, Egli sviluppó la legge della decomposizione elettrochimica, della conduzione elettrochimica, l'analisi della generazione nella pila voltaica, e la teoria generale dell'elettrolisi. Con le sue scoperte Faraday contribuí alla nascita di un vocabolario parallelo di nuovi termini elettrici e magnetici che sono diventati il linguaggio della scienza. Il suo lavoro lo portó a studiare i dielettrici e la "capacità induttiva specifica". Non fu facile il passaggio fra l'invenzione del generatore elettrico per mezzo del processo di induzione (che costituisce la forma pratica della generazione elettrica di oggi) ed il suo uso pratico nell'industria. Dispositivi per usare questa elettricità ancora dovevano essere inventati. La luce elettrica, il motore elettrico, l'uso nella metallurgia, nella termica, o nella chimica, hanno dovuto aspettare il genio inventivo dei successivi elettrici. Oltre alla sua applicazione alla telegrafia non fu fino al 1860 che la corrente da un generatore elettrico fu applicata ai fari fornendo così il primo grande uso della nuova forza. Tuttavia da allora la Scienza progredí con grande velocità cosicché alla fine del secolo, investimenti nei dispositivi elettrici superavano 100.000.000 di sterline, una piramide costruita in meno di 70 anni.

Seguendo l'annuncio della sua scoperta dei mezzi per generare elettricità attraverso l'induzione elettromagnetica, in un articolo letto davanti alla Royal Society il 24 Novembre del 1831, e in una lettera al suo amico Richard Phillips scritta da Brighton il 25 Novembre, il riconoscimento dell'importanza della scoperta da parte degli scienziati fu immediata.

Piú di un centinaio di onori accademici e scientifici furono conferiti a Faraday, incluso il solo che Egli abbia attivamente ricercato, membro della Royal Society. Sponsorizzato da Phillips, Faraday all'età di 32 anni divenne Fellow of the Royal Society nel mese di Gennaio del 1824. Designato Direttore del Laboratorio della Royal Institution nel 1825, Egli divenne 8 anni piú tardi, professore di Chimica per tutta la vita. Sebbene Egli non aveva l'obbligo di tenere lezioni, le sue lezioni divennero fortemente popolari. Egli rimase presso l'Institution per 54 anni fino alla morte nel 1867.

Nei 54 anni fruttuosi trascorsi come sperimentatore ed insegnante alla Royal Institution, Faraday ha pubblicato 158 articoli in Chimica ed Elettricitá. Il piú importanti di questi fu la serie "Experimental Researches in Electricity" che continuó ad apparire per un periodo di oltre 20 anni. Nel primo di questi come indicó nel suo annuncio a Phillips, il titolo fu stabilito e i soggetti trattati furono "I. On the induction of electric currents. II. On the evolution of Electricity from magnetism. III. On a New electrical condition of matter. IV. On Arago's magnetic phenomena. Vi é un ricco menú per voi -." Nel Gennaio del 1832 il primo di questi articoli fu pubblicato ed in quell'anno Oxford conferí un dottorato onorario a Faraday. Un congresso internazionale svoltosi a Parigi nel 1891, pose il termine unitá elettrica della capacitá il "farad" in onore di uno che ha contribuito molto alla Scienza elettrica.