

Campi magnetici nella materia: II

11.1 - Sorgenti del campo magnetico. Intensit  magnetica

In generale, dato un pezzo di materia, in esso sono presenti correnti ordinarie o vere, misurabili in laboratorio, e correnti atomiche all'interno della materia. In generale, quindi:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' - \mu_0 \vec{\nabla} U^*(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) \quad (11.1.1)$$

La densit  di corrente \vec{J} rappresenta tutte le effettive correnti dei veri trasportatori di carica, mentre l'effetto delle correnti atomiche   contenuto nel vettore magnetizzazione \vec{M} . In generale \vec{J}   un dato del problema mentre \vec{M} dipende da \vec{B} che a sua volta dipende da \vec{M} . Definiamo un vettore magnetico ausiliario, l'intensit  magnetica \vec{H} definita da:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (11.1.2)$$

Allora, la (11.1.1) si pu  scrivere:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' - \vec{\nabla} U^*(\vec{r}) \quad (11.1.3)$$

L'unit  di misura di \vec{H} sono le stesse di \vec{M} cio  A/m .

11.2 - Le equazioni del campo

Abbiamo visto che, in assenza di magnetizzazione le equazioni della magnetostatica sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (11.2.1)$$

Vogliamo vedere, ora, come queste equazioni vengono modificate quando il campo magnetico \vec{B}   dovuto anche ad un materiale magnetizzato. Ricordiamo che l'equazione della divergenza $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$   stata ottenuta poich  \vec{B} si pu  esprimere come rotore della funzione vettoriale \vec{A} . Ma questo risultato non   limitato ai campi magnetici creati dalle correnti ordinarie. Il campo creato dalla materia magnetizzata   pure ricavabile da un potenziale vettore. Quindi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (11.2.2)$$

anche in presenza di materia magnetizzata.

Nel caso dell'equazione del $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ dobbiamo includere tutti i tipi di corrente che possono creare un campo magnetico:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M) \quad (11.2.3)$$

dove \vec{J} é la densità di corrente vera e \vec{J}_M é la densità di corrente di magnetizzazione. Osserviamo che \vec{J}_M diventerá \vec{j}_m nel caso di magnetizzazione uniforme.

La (11.2.3) si può scrivere:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J} \quad (11.2.4)$$

che equivale a:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (11.2.5)$$

In forma integrale abbiamo:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \hat{n} da = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} da \quad (11.2.6)$$

o che é lo stesso

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (11.2.7)$$

che rappresenta la **Legge di Ampere** nella forma piú generale, cioè in presenza di mezzi materiali.

É opportuno sottolineare che i campi \vec{E} e \vec{B} sono i campi fondamentali. I campi ausiliari \vec{D} e \vec{H} sono stati introdotti per ragioni di convenienza, allo scopo di descrivere il contributo medio delle cariche e delle correnti atomiche alle distribuzioni di sorgenti ρ e \vec{J} .

11.3 - La suscettività e permeabilità magnetica

Nella teoria magnetica, per risolvere i problemi occorre avere una relazione fra \vec{B} e \vec{H} o, che é lo stesso, fra \vec{M} e uno dei vettori del campo magnetico. Queste relazioni dipendono dalla natura del materiale magnetico e ordinariamente si ricavano sperimentalmente.

Per una ampia classe di materiali esiste una relazione approssimativamente lineare fra \vec{M} e \vec{H} . Se il materiale é isotropo, oltre che lineare, $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ dove la quantità scalare adimensionale χ_m é detta **suscettività magnetica**. Se χ_m é positivo il materiale é **paramagnetico** e l'induzione magnetica é rafforzata dalla presenza del materiale. Se χ_m é negativo il materiale é **diamagnetico** e l'induzione magnetica é indebolita dalla presenza del materiale. Per quanto χ_m sia una funzione della temperatura e talvolta varii moltissimo con la temperatura, si può dire in generale che χ_m per i materiali paramagnetici e diamagnetici é molto piccolo, cioè:

$$|\chi_m| \ll 1 \quad \text{per i materiali dia - paramagnetici} \quad (11.3.1)$$

Materiale	χ_m
Alluminio	$2.3 \cdot 10^{-5}$
Bismuto	$-1.66 \cdot 10^{-5}$

Rame	$-0.98 \cdot 10^{-5}$
Diamante	$-2.2 \cdot 10^{-5}$
Cloruro di Gadolino ($GdCl_3$)	$276 \cdot 10^{-5}$
Oro	$-3.6 \cdot 10^{-5}$
Magnesio	$1.2 \cdot 10^{-5}$
Mercurio	$-3.2 \cdot 10^{-5}$
Argento	$-2.6 \cdot 10^{-5}$
Sodio	$-0.24 \cdot 10^{-5}$
Titanio	$7.06 \cdot 10^{-5}$
Tungsteno	$6.8 \cdot 10^{-5}$
Biossido di Carbonio (1 atm)	$-.99 \cdot 10^{-8}$
Idrogeno (1 atm)	$-.21 \cdot 10^{-8}$
Azoto (1 atm)	$-.50 \cdot 10^{-8}$
Ossigeno (1 atm)	$209 \cdot 10^{-8}$

Una relazione lineare fra \vec{M} e \vec{H} comporta pure una relazione lineare fra \vec{B} e \vec{H} , cioè possiamo scrivere:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (11.3.2)$$

Tenendo conto della (11.1.2) possiamo scrivere: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \mu \vec{H} - \vec{M}$ e per la $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ si ha:

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (11.3.3)$$

La quantità

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (11.3.4)$$

prende il nome di **permeabilità magnetica relativa**. Si può anche scrivere:

$$\mu_r = (1 + \chi_m) \quad (11.3.5)$$

11.4 - Materiali ferromagnetici

I materiali ferromagnetici costituiscono un'altra classe di materiale magnetico. Tale materiale è caratterizzato da una possibile magnetizzazione permanente e dal fatto che la sua presenza ordinariamente ha un notevole effetto sull'induzione magnetica. I materiali ferromagnetici non sono lineari, cosicché le equazioni $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ e $\vec{B} = \mu \vec{H}$ non sono valide, ma bisogna considerare che μ è una funzione di \vec{H} cioè $\mu = \mu(\vec{H})$.

Consideriamo un campione non magnetizzato di materiale ferromagnetico. Se la intensità magnetica, inizialmente nulla, viene accresciuta monotonicamente, allora la relazione $\vec{B} - \vec{H}$ è rappresentata da una curva come in figura 11.4-1.

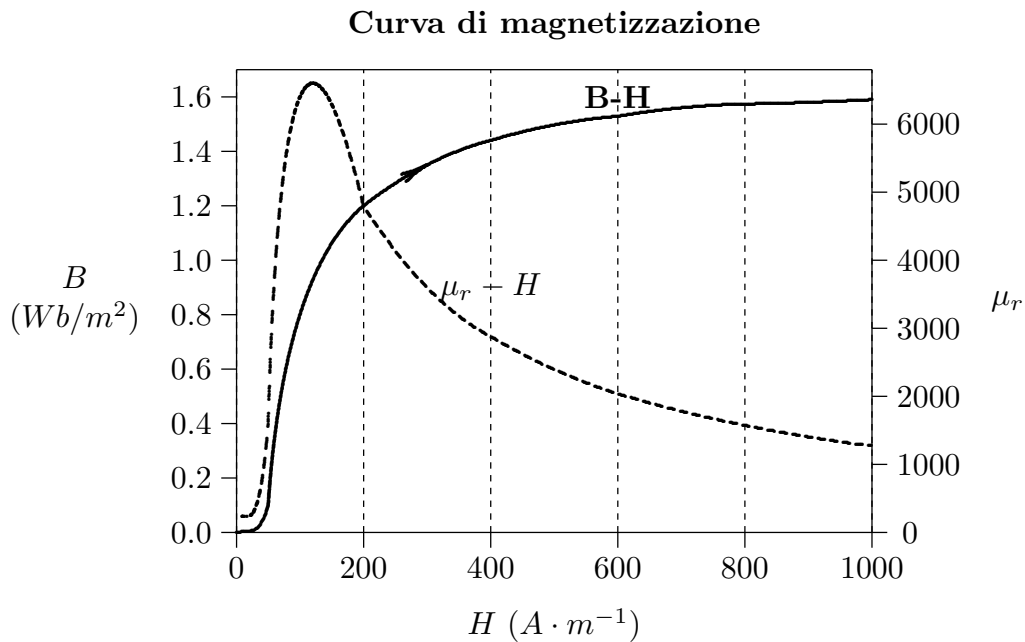


fig.11.4-1

Questa si chiama **curva di magnetizzazione** del materiale. La massima permeabilità si ha nel 'ginocchio' (punto di flesso) della curva; l'esistenza di questo flesso é dovuta al fatto che nel materiale la magnetizzazione raggiunge un massimo e \vec{B} che é dato da:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (11.4.1)$$

per valori grandi di \vec{H} continua a crescere per la presenza del termine $\mu_0 H$. Il massimo valore di \vec{H} dicesi saturazione magnetica del materiale.

Consideriamo un campione di materiale ferromagnetico magnetizzato col procedimento suddetto. Se si abbassa l'intensità magnetica \vec{H} , la relazione $\vec{B} - \vec{H}$ non segue la curva di figura 11.4-1, ma si muove lungo una nuova curva fino al punto r come in figura 11.4-2.

La magnetizzazione, una volta provocata, non sparisce se si toglie \vec{H} ; infatti per portare la magnetizzazione a zero occorre una intensità magnetica inversa. Se \vec{H} continua a crescere nel verso opposto allora \vec{M} (e quindi \vec{B}) aumenta anch'esso nel verso opposto e la figura comincia a presentare una certa simmetria. Infine quando \vec{H} comincia a crescere di nuovo il vettore \vec{M} segue di nuovo la curva inferiore di figura 11.4-2 diversa dalla curva per \vec{H} decrescente. Questo fenomeno dicesi **isteresi**, dal termine greco che significa ritardo; la magnetizzazione letteralmente rallenta il campo eccitante. La curva prende il nome di **ciclo di isteresi del materiale**. Il valore di \vec{B} nel punto r dicesi **induzione residua**; il valore di \vec{H} nel punto c dicesi **forza coercitiva** o **coercività** del materiale. É evidente che il valore di μ é negativo nel secondo e nel quarto quadrante del diagramma. La forma del

ciclo di isteresi dipende non solo dalla natura del materiale ferromagnetico ma anche dal massimo valore di \vec{H} al quale il materiale é sottoposto. Però il ciclo di isteresi non varia se si aumenta il valore \mathbf{H}_{\max} dove \mathbf{H}_{\max} é il valore sufficiente a produrre la saturazione del materiale. Per certe applicazioni occorre conoscere l'effettiva permeabilit  di un materiale ad un piccolo campo alternato \vec{H} sovrapposto ad un grande campo costante. Cos  se ΔB é la variazione nell'induzione magnetica, provocata da una variazione ΔH nell'intensit  magnetica, la permeabilit  incrementale é definita da:

$$\mu_{\text{increment}} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (11.4.2)$$

ed é approssimativamente uguale alla pendenza della curva di isteresi passante attraverso il punto in questione.

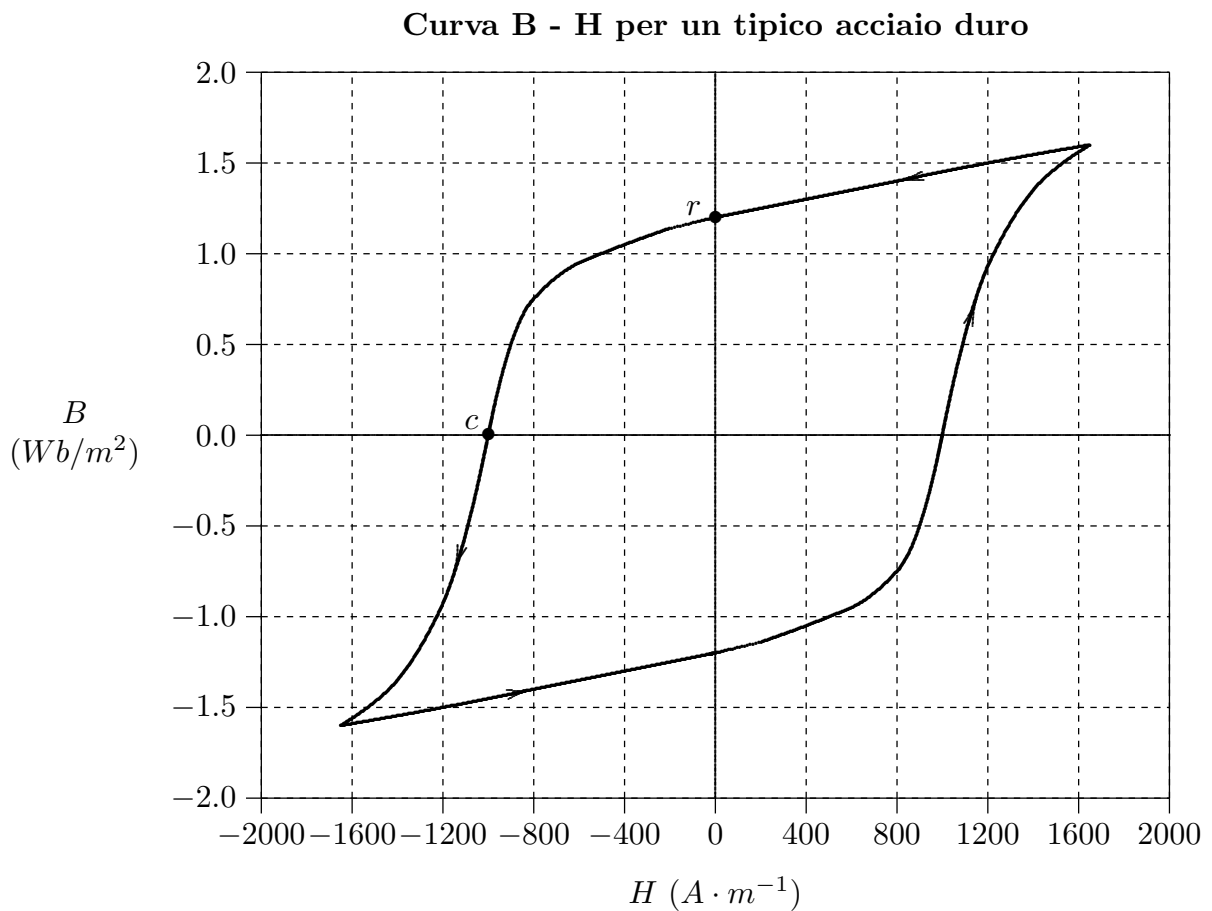


fig.11.4-2

In figura 11.4.3 sono rappresentate due tipiche curve di isteresi abbastanza diverse: una per l'acciaio al tungsteno (W) gi  riportata in figura 11.4-2 e l'altra per il ferro dolce.

I materiali ferromagnetici sono impiegati o per accrescere il flusso magnetico di un circuito di corrente o come fonte del campo magnetico (magneti permanenti). Per l'impiego come magneti permanente si magnetizza dapprima il materiale sino alla saturazione ponendolo in un campo magnetico intenso cioé ponendolo fra i poli di un elettromagnete o ponendolo in un solenoide in cui si fa passare una intensa corrente.

Curva B - H per due materiali tipici

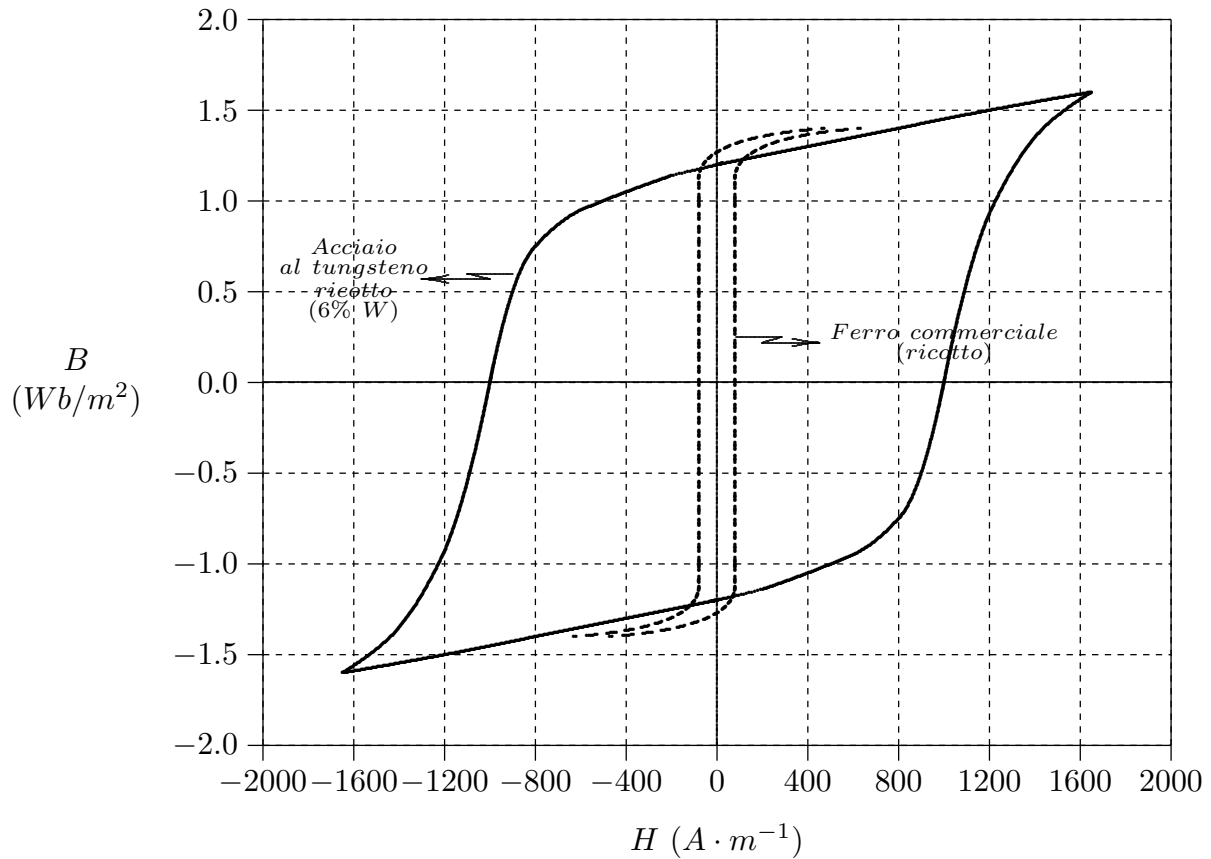


fig.11.4-3

11.5 - Le condizioni al contorno sui vettori del campo

Prima di poter risolvere i problemi magnetici anche semplici, dobbiamo conoscere come i vettori del campo \vec{B} e \vec{H} cambiano attraversando la superficie di separazione fra due mezzi. La superficie di separazione da considerare deve essere fra due mezzi con proprietà magnetiche diverse o fra un mezzo materiale e il vuoto.

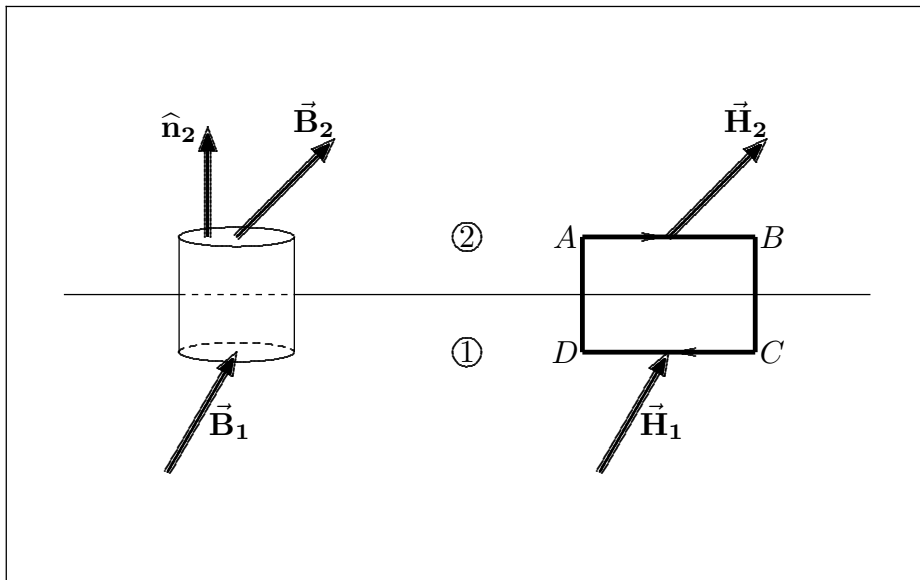


fig.11.5-1

Consideriamo due mezzi 1 e 2 a contatto. Costruiamo la superficie S a forma di cilindretto intersecante la superficie di separazione; l'altezza del cilindretto é trascurabile rispetto al diametro delle basi. Appliciamo la legge: $\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0$. Si ha:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \hat{n} da + \int_{S_2} \vec{B} \cdot \hat{n} da + \int_{S_b} \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0 \quad (11.5.1)$$

Siccome siamo interessati alla superficie di separazione facciamo tendere l'altezza del cilindretto a zero.

Poiché risulta $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$, la (11.5.1) si può scrivere:

$$\int_{S_b} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_2 da = 0 \quad (11.5.2)$$

Data l'arbitrarietà di S_b si ha:

$$\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \cdot \hat{n}_2 S_b = 0 \quad \text{ossia} \quad B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (11.5.3)$$

cioé la componente normale del vettore induzione magnetica é continua sulla superficie di separazione fra due mezzi diversi.

Analogamente consideriamo il rettangolo che taglia la superficie di separazione ed applichiamo la legge di Ampere:

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int_{CD} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{BC} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{m} da \quad (11.5.4)$$

Al limite per $h \rightarrow 0$ si ha che: $\int_S \vec{J} \cdot \hat{m} da = \int_S \vec{J}_S \cdot \hat{m} da$ dove \vec{J}_S é la densità di **corrente superficiale** e la (11.5.4) diventa:

$$\int_l \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int_l \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 = \int_l \vec{J}_S \cdot \hat{m} dl \quad (11.5.5)$$

che si puó scrivere:

$$\left(\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t}\right) \cdot \hat{l} = \vec{J}_S \cdot \hat{m} \quad (11.5.6)$$

Se $\vec{J}_S = 0$ come in tutti i casi reali, risulta:

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = 0 \quad (11.5.7)$$

cioé in assenza di corrente superficiale, la componente tangenziale del campo magnetico é continua sulla superficie di separazione fra due mezzi diversi.

11.6 - Problemi di condizioni al contorno di natura magnetica

In assenza di correnti di conduzione, le equazioni della magnetostatica, sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \quad (11.6.1)$$

Dalla (11.6.1) segue che il campo magnetico può essere derivato da una funzione scalare che indichiamo con U , cioè:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}U \quad (11.6.2)$$

Pertanto, se $\vec{B} = \mu\vec{H}$, ne segue $\vec{B} = -\mu\vec{\nabla}U$ che sostituito nella prima delle (11.6.1), comporta:

$$\nabla^2 U = 0 \quad (11.6.3)$$

Ne segue che i problemi di condizioni al contorno coinvolgenti mezzi magnetici senza corrente di conduzioni si possono risolvere attraverso l'equazione (11.6.3) che è una equazione di Laplace.

11.7 - Sfera magnetica posta in campo magnetico uniforme in assenza di corrente superficiale

Supponiamo di avere una sfera di materiale magnetico **lineare** di raggio a e permeabilità μ , posta in una zona di campo magnetico inizialmente uniforme \vec{B}_0 . Vorremmo determinare come il campo magnetico viene modificato dalla presenza della sfera ed in particolare determinare il campo nella sfera stessa.

Il problema della sfera, pertanto, consiste nella soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche come abbiamo fatto per il caso della sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme. Poniamo l'origine del nostro sistema di coordinate nel centro della sfera e prendiamo l'orientamento di \vec{B}_0 come asse polare. L'espressione del potenziale è:

$$U(r, \theta) = A_1 + C_1 \frac{1}{r} + A_2 r \cos \theta + C_2 \frac{1}{r^2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 \frac{1}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.7.1)$$

Il campo esterno si ottiene dopo avere imposto le condizioni all'infinito cioè che per $r \rightarrow \infty$:

$$\left[\vec{B}(r, \theta) \right]_{r \rightarrow \infty} = B_0 \hat{z} \quad \text{ossia} \quad [U(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} = -H_0 r \cos \theta + cost. \quad (11.7.2)$$

Il campo magnetico interno si ottiene dopo aver imposto che per $r = 0$ il potenziale non diverga.

Pertanto, in analogia a quanto abbiamo detto nel caso della sfera conduttrice posta in un campo elettrico, dobbiamo avere:

$$U_{ext} = cost + C_1 r^{-1} - H_0 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.7.3)$$

$$U_{int} = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.7.4)$$

Applichiamo le condizioni al contorno:

$$H_{\theta_{int}}(a, \theta) = H_{\theta_{ext}}(a, \theta) \quad (11.7.5)$$

$$B_{r_{int}}(a, \theta) = B_{r_{ext}}(a, \theta) \quad (11.7.6)$$

dove naturalmente:

$$H_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad B_r = -\mu \frac{\partial U}{\partial r} \quad (11.7.7)$$

$$\frac{\partial U_{int}}{\partial \theta} = -A_2 r \sin \theta - 3A_3 r^2 \cos \theta \sin \theta + \dots \quad (11.7.8)$$

$$\frac{\partial U_{ext}}{\partial \theta} = H_0 r \sin \theta - C_2 r^{-2} \sin \theta - 3C_3 r^{-3} \cos \theta \sin \theta + \dots \quad (11.7.9)$$

$$\frac{\partial U_{int}}{\partial r} = A_2 \cos \theta + A_3 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.7.10)$$

$$\frac{\partial U_{ext}}{\partial r} = -C_1 r^{-2} - H_0 \cos \theta - 2C_2 \frac{1}{r^3} \cos \theta - \frac{3}{2} C_3 \frac{1}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) \dots \quad (11.7.11)$$

La (11.7.5) e la (11.7.6), allora, si scrivono:

$$-\frac{1}{a} \left[\frac{\partial U_{int}}{\partial \theta} \right]_{(r=a)} = -\frac{1}{a} \left[\frac{\partial U_{ext}}{\partial \theta} \right]_{(r=a)} \quad (11.7.12)$$

$$-\mu \left[\frac{\partial U_{int}}{\partial r} \right]_{(r=a)} = -\mu_0 \left[\frac{\partial U_{ext}}{\partial r} \right]_{(r=a)} \quad (11.7.13)$$

che si traducono nelle:

$$-A_2 a \sin \theta - 3A_3 a^2 \cos \theta \sin \theta + \dots = H_0 a \sin \theta - C_2 a^{-2} \sin \theta - 3C_3 a^{-3} \cos \theta \sin \theta + \dots \quad (11.7.14)$$

$$\begin{aligned} & \mu A_2 \cos \theta + \mu A_3 a (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \\ = & -\mu_0 C_1 a^{-2} - \mu_0 H_0 \cos \theta - 2C_2 \mu_0 \frac{1}{a^3} \cos \theta - \frac{3}{2} C_3 \frac{1}{a^4} \mu_0 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned} \quad (11.7.15)$$

Perché la (11.7.14) e la (11.7.15) siano verificate occorre che:

$$-A_2 a = H_0 a - C_2 a^{-2} \quad (11.7.16)$$

$$-3A_3 a^2 = -3C_3 a^{-3} \quad (11.7.17)$$

$$-\mu A_3 a = -\mu_0 C_1 a^{-2} + \frac{3}{2} \mu_0 C_3 \frac{1}{a^4} \quad (11.7.18)$$

$$\mu A_2 = -\mu_0 H_0 - 2C_2 \mu_0 \frac{1}{a^3} \quad (11.7.19)$$

$$\mu A_3 a = -\frac{3}{2} \mu_0 C_3 \frac{1}{a^4} \quad (11.7.20)$$

.....

Si vede subito che la (11.7.17) é compatibile con la (11.7.20) se e solo se:

$$A_3 = C_3 = 0 \quad e \quad quindi \quad A_i = C_i = 0 \quad per \quad i > 3 \quad (11.7.21)$$

Ne segue dalla (11.7.18) che anche $C_1 = 0$. Pertanto le uniche costanti diverse da zero sono A_2 e C_2 che si possono calcolare dal sistema costituito dalla (11.7.16) e dalla (11.7.19):

$$-A_2 a = H_0 a - C_2 a^{-2} \quad (11.7.22)$$

$$\mu A_2 = -\mu_0 H_0 - 2C_2 \mu_0 \frac{1}{a^3} \quad (11.7.23)$$

la cui soluzione é:

$$A_2 = -\frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 \quad (11.7.24)$$

$$C_2 = \frac{\mu_0 a^3 \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)}{\mu + 2\mu_0} H_0 \quad (11.7.25)$$

Ne segue, pertanto, dopo aver posto $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$:

$$U_{ext} = cost - \frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{B_0 a^3 \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)}{\mu + 2\mu_0} r^{-2} \cos \theta \quad (11.7.26)$$

$$U_{int} = A_1 - \frac{3B_0}{\mu + 2\mu_0} r \cos \theta \quad (11.7.27)$$

Posto $\mu = \mu_r \mu_0$ si ha:

$$U_{ext} = cost - \frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{B_0 a^3 (\mu_r - 1)}{\mu_0 (\mu_r + 2)} r^{-2} \cos \theta \quad (11.7.28)$$

$$U_{int} = A_1 - \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} r \cos \theta \quad (11.7.29)$$

Per $r = a$:

$$U_{ext(r=a)} = cost - \frac{B_0}{\mu_0} a \cos \theta + \frac{B_0 a (\mu_r - 1)}{\mu_0 (\mu_r + 2)} \cos \theta = cost - \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} a \cos \theta \quad (11.7.30)$$

$$U_{int(r=a)} = A_1 - \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} a \cos \theta \quad (11.7.31)$$

Per la continuitá del potenziale sui punti della sfera, deve essere: $A_1 = cost$.

Quindi, in definitiva i potenziali descrittivi i campi magnetici nei punti fuori la sfera e dentro la sfera sono:

$$U_{ext} = cost - \frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{B_0 a^3 (\mu_r - 1)}{\mu_0 (\mu_r + 2)} r^{-2} \cos \theta \quad (11.7.32)$$

$$U_{int} = cost - \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} r \cos \theta \quad (11.7.33)$$

Vogliamo porre la nostra attenzione sul campo di induzione magnetica nei punti interni alla sfera:

$$\vec{B}_{int} = -\mu \vec{\nabla} U_{int} \quad (11.7.34)$$

ossia:

$$B_{rint} = -\mu \frac{\partial U_{int}}{\partial r} \quad B_{\theta int} = -\mu \frac{1}{r} \frac{\partial U_{int}}{\partial \theta} \quad (11.7.35)$$

$$B_{rint} = \mu \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} \cos \theta \quad B_{\theta int} = -\mu \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} \sin \theta \quad (11.7.36)$$

É utile esprimere il campo nelle componenti cartesiane:

$$\mathbf{B}_z = B_r \cos \theta - B_\theta \sin \theta = \frac{3\mathbf{B}_0 \mu_r}{\mu_r + 2} \quad (11.7.37)$$

$$\mathbf{B}_x = B_r \sin \theta + B_\theta \cos \theta = 0 \quad (11.7.38)$$

Ne segue, quindi, che:

$$\vec{\mathbf{B}}_{int} = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2} \mathbf{B}_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (11.7.39)$$

Per il calcolo del campo esterno si ha:

$$\vec{B}_{ext} = -\mu_0 \vec{\nabla} U_{ext} \quad (11.7.40)$$

ossia:

$$B_{rext} = -\mu_0 \frac{\partial U_{ext}}{\partial r} \quad B_{\theta ext} = -\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial U_{ext}}{\partial \theta} \quad (11.7.41)$$

$$B_{rext} = B_0 \cos \theta + 2B_0 a^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{1}{r^3} \cos \theta \quad B_{\theta ext} = -B_0 \sin \theta + B_0 a^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{1}{r^3} \sin \theta \quad (11.7.42)$$

Il campo esterno espresso in componenti cartesiane é:

$$\begin{aligned} B_{zext} &= B_0 \cos^2 \theta + 2B_0 a^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{1}{r^3} \cos^2 \theta + B_0 \sin^2 \theta - B_0 a^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{1}{r^3} \sin^2 \theta = \\ &= B_0 + B_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\right) (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (11.7.43)$$

$$\begin{aligned}
 B_{\theta_{ext}} &= B_0 \cos \theta \sin \theta + 2B_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \cos \theta \sin \theta \\
 -B_0 \cos \theta \sin \theta + B_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \cos \theta \sin \theta &= 3B_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \cos \theta \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{11.7.44}$$

Si osservi che per μ_r abbastanza elevato $\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}$ tende all'unit  e quindi per $r = a$ $B_{\theta_{ext}}$ tende a zero; quindi nei corpi con alta permeabilit  magnetica il campo esterno   ortogonale alla superficie del corpo cio  il loro comportamento   analogo a quello dei conduttori perfetti.

Le linee di forza sia del campo magnetico interno che del campo magnetico esterno hanno identico comportamento di quelle relative alla sfera dielettrica posta in campo elettrostatico uniforme; in questo caso il parametro η   dato, come si evince dalle (11.7.42), dall'espressione:

$$\eta = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}
 \tag{11.7.45}$$

11.8 - Schermaggio magnetico: strato sferico di materiale permeabile in un campo magnetico uniforme

Si supponga che in una regione di spazio vuoto esista inizialmente una induzione magnetica \vec{B}_0 . Si disponga un corpo permeabile in questa regione. Le linee di forza dell'induzione magnetica risulteranno deformate. Se la permeabilità del corpo è molto alta ci aspettiamo che le linee di forza tendano, in prossimità del corpo, a disporsi perpendicolarmente alla sua superficie. Sviluppando ulteriormente l'analogia con i corpi conduttori ci aspettiamo anche che, se il corpo è cavo, il campo all'interno della cavità risulti di intensità minore che all'esterno, tendendo a zero, al limite per μ_r che tende all'infinito. Una tale riduzione del campo nella cavità viene attribuita ad una azione di schermaggio magnetico esercitata dal materiale permeabile. Essa è di notevole importanza pratica, in quanto spesso è necessario o desiderabile creare regioni di spazio essenzialmente senza campo a scopi di misura o per un buon funzionamento di apparecchiature elettroniche. Come esempio del fenomeno dello schermaggio magnetico consideriamo uno strato sferico di raggio interno a e raggio esterno b , costituito di un materiale magnetico di permeabilità μ , introdotto in una regione, di permeabilità $\mu \simeq \mu_0$ come la regione cava, in cui la induzione magnetica preesistente era \vec{B}_0 , uniforme e costante.

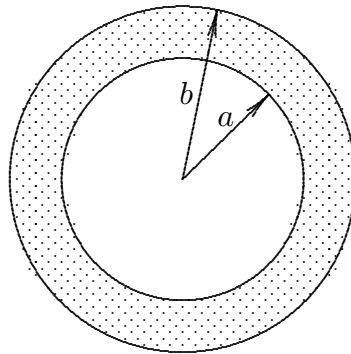


fig.11.8-1

Vogliamo determinare il campo di induzione magnetica in tutti i punti dello spazio, ma in particolare all'interno della cavità ($r < a$) in funzione della permeabilità μ dello strato. Dato che non ci sono correnti, il campo magnetico \vec{H} , al solito, è derivabile da un potenziale scalare: $\vec{H} = -\vec{\nabla}U$. Inoltre, siccome $\vec{B} = \mu\vec{H}$, l'equazione della divergenza $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ diventa $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$. Dunque il potenziale U soddisfa ovunque all'equazione di Laplace e il problema si riduce a trovare le appropriate soluzioni nelle diverse regioni, in modo da soddisfare le condizioni al contorno per $r = a$ e $r = b$.

Cominciamo a scrivere la soluzione generale per il potenziale:

$$U(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.8.1)$$

Imponiamo le solite condizioni per le varie regioni dove si considera il campo.

Per $r > b$ il potenziale é:

$$U_{(r>b)} = cost + C_1 r^{-1} - H_0 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.8.2)$$

Per $r < a$ il potenziale é:

$$U_{(r<a)} = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.8.3)$$

Per $a < r < b$ il potenziale é:

$$U_{rab} = A'_1 + C'_1 r^{-1} + A'_2 r \cos \theta + C'_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} A'_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C'_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.8.4)$$

Le condizioni al contorno sono:

$$1) \quad \mathbf{H}_{\theta(r>b)}(\mathbf{b}, \theta) = \mathbf{H}_{\theta(rab)}(\mathbf{b}, \theta) \quad (11.8.5)$$

$$2) \quad \mathbf{B}_{r(r>b)}(\mathbf{b}, \theta) = \mathbf{B}_{r(rab)}(\mathbf{b}, \theta) \quad (11.8.6)$$

$$3) \quad \mathbf{H}_{\theta(r<a)}(\mathbf{a}, \theta) = \mathbf{H}_{\theta(rab)}(\mathbf{a}, \theta) \quad (11.8.7)$$

$$4) \quad \mathbf{B}_{r(r<a)}(\mathbf{a}, \theta) = \mathbf{B}_{r(rab)}(\mathbf{a}, \theta) \quad (11.8.8)$$

dove:

$$H_{\theta(r>b)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} U_{(r>b)} \quad (11.8.9)$$

$$H_{\theta(rab)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} U_{(rab)} \quad (11.8.10)$$

$$H_{\theta(r<a)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} U_{(r<a)} \quad (11.8.11)$$

$$B_{r(r>b)} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial r} U_{(r>b)} \quad (11.8.12)$$

$$B_{r(rab)} = -\mu \frac{\partial}{\partial r} U_{(rab)} \quad (11.8.13)$$

$$B_{r(r<a)} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial r} U_{(r<a)} \quad (11.8.14)$$

che, sviluppate, diventano:

$$H_{\theta(r>b)} = -H_0 \sin \theta + C_2 \frac{1}{r^3} \sin \theta + 3C_3 \frac{1}{r^4} \sin \theta \cos \theta + \dots \quad (11.8.15)$$

$$H_{\theta(rab)} = A'_2 \sin \theta + C'_2 \frac{1}{r^3} \sin \theta + 3A'_3 r \cos \theta \sin \theta + 3C'_3 r^{-4} \cos \theta \sin \theta + \dots \quad (11.8.16)$$

$$H_{\theta(r<a)} = A_2 \sin \theta + 3A_3 r \cos \theta \sin \theta + \dots \quad (11.8.17)$$

$$B_{r(r>b)} = \mu_0 \frac{C_1}{r^2} + \mu_0 H_0 \cos \theta + 2\mu_0 \frac{C_2}{r^3} \cos \theta + \frac{3}{2} \mu_0 C_3 \frac{1}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.8.18)$$

$$B_{r(rab)} = \mu \frac{C'_1}{r^2} - \mu A'_2 \cos \theta + 2\mu C'_2 \frac{1}{r^3} \cos \theta - \mu A'_3 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{2} \mu C'_3 \frac{1}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.8.19)$$

$$B_{r(r<a)} = -\mu_0 A_2 \cos \theta - \mu_0 A_3 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (11.8.20)$$

Allora, le condizioni al contorno (11.8.5), (11.8.6), (11.8.7), (11.8.8), si scrivono:

$$\begin{aligned} 1) \quad & -H_0 \sin \theta + C_2 \frac{1}{b^3} \sin \theta + 3C_3 \frac{1}{b^4} \sin \theta \cos \theta + \dots = \\ & = A'_2 \sin \theta + C'_2 \frac{1}{b^3} \sin \theta + 3A'_3 b \cos \theta \sin \theta + 3C'_3 b^{-4} \cos \theta \sin \theta + \dots \end{aligned} \quad (11.8.21)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \mu_0 \frac{C_1}{b^2} + \mu_0 H_0 \cos \theta + 2\mu_0 \frac{C_2}{b^3} \cos \theta + \frac{3}{2} \mu_0 C_3 \frac{1}{b^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \\ & = \mu \frac{C'_1}{b^2} - \mu A'_2 \cos \theta + 2\mu C'_2 \frac{1}{b^3} \cos \theta - \mu A'_3 b (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{2} \mu C'_3 \frac{1}{b^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned} \quad (11.8.22)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & A_2 \sin \theta + 3A_3 a \cos \theta \sin \theta + \dots = \\ & = A'_2 \sin \theta + C'_2 \frac{1}{a^3} \sin \theta + 3A'_3 a \cos \theta \sin \theta + 3C'_3 a^{-4} \cos \theta \sin \theta + \dots \end{aligned} \quad (11.8.23)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & -\mu_0 A_2 \cos \theta - \mu_0 A_3 a (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \\ & = \mu \frac{C'_1}{a^2} - \mu A'_2 \cos \theta + 2\mu C'_2 \frac{1}{a^3} \cos \theta - \mu A'_3 a (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{2} \mu C'_3 \frac{1}{a^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned} \quad (11.8.24)$$

Perché l'equazione (11.8.21) sia soddisfatta occorre che:

$$1) \quad -H_0 + \frac{C_2}{b^3} - A'_2 - C'_2 \frac{1}{b^3} = 0 \quad (11.8.25)$$

$$2) \quad \frac{3C_3}{b^4} - 3A'_3 b - 3C'_3 \frac{1}{b^4} = 0 \quad (11.8.26)$$

Perché l'equazione (11.8.22) sia soddisfatta occorre che:

$$3) \quad \frac{\mu_0 C_1}{b^2} - \frac{3}{2} \mu_0 \frac{C_3}{b^4} - \mu \frac{C'_1}{b^2} - \mu A'_3 b + \frac{3}{2} \mu C'_3 \frac{1}{b^4} = 0 \quad (11.8.27)$$

$$4) \quad \mu_0 H_0 + 2\mu_0 \frac{C_2}{b^3} + \mu A'_2 - 2\mu C'_2 \frac{1}{b^3} = 0 \quad (11.8.28)$$

$$5) \quad \frac{9}{2} \mu_0 C_3 \frac{1}{b^4} + 3\mu A'_3 b - \frac{9}{2} \mu C'_3 \frac{1}{b^4} = 0 \quad (11.8.29)$$

Perché l'equazione (11.8.23) sia soddisfatta occorre che:

$$6) \quad A_2 - A'_2 - C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (11.8.30)$$

$$7) \quad 3A_3a - 3A'_3a - 3C'_3a^{-4} = 0 \quad (11.8.31)$$

Perché l'equazione (11.8.24) sia soddisfatta occorre che:

$$8) \quad \mu_0 A_3 a - \mu A'_3 a + \frac{3}{2} \mu C'_3 \frac{1}{a^4} - \mu \frac{C'_1}{a^2} = 0 \quad (11.8.32)$$

$$9) \quad -\mu_0 A_2 + \mu A'_2 - 2\mu C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (11.8.33)$$

$$10) \quad -3\mu_0 A_3 a + 3\mu A'_3 a - \frac{9}{2} \mu C'_3 \frac{1}{a^4} = 0 \quad (11.8.34)$$

Consideriamo le equazioni 1), 4), 6), 9) nelle incognite A_2 , A'_2 , C_2 , C'_2 che sono indipendenti dalle altre equazioni:

$$1) \quad -H_0 + \frac{C_2}{b^3} - A'_2 - C'_2 \frac{1}{b^3} = 0 \quad (11.8.35)$$

$$4) \quad \mu_0 H_0 + 2\mu_0 \frac{C_2}{b^3} + \mu A'_2 - 2\mu C'_2 \frac{1}{b^3} = 0 \quad (11.8.36)$$

$$6) \quad A_2 - A'_2 - C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (11.8.37)$$

$$9) \quad -\mu_0 A_2 + \mu A'_2 - 2\mu C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (11.8.38)$$

che, ordinando, si scrivono:

$$1) \quad -A'_2 + \frac{C_2}{b^3} - \frac{C'_2}{b^3} = +H_0 \quad (11.8.39)$$

$$4) \quad \mu A'_2 + 2\mu_0 \frac{C_2}{b^3} - 2\mu \frac{C'_2}{b^3} = -\mu_0 H_0 \quad (11.8.40)$$

$$6) \quad A_2 - A'_2 - C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (11.8.41)$$

$$9) \quad -\mu_0 A_2 + \mu A'_2 - 2\mu C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (11.8.42)$$

Calcoliamo il determinante dei coefficienti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ 0 & \mu & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ -\mu_0 & \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \quad (11.8.43)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ \mu & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} + \mu_0 \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ \mu & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \quad (11.8.44)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \mu \left(-2\mu \frac{1}{b^6} + 2\mu_0 \frac{1}{b^6} \right) - 2\frac{\mu}{a^3} \left(-2\mu_0 \frac{1}{b^3} - \mu \frac{1}{b^3} \right) - \mu_0 \left(-2\mu \frac{1}{b^6} + 2\mu_0 \frac{1}{b^6} \right) - \\ &\mu_0 \frac{1}{a^3} \left(-2\mu_0 \frac{1}{b^3} - \mu \frac{1}{b^3} \right) = (\mu - \mu_0)(\mu_0 - \mu) \frac{2}{b^6} + (2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) \frac{1}{a^3 b^3} = \\ &= \frac{1}{a^3 b^3} \left[-2\frac{a^3}{b^3} (\mu - \mu_0)^2 + (2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) \right] \end{aligned} \quad (11.8.45)$$

Pertanto:

$$A_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} H_0 & -1 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ -\mu_0 H_0 & \mu & +2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ 0 & \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \quad (11.8.46)$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ H_0 \begin{vmatrix} \mu & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} + \mu_0 H_0 \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \right\} \quad (11.8.47)$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ H_0 \left[-2\mu_0 \frac{1}{b^3} \left(2\mu \frac{1}{a^3} + \mu \frac{1}{a^3} \right) \right] + \mu_0 H_0 \left[-\frac{1}{b^3} \left(2\mu \frac{1}{a^3} + \mu \frac{1}{a^3} \right) \right] \right\} = -\frac{1}{\Delta} \frac{9\mu B_0}{a^3 b^3} \quad (11.8.48)$$

In definitiva:

$$A_2 = \frac{-9\mu B_0}{\left[(2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3} (\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (11.8.49)$$

Analogamente:

$$A'_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & H_0 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ 0 & -\mu_0 H_0 & +2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ -\mu_0 & 0 & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \quad (11.8.50)$$

$$A'_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{vmatrix} H_0 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ -\mu_0 H_0 & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 0 & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} + \mu_0 \begin{vmatrix} H_0 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ -\mu_0 H_0 & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \right\} \quad (11.8.51)$$

$$A'_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ -2 \frac{\mu}{a^3} \left[2\mu_0 H_0 \frac{1}{b^3} + \mu_0 \frac{H_0}{b^3} \right] - \frac{\mu_0}{a^3} \left[\frac{2\mu_0 H_0}{b^3} + \frac{\mu_0 H_0}{b^3} \right] \right\} = -\frac{1}{\Delta} \frac{3B_0}{a^3 b^3} (2\mu + \mu_0) \quad (11.8.52)$$

In definitiva:

$$A'_2 = \frac{-3(2\mu + \mu_0) B_0}{\left[(2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2 \frac{a^3}{b^3} (\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (11.8.53)$$

La costante C'_2 si può calcolare direttamente dalla equazione 6) cioè dalla (11.8.41):

$$C'_2 = a^3 (A_2 - A'_2) = \frac{[-9\mu + 3(2\mu + \mu_0)] B_0 a^3}{\left[(2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2 \frac{a^3}{b^3} (\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (11.8.54)$$

In definitiva:

$$C'_2 = \frac{-3(\mu - \mu_0) B_0 a^3}{\left[(2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2 \frac{a^3}{b^3} (\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (11.8.55)$$

Resta da calcolare C_2

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & -1 & H_0 & -\frac{1}{b^3} \\ 0 & \mu & -\mu_0 H_0 & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ -\mu_0 & \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \quad (11.8.56)$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{vmatrix} -1 & H_0 & -\frac{1}{b^3} \\ \mu & -\mu_0 H_0 & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} + \mu_0 \begin{vmatrix} -1 & H_0 & -\frac{1}{b^3} \\ \mu & -\mu_0 H_0 & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \right\} \quad (11.8.57)$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \left[\mu \left(-2\mu \frac{H_0}{b^3} - \frac{\mu_0 H_0}{b^3} \right) - \frac{2\mu}{a^3} (\mu_0 H_0 - \mu H_0) \right] + \frac{1}{\Delta} \left[-\mu_0 \left(-2\mu \frac{H_0}{b^3} - \frac{\mu_0 H_0}{b^3} \right) - \frac{\mu_0}{a^3} (\mu_0 H_0 - \mu H_0) \right] \quad (11.8.58)$$

che si può ancora scrivere:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{\Delta} \left[-(\mu - \mu_0)(2\mu + \mu_0) \frac{H_0}{b^3} - (2\mu + \mu_0)(\mu_0 - \mu) \frac{H_0}{a^3} \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[H_0 (2\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0) \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta} \frac{(2\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0) H_0 (b^3 - a^3)}{a^3 b^3} \end{aligned} \quad (11.8.59)$$

che, in definitiva, si scrive:

$$C_2 = \frac{(2\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0)(b^3 - a^3)H_0}{\left[(2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (11.8.60)$$

Riassumiamo le espressioni delle costanti che abbiamo trovato:

$$A_2 = \frac{-9\mu B_0}{\left[(2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (11.8.61)$$

$$A'_2 = \frac{-3(2\mu + \mu_0)B_0}{\left[(2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (11.8.62)$$

$$C_2 = \frac{(2\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0)(b^3 - a^3)H_0}{\left[(2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (11.8.63)$$

$$C'_2 = \frac{-3(\mu - \mu_0)B_0 a^3}{\left[(2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (11.8.64)$$

Vogliamo esprimere questi quattro coefficienti in funzione della permeabilità magnetica relativa μ_r . Poiché $\mu = \mu_0\mu_r$ e il denominatore si può scrivere:

$$\Delta = \left[\mu_0^2(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\mu_0^2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right] \quad (11.8.65)$$

le formule diventano:

$$A_2 = \frac{-9\mu_r B_0}{\mu_0 \left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (11.8.66)$$

$$A'_2 = \frac{-3(2\mu_r + 1)B_0}{\mu_0 \left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (11.8.67)$$

$$C_2 = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)H_0}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (11.8.68)$$

$$C'_2 = \frac{-3(\mu_r - 1)B_0 a^3}{\mu_0 \left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (11.8.69)$$

Per il calcolo degli altri coefficienti, si procede nella seguente maniera. Si moltiplichi l'equazione 8) per -3 e la si confronti con la 10): si trova $C'_1 = 0$. Analogamente moltiplicando l'equazione 3) per -3 , dopo aver posto $C'_1 = 0$ e confrontandola con la 5) si trova $C_1 = 0$.

Le equazioni restanti cioè la 2), 5), 7), 10) formano un sistema omogeneo e si può facilmente verificare che il determinante dei coefficienti è diverso da zero, per cui esso ammette la soluzione banale per A_3 , A'_3 , C_3 e C'_3 , nonché per tutti gli altri coefficienti di ordine superiore a tre.

Calcolo delle componenti dell'induzione magnetica nella regione interna (regione cava, $r < a$).

Le componenti del campo di induzione magnetica nella regione cava del sistema, che é quella di maggior importanza fisica, si ottengono dalla (11.8.17) e dalla (11.8.20) dopo l'opportuna sostituzione delle costanti trovate. Si ha:

$$B_{r(r < a)} = \frac{9\mu_r B_0 \cos \theta}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (11.8.70)$$

$$B_{\theta(r < a)} = -\frac{9\mu_r B_0 \sin \theta}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (11.8.71)$$

É interessante osservare che per $\mu_r \gg 1$, le formule (11.8.70) e (11.8.71) si possono scrivere:

$$B_{r(r < a)} = \frac{9\mu_r B_0 \cos \theta}{2\mu_r^2 \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right)} \quad (11.8.72)$$

$$B_{\theta(r < a)} = -\frac{9\mu_r B_0 \sin \theta}{2\mu_r^2 \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right)} \quad (11.8.73)$$

In coordinate cartesiane, si ha:

$$B_z = B_r \cos \theta - B_{\theta} \sin \theta, \quad B_x = B_r \sin \theta + B_{\theta} \cos \theta \quad (11.8.74)$$

Ne segue:

$$B_{z(r < a)} = \frac{9B_0}{2\mu_r \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right)}, \quad B_x = 0 \quad (11.8.75)$$

Il campo di induzione magnetica, nella regione interna allo strato, ha la stessa direzione e verso del campo esterno preesistente (imperturbato), ossia le linee di forza sono parallele all'asse z. Esso (nell'ipotesi $\mu_r \gg 1$) risulta proporzionale a $\frac{1}{\mu_r}$. Di conseguenza uno schermo costruito con materiale di alta permeabilità $\mu_r \simeq 10^3 \div 10^6$ riduce a valori assai piccoli il campo all'interno anche se lo spessore dello schermo é relativamente piccolo.

Calcolo delle componenti dell'induzione magnetica nella regione esterna ($r > b$).

Le componenti del campo di induzione magnetica nella regione esterna allo strato si ottengono dalla (11.8.18) e dalla (11.8.15) dopo l'opportuna sostituzione delle costanti

trovate. Si ha:

$$H_{\theta(r>b)} = -H_0 \sin \theta + \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \frac{1}{r^3} H_0 \sin \theta \quad (11.8.76)$$

$$B_{r(r>b)} = \mu_0 H_0 \cos \theta + 2\mu_0 \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \frac{1}{r^3} H_0 \cos \theta \quad (11.8.77)$$

che é conveniente scrivere nella forma:

$$B_{r(r>b)} = B_0 \left(1 + \gamma \frac{2}{r^3} \right) \cos \theta \quad (11.8.78)$$

$$B_{\theta(r>b)} = -B_0 \left(1 - \gamma \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \quad (11.8.79)$$

avendo posto:

$$\gamma = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (11.8.80)$$

Calcolo delle componenti dell'induzione magnetica nella regione interna allo strato ($a < r < b$).

Le componenti del campo di induzione magnetica nella regione interna allo strato si ottengono dalla (11.8.16) e (11.8.19) dopo l'opportuna sostituzione delle costanti trovate. Si ha:

$$H_{\theta(rab)} = \frac{-3(2\mu_r + 1)H_0 \sin \theta}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} + \frac{-3(\mu_r - 1)H_0 a^3 \sin \theta}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \frac{1}{r^3} \quad (11.8.81)$$

$$B_{r(rab)} = \frac{3\mu(2\mu_r + 1)H_0 \cos \theta}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} + \frac{-3\mu(\mu_r - 1)H_0 2a^3 \cos \theta}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \frac{1}{r^3} \quad (11.8.81)$$

che si possono scrivere:

$$B_{\theta(rab)} = \frac{-3\mu_r(2\mu_r + 1)B_0}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \left[1 + \frac{(\mu_r - 1)a^3}{(2\mu_r + 1)r^3} \right] \sin \theta \quad (11.8.82)$$

$$B_{r(rab)} = \frac{3\mu_r(2\mu_r + 1)B_0}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \left[1 - \frac{(\mu_r - 1)2a^3}{(2\mu_r + 1)r^3} \right] \cos \theta \quad (11.8.83)$$

Grafico delle linee di forza

Regione esterna ($r > b$)

Poiché le equazioni delle componenti dei campi dell'induzione magnetica nei punti esterni ($r > b$) hanno la stessa forma di quelle competenti ad una sfera perfettamente conduttrice o dielettrica, l'equazione delle linee di forza relative al campo di induzione magnetica nei punti esterni ($r > b$) é data da:

$$|\sin \theta| = \xi \sqrt{\frac{r}{r^3 + 2\gamma}} \quad (11.8.84)$$

essendo

$$\gamma = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (11.8.85)$$

Anche in questo caso il parametro ξ rappresenta l'ordinata della linea di forza del campo di induzione magnetica iniziale \vec{B}_0 (imperturbato). Il valore di ξ al di sopra del quale le linee di forza del campo magnetico non toccheranno mai la sfera risulta:

$$\xi_s = \sqrt{\frac{b^3 + 2\gamma}{b}} \quad (11.8.86)$$

Regione interna allo strato ($a < r < b$)

L'equazione che descrive le linee di forza nella regione dello strato é:

$$rB_r d\theta - B_\theta dr = 0 \quad (11.8.87)$$

Sostituendo nella (11.8.87) le espressioni (11.8.82) e (11.8.83), si ha:

$$r \left(1 - \zeta \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos \theta d\theta = - \left(1 + \zeta \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta dr \quad (11.8.88)$$

avendo posto:

$$\zeta = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r + 1} \quad (11.8.89)$$

L'equazione (11.8.88) si puó scrivere:

$$-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{1 + \zeta \frac{a^3}{r^3}}{1 - \zeta \frac{2a^3}{r^3}} \frac{dr}{r} \quad (11.8.90)$$

Eseguendo lo stesso procedimento effettuato nel caso di sfera conduttrice, risulta:

$$|\sin \theta| = \xi_1 \sqrt{\frac{r}{|r^3 - 2\zeta a^3|}} \quad (11.8.91)$$

Osservando che il parametro $\zeta = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r + 1}$ assume, al variare di μ_r fra 1 e $+\infty$, valori compresi fra 0 e $\frac{1}{2}$, risulta sempre $r^3 > 2\zeta a^3$.

Quindi $|r^3 - 2\zeta a^3| = r^3 - 2\zeta a^3$ e la (11.8.91) diventa:

$$|\sin \theta| = \xi_1 \sqrt{\frac{r}{r^3 - 2\zeta a^3}} \quad (11.8.92)$$

Per garantire la continuità grafica della linea di forza interna allo strato con quella esterna occorre correlare il parametro ξ_1 con il paramtro ξ che é quello che generalmente si fa variare.

Questo si ottiene imponendo che per $r = b$ i secondi membri delle equazioni (11.8.84) e (11.8.92) siano eguali, ossia:

$$\xi \sqrt{\frac{b}{b^3 + 2\gamma}} = \xi_1 \sqrt{\frac{b}{b^3 - 2\zeta a^3}} \quad (11.8.93)$$

che comporta:

$$\xi_1 = \xi \frac{\sqrt{\frac{b}{b^3 + 2\gamma}}}{\sqrt{\frac{b}{b^3 - 2\zeta a^3}}} \quad (11.8.94)$$

Come esempio grafichiamo le linee di forza nel caso in cui $\mu_r = 1000$, $a = 0.7$ e $b = 1$.
Risulta:

$$\gamma = 0.99468, \quad \zeta = 0.49925, \quad \xi_s = 1.729, \quad \xi_1 = 0.46899\xi \quad (11.8.95)$$

Il grafico é rappresentato in figura 11.8-2.

Linee di forza del campo magnetico ($\mu_r = 1000$, $a = 0.7$, $b = 1$)

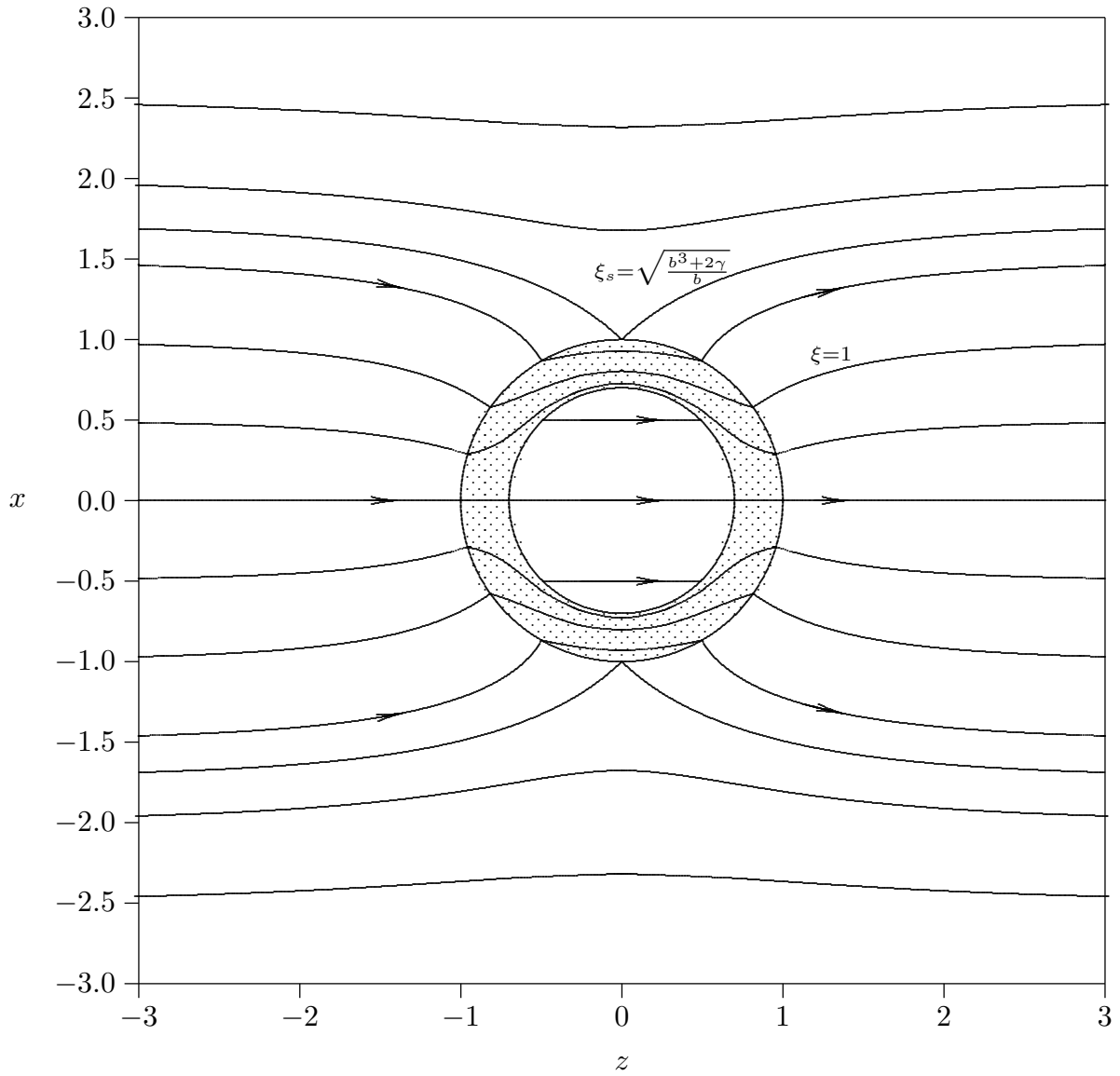


fig.11.8-2

Per comprendere meglio il meccanismo dello schermaggio, ossia della debole penetrazione del campo nella parte cava ($r < a$), vogliamo valutare il valore del parametro ξ , sia esso $\xi_s^{(i)}$, al di sopra del quale le linee di forza non penetrano nella zona cava ma vengono "guidate" all'interno dello strato.

Per questo consideriamo la (11.8.92); deve necessariamente essere:

$$\xi_1 \sqrt{\frac{r}{r^3 - 2\zeta a^3}} \leq 1 \quad (11.8.96)$$

La funzione $\sqrt{\frac{r}{r^3 - 2\zeta a^3}}$, per $r \geq a$ è decrescente all'aumentare di r ed ha il valore massimo per $r = a$. Tale valore massimo vale $\sqrt{\frac{1}{a^2(1 - 2\zeta)}}$

Ne segue che per valori di $\xi_1 > \sqrt{a^2(1 - 2\zeta)}$ la (11.8.92) è soddisfatta soltanto per valori di $r > a$ cioè le linee di forza non toccheranno mai la sfera interna di raggio a ossia esse **non penetrano nella zona cava**.

Viceversa per valori di $\xi_1 \leq \sqrt{a^2(1 - 2\zeta)}$ la (11.8.92) è soddisfatta anche per $r = a$ e quindi le linee di forza toccheranno la sfera interna e penetrano nella zona cava.

Il valore $\xi_{1s} = \sqrt{a^2(1 - 2\zeta)}$ rappresenta quindi il valore di ξ_1 al di sopra del quale le linee di forza si mantengono sempre all'interno dello strato. Ad esso corrisponde il valore $\xi_s^{(i)}$ che si può facilmente calcolare dalla formula (11.8.93).

Si ha:

$$\xi_{1s} = \xi_s^{(i)} \frac{\sqrt{\frac{b}{b^3 + 2\gamma}}}{\sqrt{\frac{b}{b^3 - 2\zeta a^3}}}$$

da cui:

$$\xi_s^{(i)} = \xi_{1s} \frac{\sqrt{\frac{b}{b^3 - 2\zeta a^3}}}{\sqrt{\frac{b}{b^3 + 2\gamma}}} = \sqrt{a^2(1 - 2\zeta)} \frac{\sqrt{\frac{b}{b^3 - 2\zeta a^3}}}{\sqrt{\frac{b}{b^3 + 2\gamma}}}$$

Il parametro $\xi_s^{(i)}$ è funzione, oltre che dei raggi a e b , del parametro costitutivo μ_r . È

interessante studiare tale andamento.

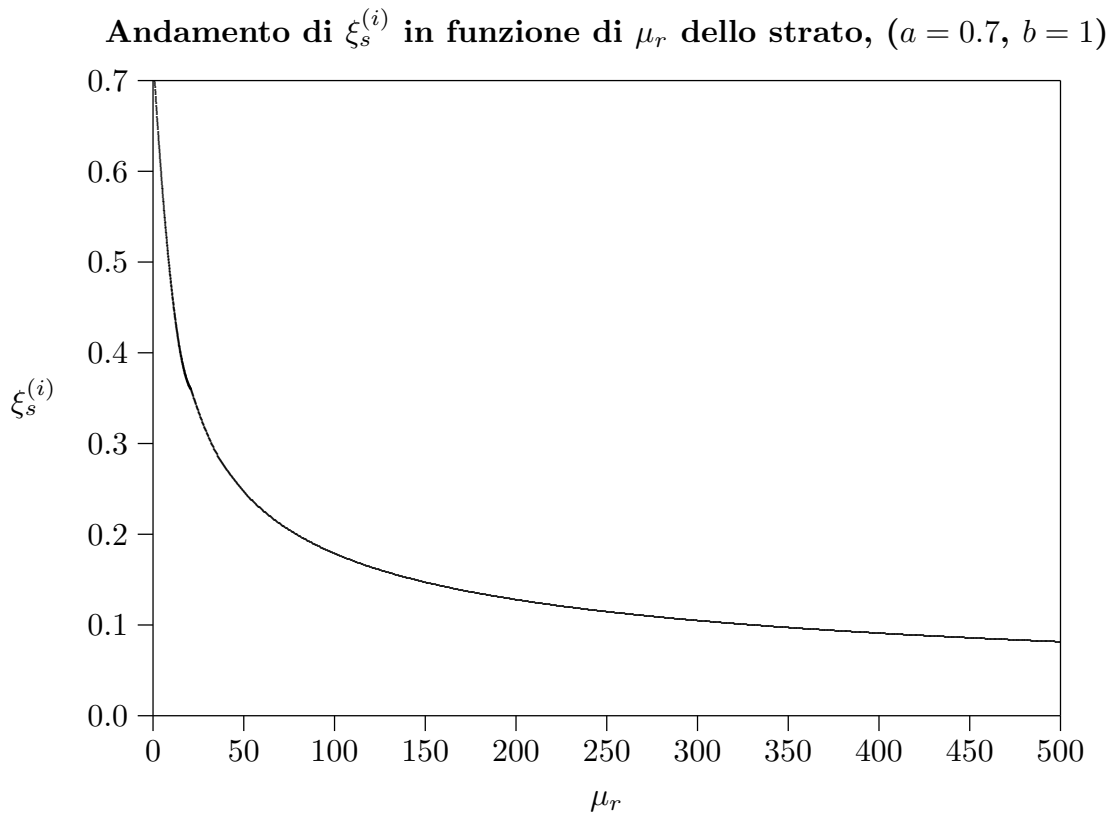


fig.11.8-3

μ_r	γ	ζ	$\xi_s^{(i)}$
1	0	0	0.7
2	0.1701	0.2	0.6758
10	0.6321	0.4286	0.4738
20	0.7822	0.4634	0.3671
50	0.9020	0.4851	0.2473
100	0.9488	0.4925	0.1789
200	0.9739	0.4963	0.1280
300	0.9824	0.4975	0.1049
400	0.9868	0.4981	0.0910
500	0.9894	0.4985	0.0815
1000	0.9947	0.4993	0.0578
5000	0.9989	0.4999	0.0259
10000	0.9995	0.4999	0.0183
...
...
∞	1	0.5	0

Come abbiamo detto penetrano nella sfera cava soltanto le linee di forza contenute in un cilindro di raggio $\xi_s^{(i)}$ con l'asse, diretto secondo le linee di forza del campo inizialmente

uniforme, passante per il centro della sfera. All'aumentare di μ_r il raggio del cilindro diminuisce e quindi soltanto una piccola porzione del campo esterno contribuisce al campo nella regione cava. Le linee di forza esterne al cilindro vengono deviate e mantenute interamente all'interno dello strato. Per $\mu_r \rightarrow \infty$, $\xi_s^{(i)} \rightarrow 0$ e tutte le linee di forza sono all'interno dello strato; nessuna linea penetra nella zona cava ed il campo di induzione magnetica interno ad essa é nullo. Le figure 11.8-4 e 11.8-5 illustrano tali situazioni. Alleghiamo il programma in ambiente matlab per il calcolo di $\xi_s^{(i)}$.

Programma Matlab csi.m

```
delete(get(0,'children'));
clf;
a=0.7;
b=1;
mu=(1:10:500)';
gamma=(2.*mu+1).*(mu-1).*(b.^3-a.^3) ./((2.*mu+1).*(mu+2)-2.*a.^3./b.^3.*...
(mu-1).^2);
zita=(mu-1)./(2.*mu+1);
csiis=sqrt(b./abs(b.^3-2.*zita.*a.^3)) ./sqrt(b./(b.^3+2.*gamma)).*sqrt(a.^2.*...
(1-2.*zita));
[mu gamma zita csiis]
plot(mu,csiis)
axis([0,500,0,0.7])
```

Alleghiamo il programma in ambiente matlab per il grafico delle linee di forza interne allo strato.

Programma Matlab strato.m

```
delete(get(0,'children'));
clf;
%grafico delle linee di forza interne allo strato nel primo quadrante
a=0.7;
b=1;
r=b:-0.01:a;
mu=2;
gamma=(2.*mu+1).*(mu-1).*(b.^3-a.^3) ./((2.*mu+1).*(mu+2)-2.*a.^3./b.^3.*...
(mu-1).^2);
zita=(mu-1)./(2.*mu+1);
csi=1;
csi1=csi.*sqrt(b./(b.^3+2.*gamma)) ./sqrt(b./(b.^3-2.*zita.*a.^3))
y=csi1.*sqrt(r./(r.^3-2.*zita.*a.^3));
z=r.*sqrt(1-y.^2);
x=r.*y;
plot(z,x)
[z;x]'
axis([0,1,0,1])
```

```
%disegno del primo quadrante dello strato
x1=0:0.001:a;
z1=sqrt(a^2-x1.^2);
hold on
zoom
plot(z1,x1)
x2=0:0.001:b;
z2=sqrt(b^2-x2.^2);
hold on
zoom
plot(z2,x2)
```

Linee di forza del campo magnetico ($\mu_r = 2$, $a = 0.7$, $b = 1$)

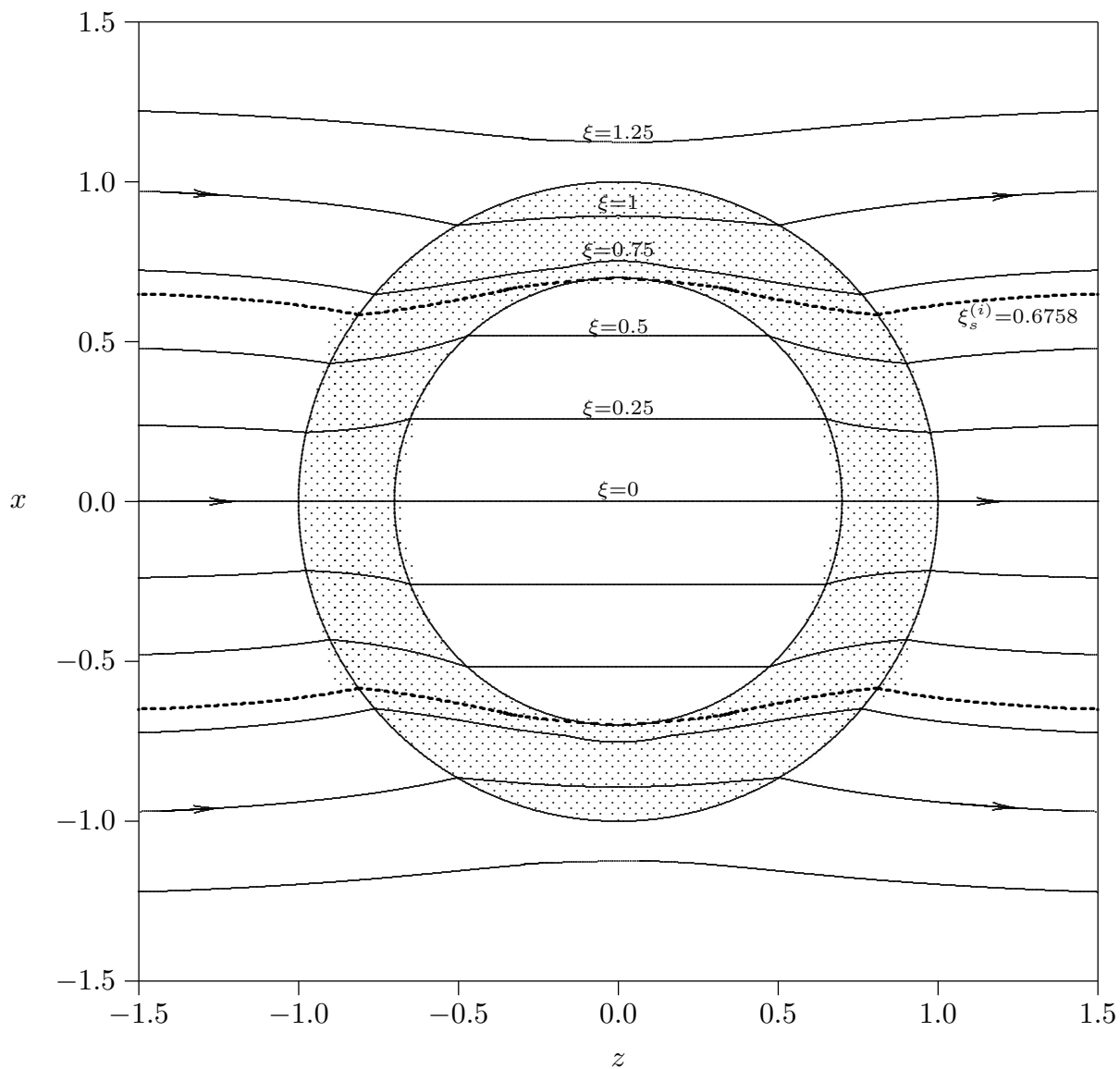


fig.11.8-4

Linee di forza del campo magnetico ($\mu_r = 20$, $a = 0.7$, $b = 1$)

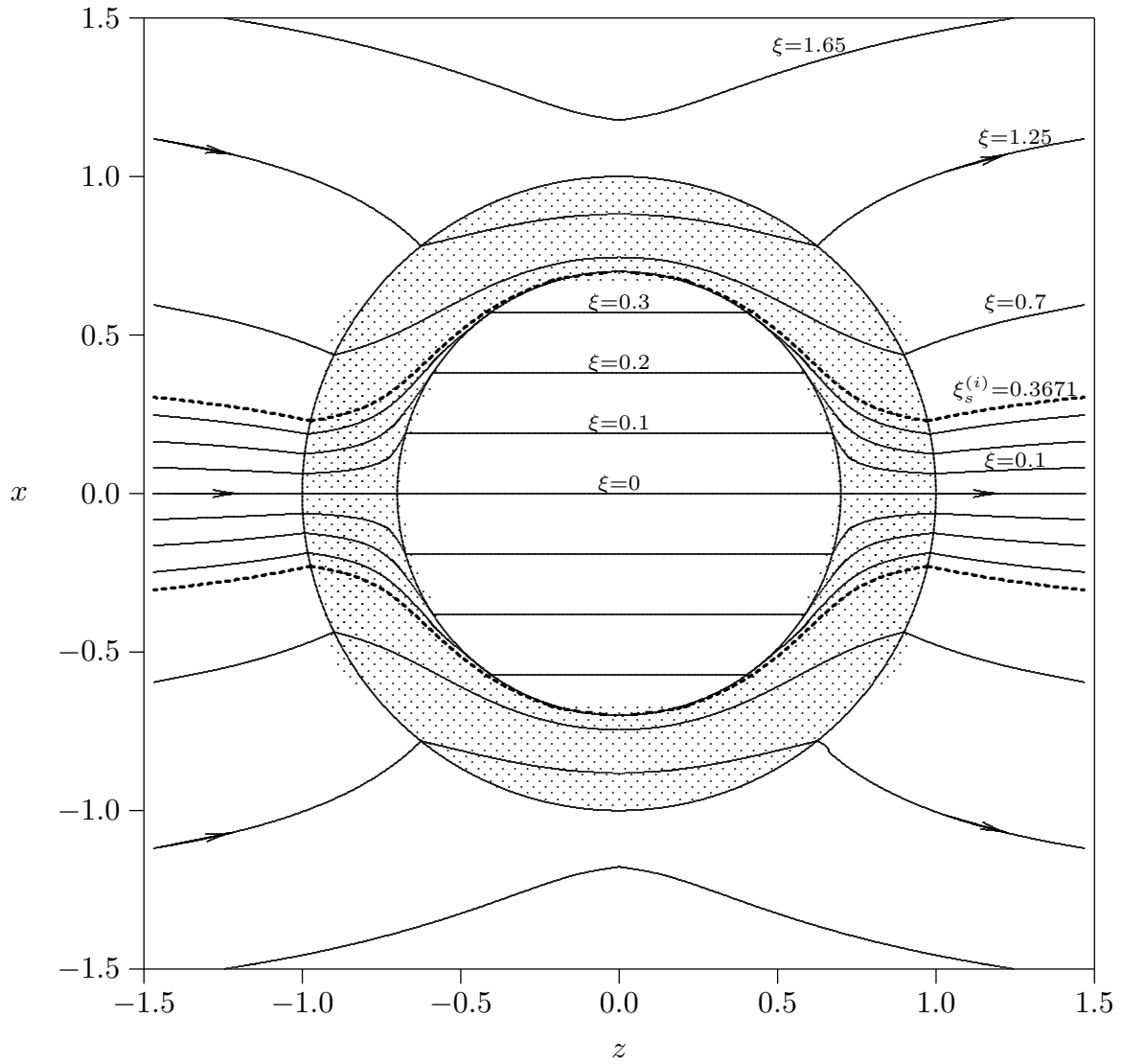


fig.11.8-5

Fine del Cap.11