

## Il campo elettrostatico nel vuoto: I

### 1.1 - Legge sperimentale di Coulomb e definizione di campo elettrico

Tutte le leggi dell'elettrostatica possono essere dedotte dalla legge sperimentale di Coulomb con la quale iniziamo questo capitolo. Questa legge stabilisce che l'intensità della forza fra due oggetti carichi varia proporzionalmente al prodotto delle quantità di cariche ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Le prime accurate misure di questa legge furono fatte nel 1785 da Charles Augustin Coulomb, utilizzando la sua bilancia di torsione recentemente inventata.

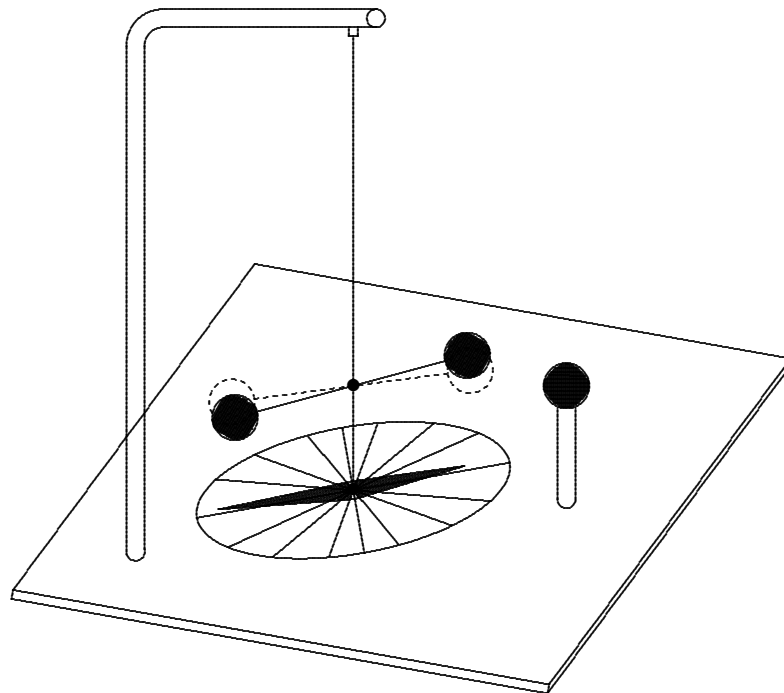


fig.1.1-1

La legge di Coulomb si scrive:

$$\vec{F}_{21} = kq_1q_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (1.1.1)$$

$k = 1$  nel sistema C.G.S.;  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  nel sistema SI;  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} F/m$

$\vec{F}_{21}$  é la forza agente su una carica **puntiforme**  $q_1$  **in quiete** posta in un punto dello spazio definito dal vettore posizione  $\vec{r}_1$ , e dovuta ad un'altra carica **puntiforme**  $q_2$  **in quiete** posta in  $\vec{r}_2$ .

I vettori posizione  $\vec{r}_1$  ed  $\vec{r}_2$  sono riferiti ad una comune origine  $O$ .

Analogamente, dalla legge espressa dalla (1.1.1) ed in modo conforme alla terza legge della dinamica, si deduce che

$$\vec{F}_{12} = kq_1q_2 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (1.1.2)$$

esprime la forza agente sulla carica  $q_2$  dovuta alla carica  $q_1$ .

Dalle (1.1.1) e (1.1.2) si deduce che se le cariche sono dello stesso segno (o entrambe +, o entrambe -), la forza é repulsiva; viceversa é attrattiva.

Se abbiamo un certo corpo carico (anche non puntiforme) e poniamo nelle sue vicinanze una piccola carica  $q$ , denominata "carica test" (di prova), si trova **sperimentalmente** che la forza che si esercita sulla carica  $q$  si può esprimere come:

$$\vec{F} = \vec{E}q \quad (1.1.3)$$

dove la funzione vettoriale  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$  prende il nome di **campo elettrico**.

Il problema fondamentale dell'elettrostatica é quello di determinare il campo elettrico generato da una assegnata distribuzione di cariche sia isolata nello spazio che in presenza di altri corpi materiali. Se una distribuzione isolata é di estensione finita, essa prende il nome di **distribuzione localizzata**.

Per esempio, il campo elettrico nel punto  $\vec{r}_2$ , generato dalla carica puntiforme  $q_1$  si può dedurre dalla legge di Coulomb dividendo la forza  $\vec{F}_{12}$  per la "carica test"  $q_2$  sulla quale agisce la forza. Risulta:

$$\vec{E}_{(q_1)}(\vec{r}_2) = kq_1 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (1.1.4)$$

Se  $q_1$  é positiva il verso del campo elettrico é "uscende" da  $q_1$ .

Generalizzando la (1.1.4) per una carica di prova  $q$  posta in una generica posizione definita dal vettore  $\vec{r}$ , si può scrivere:

$$\vec{E}_{(q_1)}(\vec{r}) = kq_1 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (1.1.5)$$

## 1.2 - Principio di sovrapposizione lineare

Da osservazioni sperimentali che le forze dovute a piú cariche si sovrappongono linearmente si deduce che: *Il campo elettrico nel punto  $\vec{r}$  dovuto ad un sistema di cariche puntiformi  $q_i$  disposte nelle posizioni  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) si può scrivere come una somma vettoriale*

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (1.2.1)$$

Se le cariche sono cosí piccole e cosí numerose da poter considerare il corpo sul quale esse sono depositate come un "continuo" si può definire una densità volumica di carica come:

$$\rho(\vec{r}') = \frac{dq'}{d^3r'} \quad \left[ \frac{\text{Coulomb}}{m^3} \right] \quad (1.2.2)$$

dove:  $d^3r'$  é il volumetto infinitesimo della distribuzione di carica,  $dq'$  é la carica contenuta in esso,  $\vec{r}'$  il vettore posizione dell'elemento considerato.

In questo caso il campo elettrico si puó esprimere come:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_V dq' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = k \int_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (1.2.3)$$

Se il corpo in questione ha una sola dimensione dominante (per es: la lunghezza nel caso di una barra) si definisce una densitá lineare di carica come:

$$\lambda(\vec{r}') = \frac{dq'}{dr'} \quad \left[ \frac{\text{coulomb}}{m} \right] \quad (1.2.4)$$

ed in questo caso il campo elettrico si puó esprimere come:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_L \lambda(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dr' \quad (1.2.5)$$

Analogamente se esso ha due dimensioni dominanti (per es: un disco) si definisce una densitá superficiale di carica come:

$$\sigma(\vec{r}') = \frac{dq'}{d^2r'} \quad \left[ \frac{\text{coulomb}}{m^2} \right] \quad (1.2.6)$$

ed in questo caso il campo elettrico si puó esprimere come:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_S \sigma(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^2r' \quad (1.2.7)$$

Si é assunto (e cosí faremo in seguito) indicare con l'apice il vettore posizione di un punto sede di carica (**punto sorgente**) e senza apice il vettore posizione di un punto dove si vuole calcolare il campo elettrico (**punto campo**).

Se le derivate al secondo membro della (1.2.2), (1.2.4) e (1.2.6) sono costanti, le relative densitá sono costanti e le distribuzioni si dicono uniformemente cariche.

### 1.3 - Calcolo di campi elettrici di alcune distribuzioni continue di carica: Distribuzione lineare ed uniforme

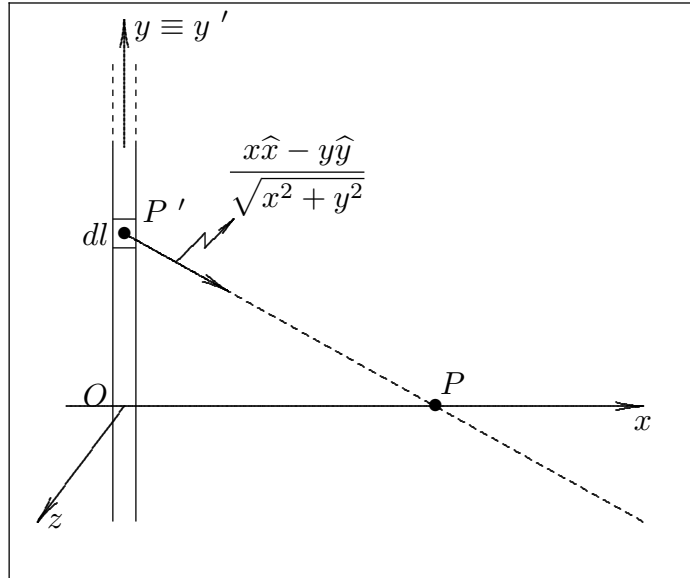


fig.1.3-1

Si abbia una distribuzione lineare di carica infinitamente estesa. Si calcoli il campo elettrico in un punto generico  $P$ .

Per motivi di simmetria, il campo si ripete identicamente su tutti i semipiani del fascio che ha per asse la distribuzione assegnata.

Individuiamo il semipiano che contiene  $P$  e scegliamo un sistema di assi cartesiani con l'asse  $\vec{y}$  coincidente con la distribuzione lineare di carica e l'asse  $\vec{x}$  passante per  $P$ .

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \lambda(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dr' = k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(x\hat{x} - y\hat{y})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy \quad (1.3.1)$$

in quanto il punto sorgente  $P'$  è individuato dalla terna  $(0, y', 0)$  con  $y' \equiv y$ , ed il punto campo  $P$  dalla terna  $(x, 0, 0)$ .

Dalla (1.3.1) segue:

$$E_x(P) = k\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy \quad (1.3.2)$$

$$E_y(P) = k\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy \quad (1.3.3)$$

Poiché:

$$\int \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{a^2(a^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}} + C \quad (1.3.4)$$

$$\int \frac{tdt}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(a^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}} + C \quad (1.3.5)$$

Si ha:

$$E_x = k\lambda x \left[ \frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 2k \frac{\lambda}{x} \quad (1.3.6)$$

Nell'equazione (1.3.6) si é tenuto conto che:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm 1 \quad (1.3.7)$$

$$E_y = k\lambda \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad (1.3.8)$$

come ci si doveva aspettare per evidenti ragioni di simmetria.

Quindi il campo risultante nel punto P é diretto lungo l'asse  $\vec{x}$  nel verso positivo se  $\lambda$  é positivo, nel verso negativo se  $\lambda$  é negativo. Se la distribuzione lineare é limitata ad un segmento di lunghezza  $2L$  ed il punto P si trova sull'asse di esso, gli estremi di integrazione negli integrali (1.3.2) e (1.3.3) sono  $-L$  e  $+L$ ; in tal caso, risulta:

$$E_x = k \frac{\lambda}{x} \frac{2L}{\sqrt{x^2 + L^2}} \quad E_y = 0 \quad (1.3.9)$$

#### 1.4 - Distribuzione piana o "strato piano"

Consideriamo una distribuzione di cariche con densitá superficiale  $\sigma$  costante su una superficie piana  $\Pi$  indefinita, e calcoliamo il campo da essa prodotto in un generico punto P posto a distanza  $d$  dal piano  $\Pi$ .

Per comoditá, scegliamo un sistema di assi cartesiani con l'asse  $\vec{z}$  normale a  $\Pi$  e passante per P e con gli assi  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  orientati come in figura.

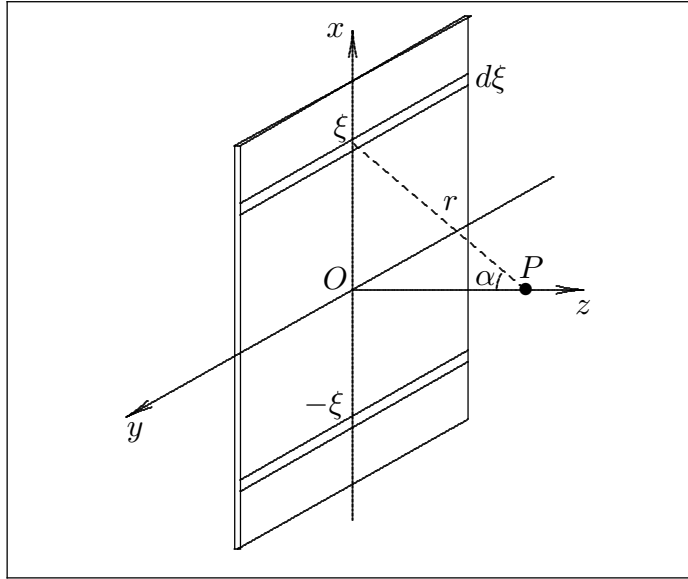


fig.1.4-1

Considerate poi due distribuzioni lineari di carica di spessore  $d\xi$ , poste simmetricamente a distanza  $\xi$  dall'asse  $\vec{y}$ , si verifica subito, sulla base dei risultati dell'esempio precedente, (1.3.6), e per evidenti ragioni di simmetria, che il campo da esse prodotto in P é diretto secondo l'asse  $\vec{z}$ .

$$dE_z = 2dE \cos \alpha = 2 \left( 2k \frac{\sigma d\xi}{r} \cos \alpha \right) \quad (1.4.1)$$

in quanto:  $\lambda = \frac{dq}{dy} = \frac{dq d\xi}{dy d\xi} = \sigma d\xi$

Si ha:  $r = \sqrt{d^2 + \xi^2}$ ,  $d = r \cos \alpha$ ,  $\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \xi^2}}$

Ne segue:

$$E_z = 4k\sigma \int_0^\infty \frac{d}{d^2 + \xi^2} d\xi$$

Posto  $x = \frac{\xi}{d}$ , da cui  $d\xi = d \cdot (dx)$ , segue:

$$E_z = 4k\sigma \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = 4k\sigma [\arctan x]_0^\infty = 4k\sigma \frac{\pi}{2} \quad (1.4.2)$$

Nel sistema SI la (1.4.2) diventa:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.4.3)$$

che esprime l'**uniformità** del campo generato dalla distribuzione piana.

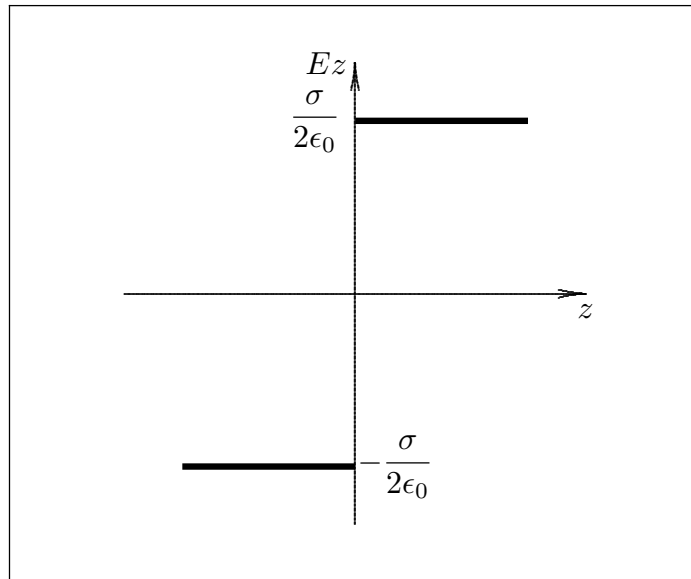


fig.1.4-2

### 1.5 - Doppio strato piano di cariche

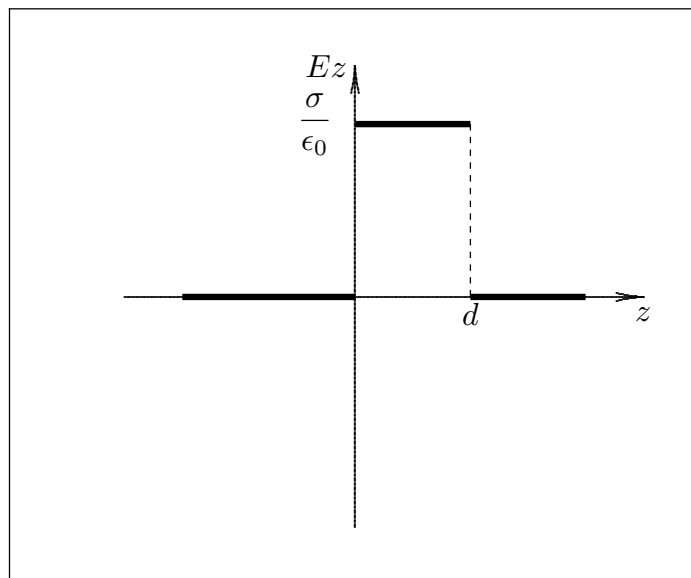


fig.1.5-1

Consideriamo una distribuzione di cariche costituita da due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  paralleli fra loro e separati da una distanza  $d$ ; siano rispettivamente  $+\sigma$  e  $-\sigma$  i valori uniformi delle densità di carica distribuite su essi.

Applicando il principio di sovrapposizione e utilizzando i risultati relativi allo "strato piano", si deduce che il campo é nullo nelle zone esterne ed é confinato nella zona compresa fra i due piani, dove esso vale:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.5.1)$$

### 1.6 - Legge di Gauss

Si abbia una carica puntiforme  $q$  interna ad una superficie chiusa  $S$ . Calcoliamo

$$\vec{E} \cdot \hat{n} da = k \frac{q}{r^2} \cos \theta da \quad (1.6.1)$$

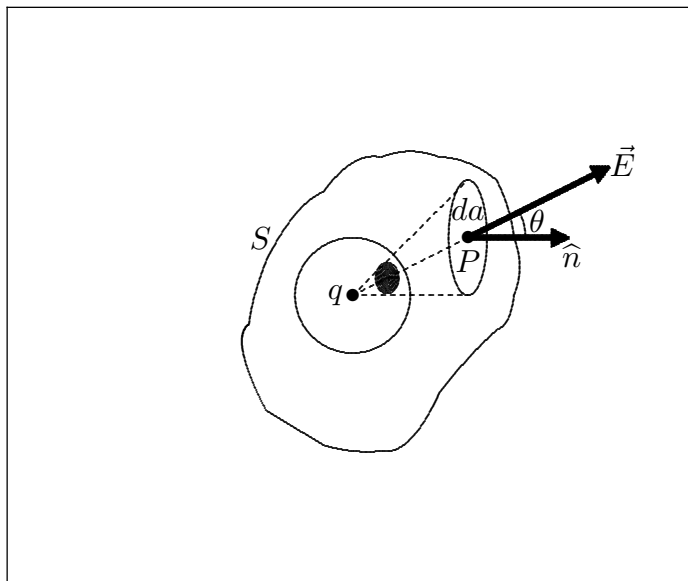


fig.1.6-1

Si definisce angolo solido infinitesimo l'elemento

$$d\Omega = \frac{da \cos \theta}{r^2} \quad (1.6.2)$$

Ne segue:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} da = k q d\Omega \quad (1.6.3)$$



Integrando su tutta la superficie chiusa si ha:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = k \oint_S q d\Omega = kq \oint_S d\Omega \quad (1.6.4)$$

Dimostriamo che  $\oint_S d\Omega = 4\pi$ .

Consideriamo una sfera e, a partire dal centro posto sulla carica puntiforme, stacciamo una superficie infinitesima  $dS$ ; si ha, in questo caso,  $dS = r_{sfera}^2 d\Omega$  in quanto l'angolo solido sotteso é lo stesso.

Integrando:  $\oint_{S (sfera)} dS = r_{sfera}^2 \oint_S d\Omega$  cioè  $4\pi r_{sfera}^2 = r_{sfera}^2 \oint_S d\Omega \rightarrow \oint_S d\Omega = 4\pi$ .

Ne segue la **legge di Gauss**:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi kq \quad (1.6.5)$$

Se invece di una singola carica  $q$  abbiamo un insieme discreto di cariche otteniamo:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi k \sum_i q_i \quad (1.6.6)$$

Analogamente per un insieme continuo di cariche di densità  $\rho(\vec{r}')$  si ha:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi k \int_V \rho(\vec{r}') d^3r' \quad (1.6.7)$$

dove  $V$  é il volume racchiuso da  $S$ .

Il primo membro prende il nome di **flusso del vettore  $\vec{E}$  attraverso la superficie chiusa  $S$** .

### 1.7 - Espressioni differenziali delle leggi del campo elettrico

Definiamo l'operatore  $\vec{\nabla}$ , in coordinate cartesiane, l'espressione:

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.7.1)$$

Siano  $\Phi$  ed  $\vec{A}$  due funzioni: scalare e vettoriale rispettivamente.

Definiamo:

$$\vec{\nabla}\Phi = \hat{x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (\text{Gradiente della funzione scalare } \Phi) \quad (1.7.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \left( \text{Divergenza della funzione vettoriale } \vec{A} \right) \quad (1.7.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (1.7.4)$$

L'ultima espressione prende il nome di **rotore della funzione vettoriale**  $\vec{A}$ .  
Ancora si ha:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad \left( \text{Laplaciano della funzione scalare } \Phi \right) \quad (1.7.5)$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3 r \quad \left( \text{Teorema della divergenza} \right) \quad (1.7.6)$$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{n} da \quad \left( \text{Teorema di Stokes} \right) \quad (1.7.7)$$

### 1.8 - Legge di Gauss in forma differenziale

Consideriamo la legge di Gauss in forma integrale data dalla (1.6.7):

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi k \int_V \rho(\vec{r}') d^3 r'$$

Applicando al primo membro il teorema della divergenza, si ha:

$$\int_V \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 4\pi k \rho \right) d^3 r' = 0 \quad (1.8.1)$$

Data l'arbitrarietà di V segue:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k \rho \quad \left( \text{Legge di Gauss in forma differenziale} \right) \quad (1.8.2)$$

### 1.9 - Funzione potenziale e irrotazionalità del campo elettrostatico

Troviamo, adesso, un'altra legge importante per il campo elettrostatico.

Sia

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (1.9.1)$$

Tenendo presente che

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (1.9.2)$$

si ha:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k\vec{\nabla} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (1.9.3)$$

Nella (1.9.3) si é portato fuori dall'integrale l'operatore  $\vec{\nabla}$  perché esso opera su coordinate non apicate mentre la variabile di integrazione é la coordinata  $\vec{r}'$ .

La funzione scalare

$$\Phi(\vec{r}) = k \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (1.9.4)$$

prende il nome di **potenziale scalare elettrostatico**.

La (1.9.3) si può, quindi, scrivere:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi \quad (1.9.5)$$

che esprime la possibilità di poter derivare il campo elettrico da una funzione scalare  $\Phi(\vec{r})$ .

Applicando alla (1.9.5) vettorialmente a sinistra l'operatore  $\vec{\nabla}$  si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = 0 \quad (1.9.6)$$

in quanto si può dimostrare che  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = 0$ .

L'equazione (1.9.6) esprime l'**irrotazionalità** del campo elettrostatico.

Dalla definizione di  $\Phi(\vec{r})$  e dalla (1.9.5) si deduce che essa é definita a meno di una costante arbitraria; infatti:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(\Phi + C) = -\vec{\nabla}\Phi \quad (1.9.7)$$

Le due leggi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k\rho \quad (1.9.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.9.9)$$

costituiscono le **equazioni fondamentali dell'elettrostatica**.

Esse si possono raggruppare in un'unica equazione differenziale di secondo ordine; infatti, sostituendo nella (1.9.8) la (1.9.5) che é equivalente alla (1.9.9), si ha:

$$\nabla^2\Phi = -4\pi k\rho \quad \text{Equazione di Poisson} \quad (1.9.10)$$

Se  $\rho = 0$

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{Equazione di Laplace} \quad (1.9.11)$$

Le equazioni differenziali (1.9.10) e (1.9.11) rappresentano uno strumento utilissimo per il calcolo del campo generato da una distribuzione di cariche in presenza di altri mezzi materiali.

### 1.10 - Significato fisico di $\Phi(\vec{r})$

Il potenziale scalare acquista un significato fisico quando si considera il lavoro compiuto nel trasportare una carica di prova da un punto  $A$  ad un punto  $B$  in presenza di un campo elettrico  $\vec{E}(\vec{r})$ .

La forza che in ogni posizione agisce sulla carica é:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

ed il lavoro fatto trasportandola da  $A$  a  $B$  é:

$$W = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1.10.1)$$

Il segno meno deriva dal fatto che stiamo calcolando il lavoro fatto sulla carica, contro le azioni del campo.

$$W = q \int_A^B \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = q \int_A^B d\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A) \quad (1.10.2)$$

Nella (1.10.2) abbiamo tenuto conto che il differenziale di una funzione a piú variabili é:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \quad (1.10.3)$$

Quindi il termine  $q\Phi$  puó essere interpretato come l'energia potenziale della carica di prova nel campo elettrostatico.

Ne segue, anche, che l'integrale di linea del campo elettrico fra due punti é indipendente dal cammino percorso ed é eguale alla differenza di potenziale fra il punto di arrivo ed il punto di partenza, cambiata di segno:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(\Phi_B - \Phi_A) \quad (1.10.4)$$

Se il percorso di integrazione é chiuso l'integrale di linea é zero.

### 1.11 - Esempi di calcolo di potenziale elettrostatico: Potenziale di una carica puntiforme

Cominciamo con l'osservare che il potenziale di una carica puntiforme  $q$ , posta nel punto  $\vec{r}'$ , valutato nel punto  $\vec{r}$ , in virtù delle formule (1.1.5), (1.9.2) e (1.9.3), é:

$$\Phi_{puntiforme} = k \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.11.1)$$

La costante  $C$  che figura nella (1.9.7) viene assunta nulla in modo che il **potenziale (1.11.1) si annulli all'infinito**.

Tale formula esprime anche il potenziale generato da una distribuzione infinitesima di cariche ed é quindi utilissima per il calcolo integrale del potenziale generato da una distribuzione finita.

Se la carica sorgente é **posta nell'origine delle coordinate**, nella (1.11.1) si pone  $\vec{r}' = 0$  e si scriverá:

$$\Phi_{puntiforme} = k \frac{q}{|\vec{r}|} \quad (1.11.2)$$

### 1.12 - Potenziale di un anello circolare nei punti dell'asse

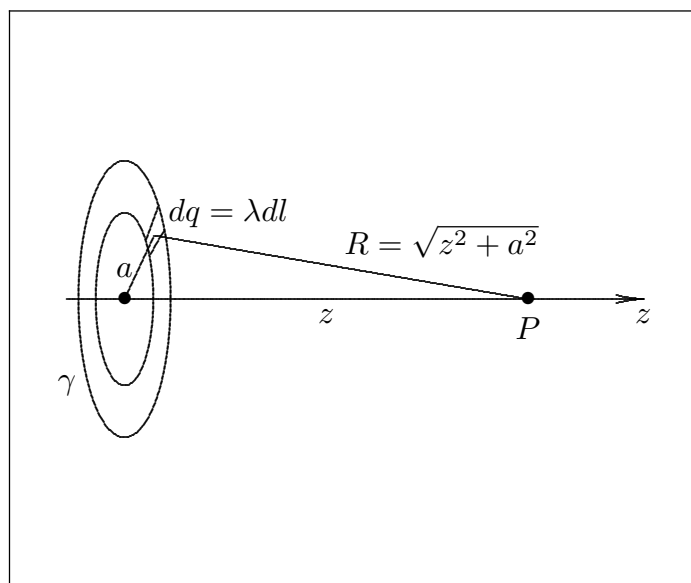
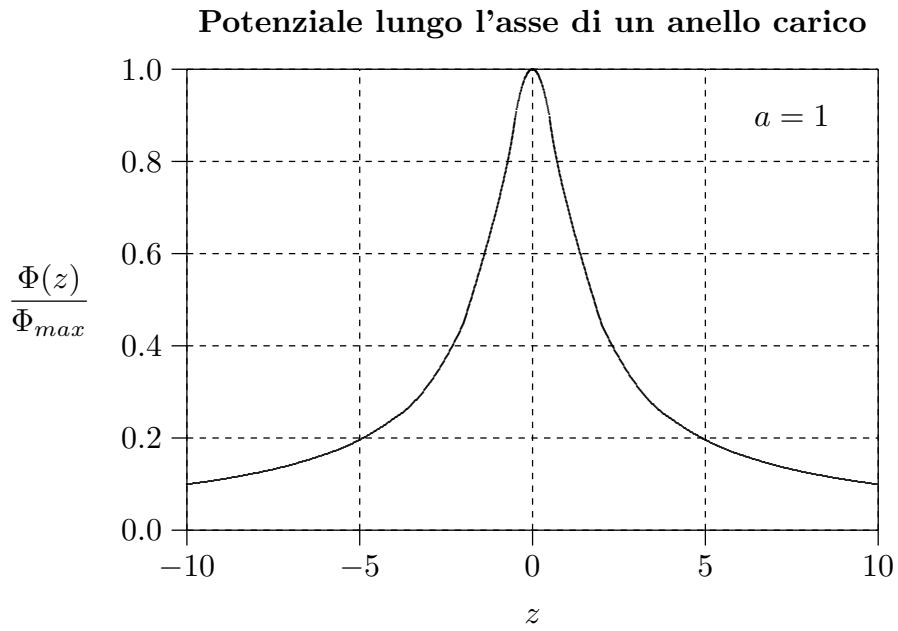


fig.1.12-1

Si abbia una distribuzione di cariche sorgenti con densitá lineare uniforme  $\lambda$  su una circonferenza  $\gamma$  di raggio  $a$ .



Calcoliamo il potenziale prodotto sui punti dell'asse di  $\gamma$ :

$$d\Phi = k \frac{\lambda dl}{R} \quad \rightarrow \quad \Phi = \oint_{\gamma} k \frac{\lambda dl}{R} = k \frac{\lambda}{R} 2\pi a = k \frac{\lambda 2\pi a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (1.12.1)$$

La funzione presenta un massimo in corrispondenza di  $z = 0$  che vale:  $\Phi_{max} = k\lambda 2\pi$ . In figura (1.12.2) é graficata la funzione potenziale normalizzata cioè  $\Phi(z)/\Phi_{max}$ .

Si verifichi che la curva ha un flesso per  $z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

Il campo elettrico é:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{2k\pi a\lambda z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.12.2)$$

$$\text{Per } z \ll a \rightarrow E_{z(z \ll a)} \simeq \frac{2k\pi\lambda}{a^2} z; \quad \text{Per } z \gg a \rightarrow E_{z(z \gg a)} \simeq \frac{2k\pi a\lambda}{z^2} \quad (1.12.3)$$

Il massimo del campo elettrico corrisponde ai punti di flesso del potenziale.

**Campo elettrico lungo l'asse di un anello carico**

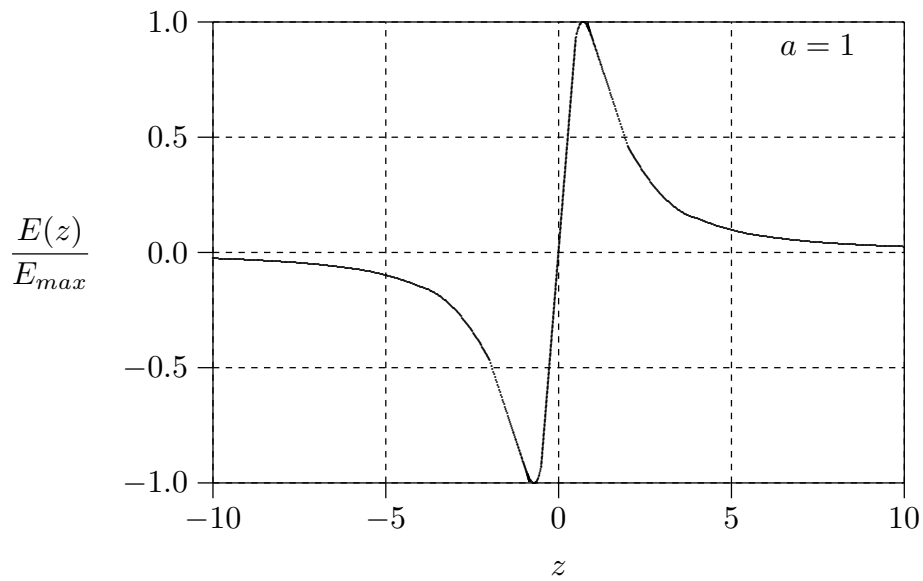


fig.1.12-3

Un risultato importante che possiamo dedurre dall'esempio discusso é che, come si puó osservare dalla (1.12.1) e dalla (1.12.3), **il potenziale ed il campo elettrico di una distribuzione localizzata di cariche elettriche si annullano all'infinito con legge  $\frac{1}{r}$  e  $\frac{1}{r^2}$  rispettivamente.** Tale risultato sará rigorosamente dimostrato in seguito. Lo stesso non si puó affermare nel caso di distribuzioni infinitamente estese di cariche.

**1.13 - Calcolo diretto del campo elettrostatico dovuto ad un anello circolare carico, nei punti dell'asse**

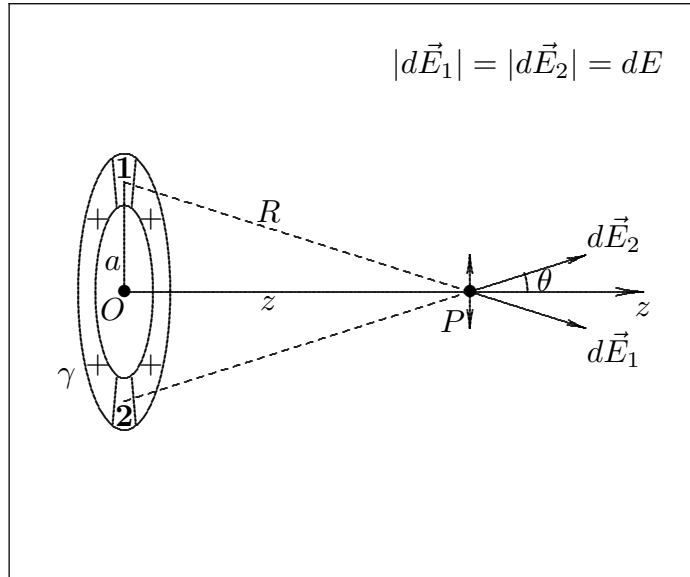


fig.1.13-1

Consideriamo sull'anello due elementi infinitesimi diametralmente opposti; per evidenti ragioni di simmetria il campo elettrico risultante é diretto lungo l'asse  $\vec{z}$ :

$$dE_z = 2dE \cos \theta = 2k \frac{\lambda dl}{R^2} \cos \theta \quad (1.13.1)$$

Ma  $z = R \cos \theta$  e  $R = \sqrt{a^2 + z^2}$  per cui:  $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$

Quindi:

$$dE_z = k \frac{2\lambda z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dl$$

$$E_z = k \frac{2\lambda z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi a d\alpha = k \frac{2\pi \lambda a z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.13.2)$$

**1.14 - Potenziale di un disco circolare uniformemente carico in un punto situato sull'asse di simmetria perpendicolare al disco nel suo centro**

Sia un disco di raggio  $R$  situato sul piano  $xy$  con il centro nell'origine delle coordinate.



Consideriamo una corona circolare di raggi  $r$  e  $r + dr$ . Detta  $\sigma$  la densità superficiale di carica che supponiamo uniforme, il potenziale  $\Phi$  in un generico punto  $P$  sull'asse é dato da:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma}{l} dS \quad (1.14.1)$$

essendo  $\Sigma$  la superficie totale del disco,  $dS$  la superficie infinitesima staccata sulla corona circolare e  $l$  la distanza del punto  $P$  dall'elemento  $dS$ .

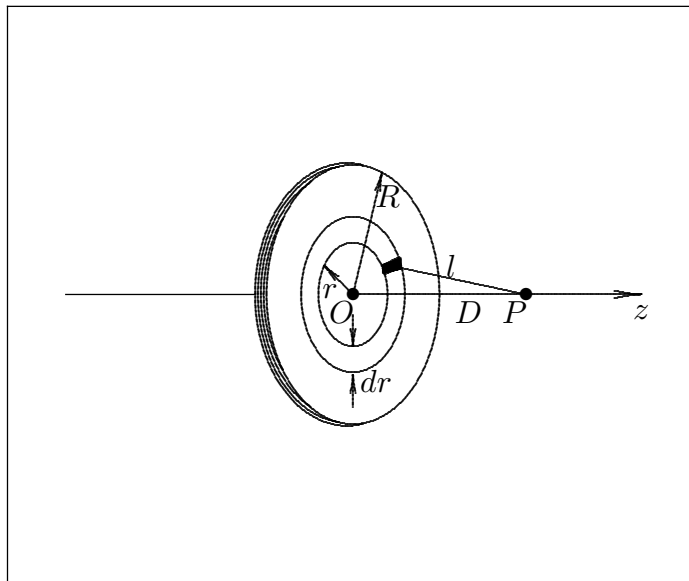


fig.1.14-1

Poiché come si vede dalla figura:  $dS = rd\alpha dr$ , si ha:

$$\Phi(P) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{rd\alpha dr}{\sqrt{r^2 + D^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{r^2 + D^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + D^2} - \sqrt{D^2} \right] \quad (1.14.2)$$

Per  $P$  situato sull'asse  $z$  positivo, si ha:

$$\Phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + D^2} - D \right] \quad \text{per } D \geq 0 \quad (1.14.3)$$

in quanto si é presa la radice positiva  $+\sqrt{D^2}$  per fare in modo che  $\Phi \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow 0$  (cioé in assenza del disco).

Per  $P$  situato sull'asse  $z$  negativo si ha:

$$\Phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + D^2} + D \right] \quad \text{per } D \leq 0 \quad (1.14.4)$$

La formula generale é:

$$\Phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + D^2} - |D| \right] \quad (1.14.5)$$

La figura mostra l'andamento di  $\Phi$  (normalizzato a 1) in funzione della distanza.

**Potenziale di un disco circolare carico lungo l'asse di simmetria**

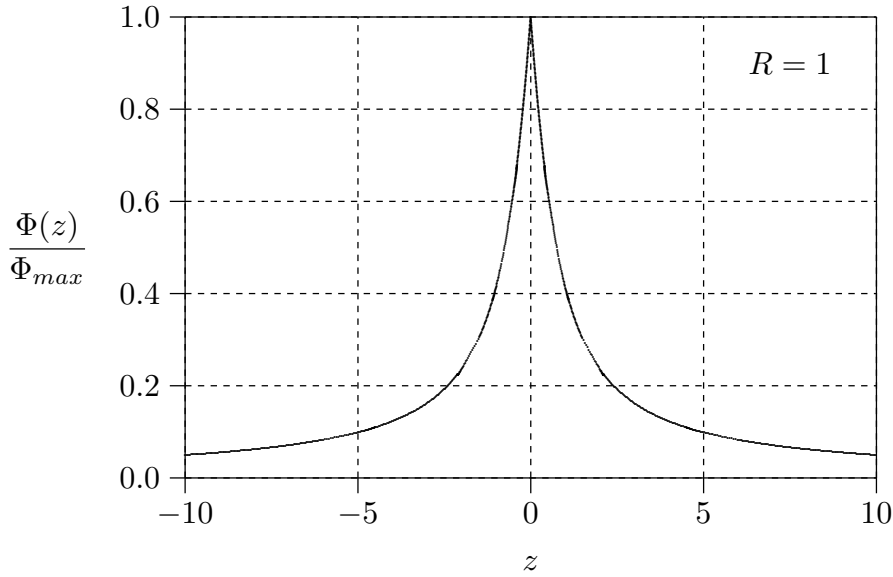


fig.1.14-2

**1.15 - Potenziale di un guscio sferico carico**

Consideriamo una superficie sferica  $\Sigma$  di raggio  $R_0$  sulla quale sia distribuita una carica con densità uniforme  $\sigma$ .

Suddividendo la superficie in "nastri circolari" infinitesimi di carica  $dq$  e di asse  $z$ , é possibile calcolare il potenziale in un punto generico P.

$$d\Phi = k \frac{dq}{R} = k \frac{\sigma dS}{R} \quad (1.15.1)$$

$$dS = 2\pi a R_0 d\theta \quad a = R_0 \sin \theta \quad dS = 2\pi R_0^2 \sin \theta d\theta$$

Per inciso:  $\frac{dS}{R_0^2} = d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ .

Per il teorema di Carnot:

$$R = (R_0^2 + z^2 - 2R_0 z \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\Phi = k \frac{\sigma 2\pi R_0^2 \sin \theta d\theta}{(R_0^2 + z^2 - 2R_0 z \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.15.2)$$

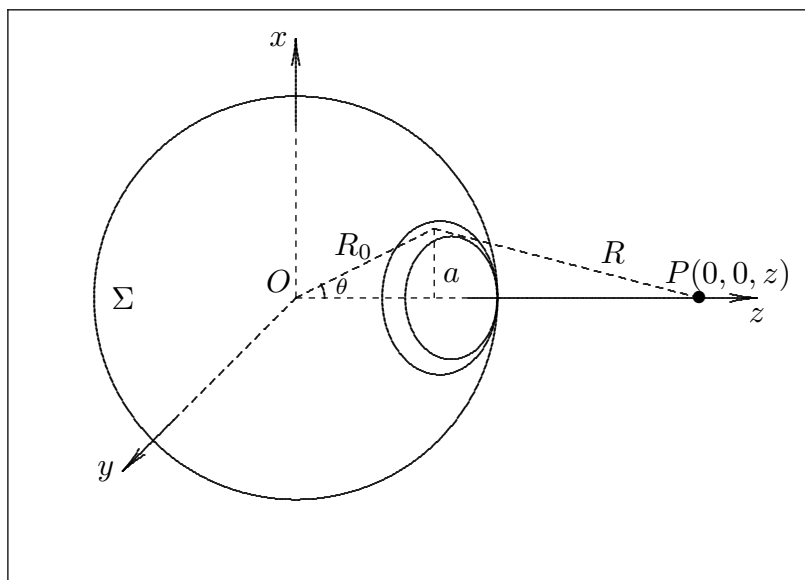


fig.1.15-1

Integrando sull'intera superficie sferica con  $\theta$  che varia da 0 a  $\pi$ , si ha:

$$\begin{aligned} \Phi(0, 0, z) &= k \int_0^\pi \frac{\sigma 2\pi R_0^2 \sin \theta d\theta}{(R_0^2 + z^2 - 2R_0 z \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= k\sigma 2\pi R_0^2 \left[ \frac{1}{R_0 z} (R_0^2 + z^2 - 2R_0 z \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{k2\pi\sigma R_0}{z} \left[ (R_0^2 + z^2 + 2R_0 z)^{\frac{1}{2}} - (R_0^2 + z^2 - 2R_0 z)^{\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{k2\pi\sigma R_0}{z} [|R_0 + z| - |R_0 - z|] \end{aligned} \quad (1.15.3)$$

$$\Phi(0, 0, z) = \begin{cases} \frac{k2\pi\sigma R_0}{z} [(R_0 + z) - (R_0 - z)] & \text{per } z \leq R_0 \\ \frac{k2\pi\sigma R_0}{z} [(R_0 + z) - (z - R_0)] & \text{per } z \geq R_0 \end{cases} \quad (1.15.4)$$

Ne segue:

$$\Phi(0, 0, z) = \begin{cases} 4\pi k\sigma R_0 & \text{per } z \leq R_0 \text{ (punti interni)} \\ \frac{4\pi k\sigma R_0^2}{z} & \text{per } z \geq R_0 \text{ (punti esterni)} \end{cases} \quad (1.15.5)$$

In funzione di  $Q = 4\pi R_0^2 \sigma$  si ha:

$$\Phi(0, 0, z) = \begin{cases} k \frac{Q}{R_0} & \text{per } z \leq R_0 \text{ (punti interni)} \\ k \frac{Q}{z} & \text{per } z \geq R_0 \text{ (punti esterni)} \end{cases} \quad (1.15.6)$$

Il campo  $\vec{E}$  é:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi; \quad \text{per } z < R_0 \rightarrow \vec{E} = 0, \quad \text{per } z > R_0 \rightarrow \vec{E} = k \frac{Q}{z^2} \hat{z} \quad (1.15.7)$$

Dalla (1.15.7) si evince che **il campo competente ad una distribuzione sferica di cariche si comporta, nei punti esterni, come se fosse generato da una carica puntiforme.**