

Cap. 9

Caratteristiche dispersive dei dielettrici e dei conduttori

9.1 - Equazione del moto di un elettrone legato

Abbiamo dimostrato che la velocità con cui si propagano le superfici di fase costante delle onde elementari dipende dai parametri ϵ , μ e σ . In particolare, se il mezzo non è conduttore e se i parametri ϵ e μ sono indipendenti dalla frequenza del campo applicato, la velocità di fase risulta costante ed il segnale applicato si propaga senza dispersione. Se, invece come abbiamo visto, il mezzo ha una conduttività diversa da zero, la velocità di fase è funzione della frequenza, e inoltre si ha attenuazione.

Di conseguenza, le componenti armoniche di un segnale subiscono degli sfasamenti nella direzione di propagazione e la forma del segnale che arriva in un punto distante risulta modificata e talvolta irriconoscibile. Un mezzo nel quale la velocità di fase è funzione della frequenza si dice **mezzo dispersivo**.

Tuttavia, per frequenze sufficientemente alte, un mezzo può presentare proprietà dispersive anche se la conduttività dovuta alle cariche libere è del tutto trascurabile. Nei mezzi dielettrici la velocità di fase è legata all'indice di rifrazione n dalla relazione $v = \frac{c}{n}$ dove $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$. A frequenze minori di 10^8 Hz la permeabilità elettrica relativa della maggior parte dei materiali è essenzialmente indipendente dalla frequenza, ma manifesta una notevole dipendenza da essa in un intervallo che spesso inizia dalle frequenze radio corrispondenti a onde ultracorte e si estende all'infrarosso e oltre. Così, mentre l'indice di rifrazione dell'acqua a frequenze minori di 10^8 Hz è di circa 9, esso presenta delle fluttuazioni a frequenze dell'ordine di 10^{10} Hz e diminuisce fino a 1.32 nell'infrarosso. Fatta eccezione per le soluzioni o i cristalli di sali ferromagnetici, l'azione dispersiva di un isolante può essere attribuita esclusivamente a una dipendenza di ϵ_r dalla frequenza.

La teoria della dispersione dá buoni risultati anche se viene svolta classicamente senza l'intervento della fisica quantistica; ci si serve di un semplice modello meccanico che fu proposto inizialmente da Maxwell e in seguito modificato da Lorentz il quale riuscì a spiegare, almeno qualitativamente, un gran numero di fenomeni elettrici e ottici.

La teoria consiste nella valutazione del momento di dipolo indotto su un atomo quando esso viene colpito da un campo elettromagnetico. Il caso statico è stato discusso nel corso di Fisica II; qui consideriamo campi elettromagnetici monocromatici di frequenza angolare ω .

Il semplice modello atomico consiste nel considerare gli elettroni legati elasticamente agli ioni. Ogni carica e è legata con una forza di richiamo $\vec{F} = -m\omega_0^2\vec{r}$ dove m è la massa dell'elettrone, ed ω_0 è la pulsazione naturale del sistema cioè la pulsazione alla quale oscillerebbe l'elettrone se, spostato dalla sua posizione di equilibrio, venisse lasciato libero di oscillare. Come vedremo, dalla teoria della radiazione si dimostra che una carica accelerata emette radiazione elettromagnetica a spese naturalmente della sua energia cinetica, ne segue che l'oscillatore in questione è smorzato, cioè l'equazione del moto degli elettroni deve contenere una forza di resistenza al moto di tipo $\vec{F}_a = -m\gamma\dot{\vec{r}}$.

La legge del moto di un elettrone legato elasticamente e sottoposto ad un campo

elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ é:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2 \vec{r} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (9.1.1)$$

Nella (9.1.1) abbiamo trascurato gli effetti della forza dovuta al campo magnetico associato con il campo elettrico. Poiché certamente l'ampiezza di oscillazione dell'elettrone é molto piccola, abbiamo trascurato la dipendenza spaziale del campo elettrico ed assunto per esso il valore competente alla posizione di equilibrio dell'elettrone.

Come soluzione particolare della (9.1.1) assumiamo la soluzione risonante con il campo elettrico, ossia una soluzione del tipo:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t} \quad (9.1.2)$$

Sostituendo la (9.1.2) nella (9.1.1), dopo aver diviso ciascun termine per m , si ha:

$$-\omega^2 \vec{r} - i\omega\gamma \vec{r} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (9.1.3)$$

da cui:

$$\vec{r} = \frac{e}{m} (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)^{-1} \vec{E} \quad (9.1.4)$$

Poiché la soluzione generale dell'equazione omogenea associata all'equazione (9.1.1) é certamente un esponenziale reale decrescente, **la (9.1.4) rappresenta anche la soluzione generale a regime.**

Il momento di dipolo dell'atomo dovuto al singolo elettrone é, allora, istante per istante:

$$\vec{p} = e\vec{r} = \frac{e^2}{m} (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)^{-1} \vec{E} \quad (9.1.5)$$

Ora, come sappiamo, ogni atomo o molecola é in grado di assorbire energia dovuta a campi elettromagnetici che abbiano frequenza coincidente con le frequenze proprie dei singoli elettroni.

Supponiamo di considerare un mezzo che contenga N molecole per unitá di volume, ciascuna con Z elettroni e che vi siano f_j elettroni per molecola con frequenza propria ω_j e costante di smorzamento γ_j . Facciamo l'ulteriore ipotesi che non vi sia differenza fra il campo elettrico applicato ed il campo locale agente sulla singola molecola.

Indicando con \vec{P} la polarizzazione cioé il momento di dipolo per unitá di volume si ha:

$$\vec{P} = N\vec{p} = \chi \vec{E} \quad (9.1.6)$$

dove χ é la suscettività elettrica. Ne segue che:

$$\chi = N \frac{e^2}{m} \sum_j f_j (\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1} \quad (9.1.7)$$

Ricordando la definizione di costante dielettrica $\epsilon = \epsilon_0 + \chi = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}\right)$ si ha:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j f_j (\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1} \right] \quad (9.1.8)$$

Naturalmente per le f_j si ha: $\sum_j f_j = Z$

9.2 - Dispersione anomala e assorbimento di risonanza

Le costanti di smorzamento γ_j sono generalmente piccole rispetto alle frequenze di legame o di risonanza ω_j . Questo significa che $\epsilon(\omega)$ é approssimativamente reale per la maggior parte delle frequenze. Il fattore $(\omega_j^2 - \omega^2)^{-1}$ é positivo per $\omega < \omega_j$ e negativo per $\omega > \omega_j$. Pertanto alle basse frequenze, al di sotto della piú piccola delle ω_j tutti i termini della somma nella (9.1.8) sono positivi ed $\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}$ é maggiore dell'unitá.

Man mano che ω cresce superando i successivi valori di ω_j , nella somma compare un numero sempre maggiore di termini negativi finché alla fine l'intera somma é negativa ed $\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}$ é minore di 1. Per ω prossimo a ciascuna delle frequenze ω_j la variazione di $\epsilon(\omega)$ diventa abbastanza brusca. La parte reale del denominatore nella (9.1.8) si annulla per $\omega = \omega_j$ nel corrispondente termine della somma e il termine stesso diventa grande e immaginario puro. Consideriamo un singolo termine della (9.1.8), si ha:

$$\Re[\epsilon_r(\omega)] = 1 + A \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (9.2.1)$$

$$\Im[\epsilon_r(\omega)] = A \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (9.2.2)$$

Un aumento di $\Re[\epsilon_r(\omega)]$ al crescere di ω corrisponde alla dispersione chiamata normale, mentre l'andamento opposto viene indicato come dispersione anomala. Come si vede si ha generalmente dispersione normale, tranne che nella immediata vicinanza di una frequenza di risonanza, e solo nel caso di dispersione anomala la parte immaginaria di $\epsilon(\omega)$ é sensibilmente diversa da zero. La parte immaginaria di $\epsilon(\omega)$ é sempre positiva.

Poiché ad una parte immaginaria positiva corrisponde come vedremo, una dissipazione dell'energia dell'onda elettromagnetica nel mezzo, le regioni in cui $\Im[\epsilon(\omega)]$ é grande vengono chiamate regioni di assorbimento risonante. In un maser o laser $\Im[\epsilon(\omega)]$ é < 0 e quindi l'energia viene ceduta dal mezzo all'onda ottenendo amplificazione.

Vediamo adesso il comportamento di un campo elettromagnetico in un mezzo dielettrico dispersivo di costante dielettrica relativa data dalla (9.1.8) in cui si considera però soltanto una risonanza:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (9.2.3)$$

Supponendo, come di solito accade, che la permeabilitá del mezzo sia μ_0 , le equazioni di Maxwell diventano:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.2.4)$$

e, di conseguenza, le componenti ortogonali dei vettori di campo soddisfano alle equazioni delle onde:

$$\nabla^2 \Psi - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (9.2.5)$$

Un'onda piana, soluzione della (9.2.5) é rappresentata dalla:

$$\Psi = \Psi_0 e^{ikz - i\omega t} \quad (9.2.6)$$

dove

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} = \beta + i\alpha \quad (9.2.7)$$

L'onda si propaga nel mezzo con velocità $v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{n}$ ma β e l'indice di rifrazione sono ora funzioni esplicite della frequenza, che si ottengono introducendo la (9.2.3) nella (9.2.7); si ha:

$$\frac{c}{\omega} (\beta + i\alpha) = \sqrt{1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}} \quad (9.2.8)$$

Discutiamo la (9.2.8) al variare della pulsazione ω . Se la pulsazione impressa ω é sufficientemente bassa rispetto a ω_0 , gli ultimi due termini del denominatore si possono trascurare, ottenendo:

$$\alpha \simeq 0 \quad \frac{\beta c}{\omega} = n \simeq 1 + \frac{A}{2\omega_0^2} \quad (9.2.9)$$

L'indice di rifrazione, e quindi la velocità di fase, sono in questo caso, indipendenti dalla pulsazione e non vi é dispersione.

Se la pulsazione impressa ω é apprezzabile rispetto alla pulsazione di risonanza ω_0 , pur non essendo molto vicina a ω_0 , il termine di smorzamento può ancora essere trascurato, cioè $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \omega\gamma$ e scrivere:

$$\frac{\beta c}{\omega} = n \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (9.2.10)$$

Anche in questo caso il fattore di attenuazione é nullo, e il mezzo é trasparente, ma l'indice di rifrazione e la velocità di fase sono funzioni della frequenza.

Se $\omega < \omega_0$, $n > 1$ e un aumento di ω fa aumentare n e diminuire v . Se $\omega > \omega_0$, $n < 1$ e un aumento di ω produce ancora un aumento nel valore numerico di n . In questo caso come abbiamo già detto la dispersione si dice normale.

Finalmente si consideri il caso in cui ω é prossima alla frequenza di risonanza ω_0 ; si ha:

$$n = \frac{\beta c}{\omega} \simeq 1 + \frac{A}{2} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \quad (9.2.11)$$

$$\alpha \simeq \frac{A}{2c} \frac{\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \quad (9.2.12)$$

É interessante graficare l'andamento del coefficiente di attenuazione α in funzione della frequenza angolare prossima a quella di risonanza. Per questo, scriviamo:

$$\alpha = \frac{A}{2c\gamma} \frac{1}{1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2\gamma^2}} = \frac{A}{2c\gamma} \frac{1}{1 + \frac{(\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2}{\omega^2\gamma^2}} \quad (9.2.13)$$

Poiché la (9.2.13) vale per frequenze prossime alla frequenza di risonanza ω_0 , possiamo porre $\omega + \omega_0 \simeq 2\omega$ e, quindi:

$$\alpha \simeq \frac{A}{2c\gamma} \frac{1}{1 + \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{\gamma^2/4}} \quad (9.2.14)$$

Per $\omega = \omega^*$ tale che $\omega^* - \omega_0 = \pm \frac{\gamma}{2}$ la frazione al secondo membro diventa $\frac{1}{2}$ e quindi $\frac{\gamma}{2}$ rappresenta la semilarghezza della curva di assorbimento (in ampiezza) a metà altezza.

Coefficiente di attenuazione (o di assorbimento) α/α_{max}

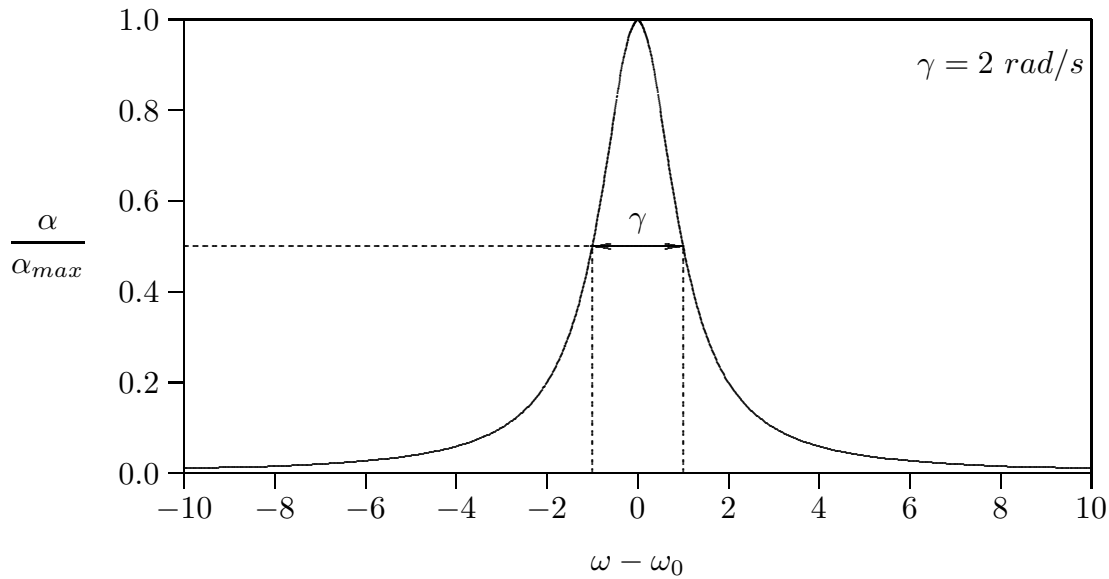


fig.9.2-1

Indice di rifrazione

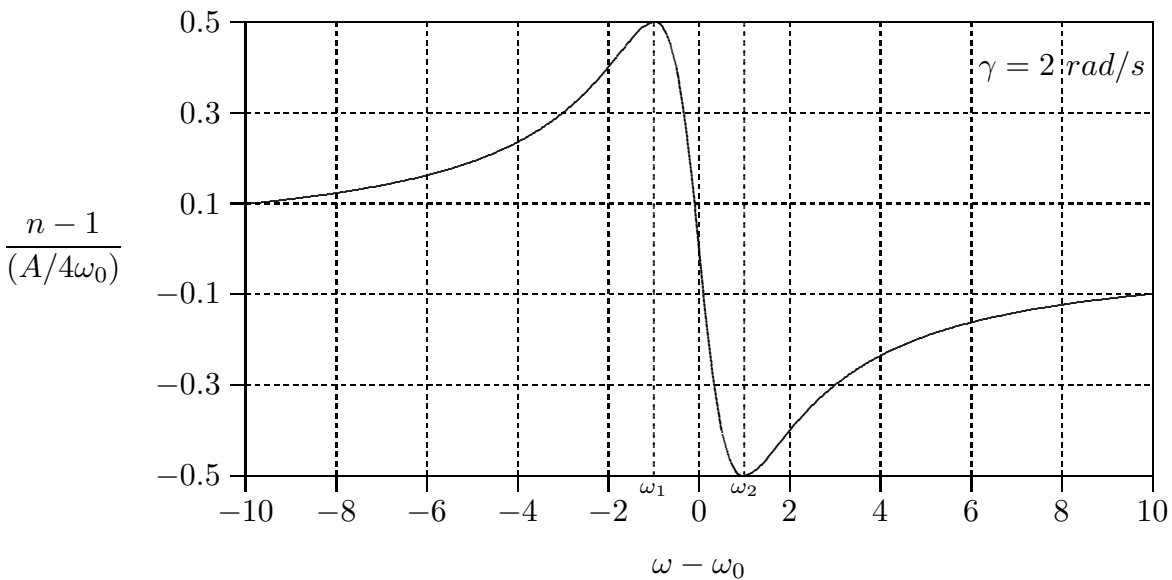


fig.9.2-2

Analogamente per l'indice di rifrazione n graficato in fig.9.2-2, la (9.2.11) si può scrivere:

$$\begin{aligned} n - 1 &= \frac{A}{2} \frac{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2 + \omega^2\gamma^2} \simeq \frac{A}{2} \frac{(\omega_0 - \omega)2\omega_0}{(\omega_0 - \omega)^2 4\omega_0^2 + \omega_0^2\gamma^2} = \\ &= - \frac{A}{4\omega_0} \frac{(\omega - \omega_0)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

avendo posto $\omega_0 + \omega \simeq 2\omega_0$ e $\omega^2\gamma^2 \simeq \omega_0^2\gamma^2$.

Il coefficiente di assorbimento (o di attenuazione) presenta un massimo assai marcato in corrispondenza di ω_0 , perciò in questo intervallo di frequenza il mezzo è opaco. Quando ω cresce a partire da valori minori di ω_0 , l'indice n raggiunge un massimo per un certo valore ω_1 poi diminuisce rapidamente fino ad un valore minore di 1 in corrispondenza di un certo valore ω_2 , per crescere di nuovo al crescere di ω , tendendo a 1. Quando, come nell'intervallo $\omega_1\omega_2$, un aumento della frequenza conduce a una diminuzione dell'indice di rifrazione e a un aumento della velocità di fase, si dice che la dispersione è anomala. Secondo questa definizione, la dispersione introdotta dalla conduttività del mezzo, che abbiamo già discusso, è anomala. In realtà si potrebbe quasi dire che il comportamento anomalo è più comune del comportamento normale.

Nel caso dei liquidi e dei solidi questi risultati devono essere leggermente modificati, non essendo più valida l'ipotesi che la densità del mezzo sia piccola. Ma la forma generale delle curve di dispersione non viene modificata sostanzialmente. Inoltre, la nostra analisi si è limitata allo studio del comportamento della costante di propagazione in prossimità di una singola frequenza di risonanza. In realtà, una molecola è un sistema dinamico complicato, dotato di una serie infinita di frequenze naturali, ciascuna delle quali influenza il comportamento della molecola al campo incidente.

La teoria classica non permette di dedurre il valore di queste frequenze naturali, è possibile tuttavia con l'aiuto dei risultati sperimentali, ottenere una formula di dispersione empirica composta di termini del tipo equazione (9.2.12).

9.3 - Indice di rifrazione e coefficiente di assorbimento dell'acqua (liquida) in funzione della frequenza

Come esempio di comportamento in funzione della frequenza dell'indice di rifrazione e della costante di attenuazione o coefficiente di assorbimento di un mezzo materiale, prendiamo l'acqua. La figura illustra nella parte superiore la funzione $n(\omega)$ e nella parte inferiore la funzione $2\alpha(\omega)$; il coefficiente α risulta moltiplicato per 2 perché i dati sperimentali si riferiscono a misure di intensità invece che di campi. I grafici si riferiscono all'acqua a temperatura normale.

A frequenze molto basse $n(\omega) = 9$, un valore che deriva dall'orientamento parziale dei momenti dipolari propri delle molecole d'acqua. Al di sopra di $10^{10} Hz$ la curva discende in modo abbastanza regolare fino ad un andamento strutturato nella zona dell'infrarosso. Nella zona del visibile, racchiusa fra le linee tratteggiate verticali $n(\omega) = 1.34$ quasi costante. Al di sopra di $6 \cdot 10^{15} Hz$ ($h\nu = 25eV$) non vi sono dati sperimentali.

L'andamento del coefficiente di assorbimento $2\alpha(\omega)$ é molto piú drammatico. A frequenze minori di 10^5 Hz il coefficiente di assorbimento é estremamente piccolo. I dati sembrano poco attendibili (sono indicati due serie di valori di α) probabilmente a causa della presenza di impurezze in quantità diverse.

Al crescere della frequenza fino a 10^{11} Hz , il coefficiente di assorbimento cresce rapidamente fino a $2\alpha = 100 \text{ cm}^{-1}$, corrispondente ad una distanza di penetrazione di 100μ . Questo é il ben noto assorbimento delle microonde in acqua. Nella regione dell'infrarosso bande di assorbimento associate con modi vibrazionali delle molecole fanno raggiungere all'assorbimento valori fino a 10^4 cm^{-1} .

Poi il coefficiente 2α precipita fino a un valore minore di $3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ in uno stretto intervallo di frequenze fra $4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ e $8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Si ha dunque una finestra di assorbimento drammatica in quella che chiamiamo regione visibile. Nell'estremo ultravioletto l'assorbimento ha un valore massimo di $1.1 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-1}$.

CURVE SPERIMENTALI DELL'INDICE DI RIFRAZIONE E DEL COEFFICIENTE DI ASSORBIMENTO DELL'ACQUA

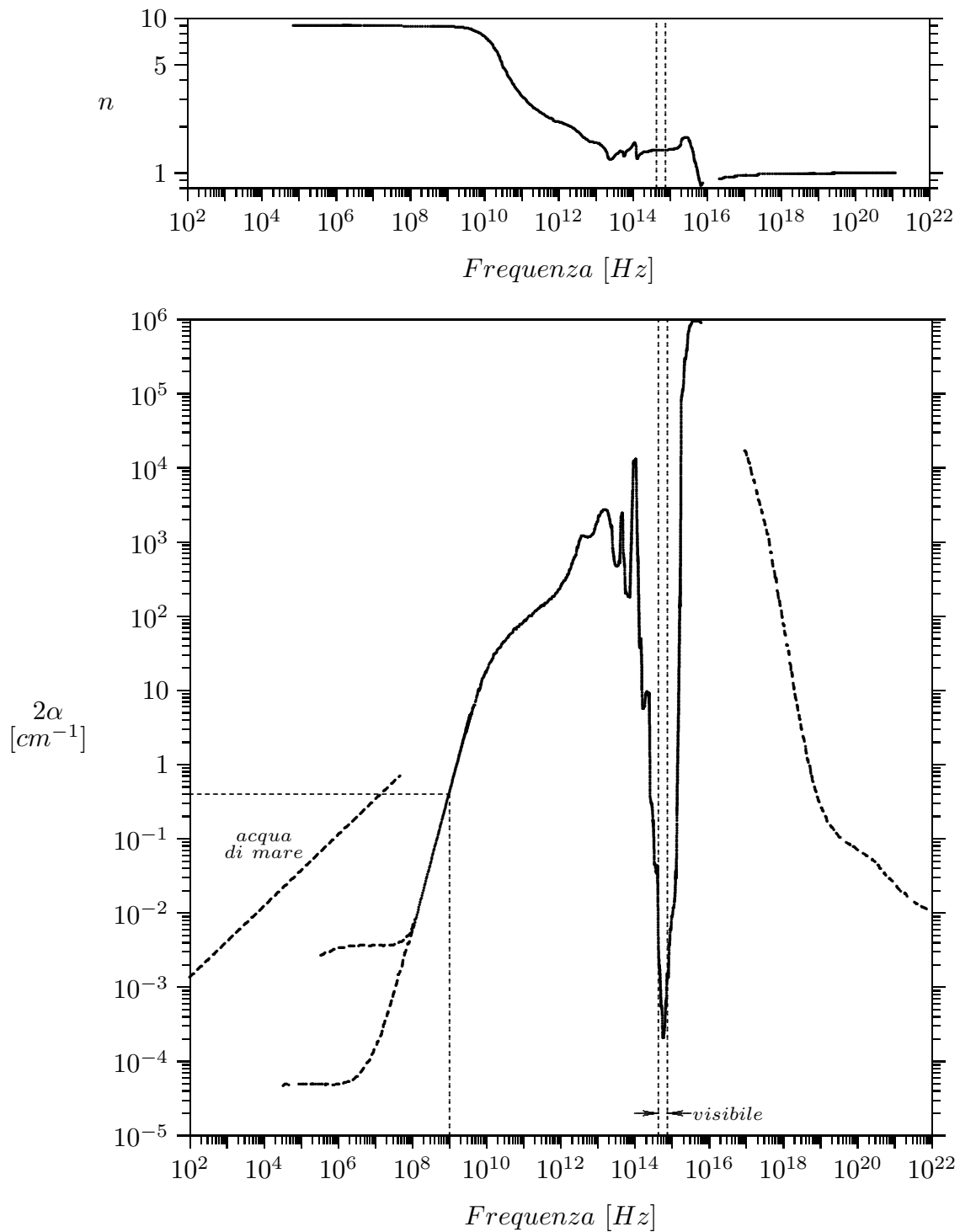


fig.9.3-1

Valori dell'indice di rifrazione complesso $n = \Re(n) + i\Im(n)$ dell'acqua ¹⁾

λ_0 (μm)	λ_0 (m)	ν (Hz)	$\Re(n)$	$\Im(n)$
$1.0000 \cdot 10^7$	$1.0000 \cdot 10^1$	$3.0000 \cdot 10^7$	8.849	$6.931 \cdot 10^{-3}$
$7.4963 \cdot 10^6$	$7.4963 \cdot 10^0$	$4.0020 \cdot 10^7$	8.849	$9.200 \cdot 10^{-3}$
$5.0000 \cdot 10^6$	$5.0000 \cdot 10^0$	$6.0000 \cdot 10^7$	8.849	$1.373 \cdot 10^{-2}$
$2.5006 \cdot 10^6$	$2.5006 \cdot 10^0$	$1.1997 \cdot 10^8$	8.849	$2.721 \cdot 10^{-2}$
$1.0000 \cdot 10^6$	$1.0000 \cdot 10^0$	$3.0000 \cdot 10^8$	8.848	$6.727 \cdot 10^{-2}$
$7.4963 \cdot 10^5$	$7.4963 \cdot 10^{-1}$	$4.0019 \cdot 10^8$	8.847	$8.929 \cdot 10^{-2}$
$5.0000 \cdot 10^5$	$5.0000 \cdot 10^{-1}$	$6.0000 \cdot 10^8$	8.845	$1.333 \cdot 10^{-1}$
$2.5006 \cdot 10^5$	$2.5006 \cdot 10^{-1}$	$1.1997 \cdot 10^9$	8.833	$2.634 \cdot 10^{-1}$
$1.0000 \cdot 10^5$	$1.0000 \cdot 10^{-1}$	$3.0000 \cdot 10^9$	8.743	$6.409 \cdot 10^{-1}$
$7.5019 \cdot 10^4$	$7.5019 \cdot 10^{-2}$	$3.9990 \cdot 10^9$	8.670	$8.406 \cdot 10^{-1}$
$5.0000 \cdot 10^4$	$5.0000 \cdot 10^{-2}$	$6.0000 \cdot 10^9$	8.497	$1.212 \cdot 10^0$
$2.5000 \cdot 10^4$	$2.5000 \cdot 10^{-2}$	$1.2000 \cdot 10^{10}$	7.831	$2.064 \cdot 10^0$
$1.0000 \cdot 10^4$	$1.0000 \cdot 10^{-2}$	$3.0000 \cdot 10^{10}$	5.879	$2.830 \cdot 10^0$
$7.5019 \cdot 10^3$	$7.5019 \cdot 10^{-3}$	$3.9990 \cdot 10^{10}$	5.146	$2.792 \cdot 10^0$
$5.0000 \cdot 10^3$	$5.0000 \cdot 10^{-3}$	$6.0000 \cdot 10^{10}$	4.248	$2.551 \cdot 10^0$
$2.5000 \cdot 10^3$	$2.5000 \cdot 10^{-3}$	$1.2000 \cdot 10^{11}$	3.134	$1.891 \cdot 10^0$
$1.0000 \cdot 10^3$	$1.0000 \cdot 10^{-3}$	$3.0000 \cdot 10^{11}$	2.399	$1.042 \cdot 10^0$
$7.4963 \cdot 10^2$	$7.4963 \cdot 10^{-4}$	$4.0020 \cdot 10^{11}$	2.290	$8.725 \cdot 10^{-1}$
$4.6019 \cdot 10^2$	$4.6019 \cdot 10^{-4}$	$6.5190 \cdot 10^{11}$	2.166	$6.727 \cdot 10^{-1}$
$2.3015 \cdot 10^2$	$2.3015 \cdot 10^{-4}$	$1.3035 \cdot 10^{12}$	2.001	$4.964 \cdot 10^{-1}$
$1.3002 \cdot 10^2$	$1.3002 \cdot 10^{-4}$	$2.3073 \cdot 10^{12}$	1.920	$4.186 \cdot 10^{-1}$
$7.6046 \cdot 10^1$	$7.6046 \cdot 10^{-5}$	$3.9450 \cdot 10^{12}$	1.806	$5.079 \cdot 10^{-1}$
$4.7985 \cdot 10^1$	$4.7985 \cdot 10^{-5}$	$6.2519 \cdot 10^{12}$	1.520	$4.579 \cdot 10^{-1}$
$2.3015 \cdot 10^1$	$2.3015 \cdot 10^{-5}$	$1.3035 \cdot 10^{13}$	1.516	$3.629 \cdot 10^{-1}$
$1.0139 \cdot 10^1$	$1.0139 \cdot 10^{-5}$	$2.9589 \cdot 10^{13}$	1.184	$5.380 \cdot 10^{-2}$
$7.6570 \cdot 10^0$	$7.6570 \cdot 10^{-6}$	$3.9180 \cdot 10^{13}$	1.277	$3.302 \cdot 10^{-2}$
$4.9554 \cdot 10^0$	$4.9554 \cdot 10^{-6}$	$6.0540 \cdot 10^{13}$	1.307	$1.312 \cdot 10^{-2}$
$2.5006 \cdot 10^0$	$2.5006 \cdot 10^{-6}$	$1.1997 \cdot 10^{14}$	1.253	$1.900 \cdot 10^{-3}$
$1.0000 \cdot 10^0$	$1.0000 \cdot 10^{-6}$	$3.0000 \cdot 10^{14}$	1.322	$3.000 \cdot 10^{-6}$
$7.4963 \cdot 10^{-1}$	$7.4963 \cdot 10^{-7}$	$4.0020 \cdot 10^{14}$	1.327	$1.559 \cdot 10^{-7}$
$5.0000 \cdot 10^{-1}$	$5.0000 \cdot 10^{-7}$	$6.0000 \cdot 10^{14}$	1.339	$9.243 \cdot 10^{-10}$
$2.5006 \cdot 10^{-1}$	$2.5006 \cdot 10^{-7}$	$1.1997 \cdot 10^{15}$	1.395	$9.307 \cdot 10^{-9}$
$1.0209 \cdot 10^{-1}$	$1.0209 \cdot 10^{-7}$	$2.9386 \cdot 10^{15}$	1.493	$5.185 \cdot 10^{-1}$

¹⁾ Palik E. D. (Ed.): Handbook Of Optical Constants of Solids II, pag. 1059 - Academic Press, 1991.

É interessante graficare in dettaglio il coefficiente di attenuazione in potenza nel range del visibile. Esso si deduce dalla formula:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\alpha_t \chi} \quad (9.3.1)$$

essendo \mathcal{P}_0 la densità di potenza della luce al suo ingresso in acqua e \mathcal{P} la densità di potenza della luce dopo un percorso χ .

Il coefficiente di attenuazione α_t ($t = totale$) di un fascio di luce in acqua é il risultato di due processi indipendenti: **processo di scattering o di diffusione** e **processo di assorbimento**. Il processo di scattering si riferisce alla variazione della direzione della luce man mano che attraversa il mezzo ed il processo di assorbimento si riferisce al processo termodinamicamente irreversibile per cui l'energia elettromagnetica si converte in calore. Quindi il coefficiente di attenuazione α_t é la somma del coefficiente di attenuazione dovuto allo scattering α_s ed al coefficiente di attenuazione dovuto all'assorbimento α_a . Nella tabella e nei grafici seguenti sono riportati i valori sperimentali di tali coefficienti al variare della lunghezza d'onda della luce, nonché la profondità di penetrazione della luce in acqua distillata. Si evince che la parte rossa dello spettro é fortemente attenuata per assorbimento mentre la parte opposta dello spettro (blu e violetto) é poco attenuata e tale attenuazione é circa per metà dovuta al processo di scattering e per l'altra metà al processo di assorbimento.

Questo significa che la luce blu ha una profondità di penetrazione molto elevata ed é la sola, quindi, che può raggiungere grandi distanze dalla superficie dell'acqua, circa $4 \div 5\delta$, ossia un centinaio di metri.

É utile ricordare che la valutazione sperimentale di tali coefficienti é molto difficile ed esistono diverse pubblicazioni in proposito. Noi ci siamo riferiti al lavoro di Hulburt i cui valori sono affidabili e rientrano nelle medie dei diversi valori osservati dai vari autori.

**Coefficiente di attenuazione $\alpha_t = \alpha_s + \alpha_a$ in potenza e profondità
di penetrazione δ in acqua distillata nel range del visibile. ¹⁾**

λ (nm)	$\alpha_t/10^{-4}$ (cm^{-1})	$\alpha_s/10^{-4}$ (cm^{-1})	$\alpha_a/10^{-4}$ (cm^{-1})	$\delta = 1/\alpha_t$ (cm)	$\delta = 1/\alpha_t$ (m)	Colore
400	8	3.57	4.4	1250	12.50	violetto
410	7	3.23	3.8	1428.6	14.286	violetto
420	6.1	2.95	3.1	1639.3	16.393	violetto
430	5.3	2.69	2.6	1886.8	18.868	violetto
440	4.6	2.45	2.1	2173.9	21.739	blu
450	4	2.25	1.7	2500	25.00	blu
460	3.6	2.04	1.6	2777.8	27.778	blu
470	3.6	1.89	1.7	2777.8	27.778	blu
480	3.65	1.72	1.8	2739.7	27.397	blu
490	3.7	1.59	2.1	2702.7	27.027	blu
500	3.8	1.47	2.3	2631.6	26.316	verde
510	3.9	1.35	2.6	2564.1	25.641	verde
520	4	1.25	2.8	2500	25.00	verde
530	4.2	1.17	3.0	2381	23.81	verde
540	4.4	1.09	3.3	2272.7	22.727	verde
550	4.7	1.00	3.7	2127.7	21.277	verde
560	5.3	0.932	4.4	1886.8	18.868	verde
570	6.6	0.868	5.7	1515.2	15.152	giallo
580	8.4	0.810	8.6	1190.5	11.905	giallo
590	12	0.756	11.2	833	8.33	arancione
600	19.7	0.708	19	507.61	5.0761	arancione
610	24.3	0.662	23.6	411.52	4.1152	arancione
620	26.5	0.618	25.9	377.36	3.7736	arancione
630	28	0.581	27.4	357.14	3.5714	rosso
640	29.2	0.535	28.7	342.47	3.4247	rosso
650	30.8	0.507	30.3	324.68	3.2468	rosso
660	33.5	0.483	33.0	298.51	2.9851	rosso
670	37.5	0.455	37	266.67	2.6667	rosso
680	40.6	0.429	40.2	246.31	2.4631	rosso
690	46.7	0.404	46.3	214.13	2.1413	rosso
700	57.6	0.380	57.2	173.61	1.7361	rosso

¹⁾ E.O. Hulburt: Optics of Distilled and Natural Water - J. Opt. Soc. Am. 35(11), 698-705 (1945) a pag. 135 del libro 'Light in the sea' Edited by John E. Tyler.

**Coefficiente di attenuazione $\alpha_t = \alpha_a + \alpha_s$ in potenza
in acqua distillata nel range del visibile**

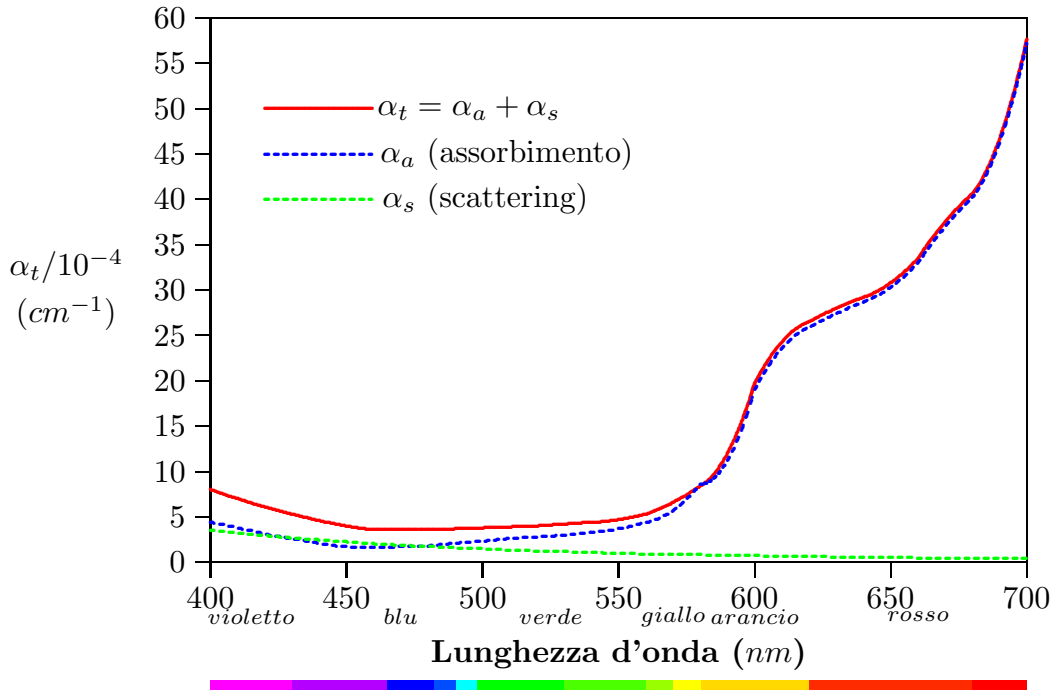


fig.9.3-2

**Profondità di penetrazione δ della potenza
in acqua distillata nel range del visibile**

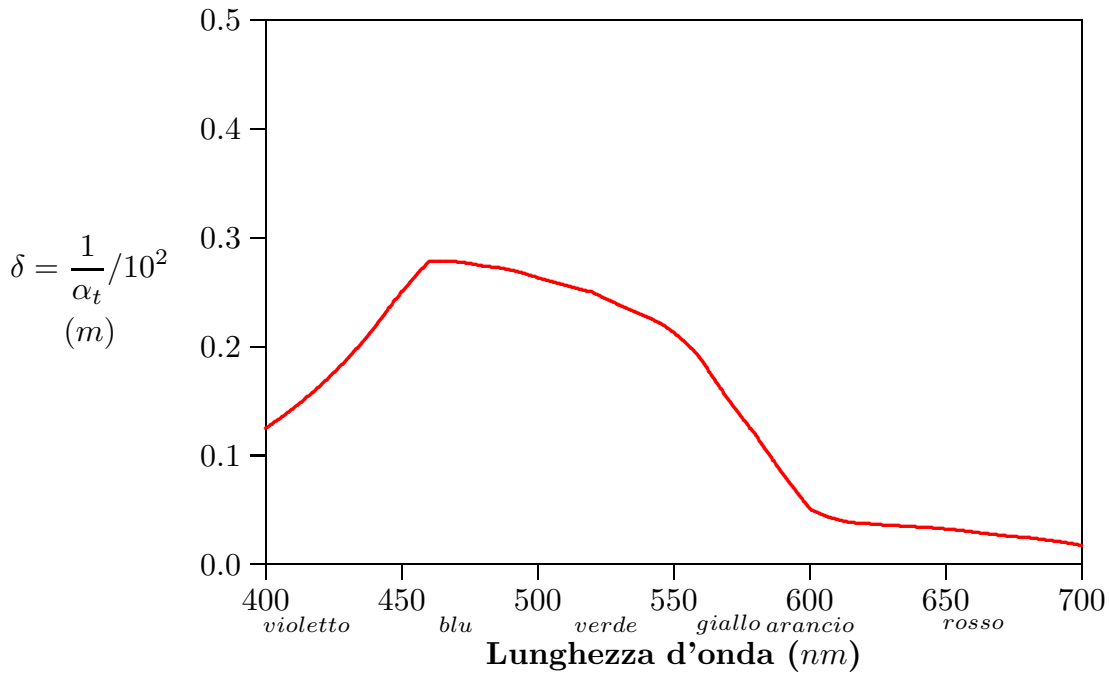


fig.9.3-3

9.4 - Dispersione nei conduttori

Per spiegare la dispersione nei conduttori ci serviamo del modello degli elettroni liberi in equilibrio statistico.

Supponiamo di applicare un campo elettrico esterno \vec{E} ; si ha uno spostamento generale degli elettroni liberi nella direzione del campo. Il movimento é ostacolato dai frequenti urti nei punti del reticolo occupato dagli ioni pesanti, di conseguenza gli elettroni che si spostano cedono una parte della loro quantità di moto in modo tale che da una parte si producono le vibrazioni termiche degli ioni e dall'altra il movimento degli elettroni viene frenato. La natura esatta della forza locale esercitata su un elettrone di conduzione é una questione alquanto delicata, ma, finché si può trascurare il contributo degli elettroni legati, appare giustificato presumere che l'intensità del campo effettivo sia eguale al campo macroscopico \vec{E} che prevale all'interno del conduttore. Sia \vec{r} lo spostamento dalla posizione di equilibrio di una carica libera e di massa m . Sulla carica si esercita una forza esterna $e\vec{E}$ e al suo movimento si oppone la forza $-m\omega_{eff}\dot{\vec{r}}$ proporzionale alla velocità, la quale tiene conto empiricamente dell'effetto dissipativo degli urti. L'equazione del moto é quindi:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\omega_{eff} \frac{d\vec{r}}{dt} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (9.4.1)$$

Come soluzione particolare della (9.4.1) assumiamo la soluzione risonante con il campo elettrico, ossia una soluzione del tipo:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t} \quad (9.4.2)$$

Sostituendo la (9.4.2) nella (9.4.1), dopo aver diviso ciascun termine per m , si ha:

$$-\omega^2 \vec{r} - i\omega\omega_{eff} \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (9.4.3)$$

da cui, dopo aver moltiplicato ciascun termine per i , si ottiene:

$$\vec{r} = \frac{i \frac{e}{m}}{\omega(\omega_{eff} - i\omega)} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (9.4.4)$$

Se vi sono N elettroni liberi nell'unità di volume, la densità di corrente é:

$$\vec{J} = Ne \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{N \frac{e^2}{m}}{\omega_{eff} - i\omega} \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega_{eff} - i\omega} \vec{E} \quad (9.4.5)$$

avendo introdotto la frequenza angolare di plasma ω_p , definita come: $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$.

Allora per analogia con la conduttività statica definita dalla $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ si é condotti ad introdurre una conduttività complessa σ' che in virtù della (9.4.5) é:

$$\sigma' = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega_{eff} - i\omega} \quad (9.4.6)$$

La costante di propagazione e l'attenuazione di un'onda piana si ottengono ora nel solito modo dalla relazione: $k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\sigma'\mu\omega$. Le frequenze di risonanza degli elettroni legati degli atomi metallici si trovano, come é noto, nella regione violetta o ultravioletta dello spettro, cosicché nella regione rossa, in quella infrarossa e certamente alle frequenze radio, si può supporre senza pericolo di errore che la permeabilità elettrica di un metallo é eguale a ϵ_0 . Inoltre, se il conduttore non é ferromagnetico, μ é anche approssimativamente eguale a μ_0 , e quindi:

$$k^2 = (\beta + i\alpha)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\sigma'}{\omega\epsilon_0} \right) \quad (9.4.7)$$

Sostituendo la (9.4.6) nella (9.4.7) si ha:

$$\beta^2 + 2i\alpha\beta - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\omega_p^2(\omega_{eff} + i\omega)}{\omega(\omega_{eff}^2 + \omega^2)} \right) \quad (9.4.8)$$

Ne segue che:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} \right) \quad (9.4.9)$$

$$2\alpha\beta = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\omega_{eff}}{\omega_{eff}^2 + \omega^2} \quad (9.4.10)$$

Dividendo membro a membro (dopo avere diviso la seconda per 2) si ha

$$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2}}{\frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\omega_{eff}}{\omega_{eff}^2 + \omega^2}} \quad (9.4.11)$$

Moltiplicando per $\frac{\beta}{\alpha}$ si ha:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2 \left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2}}{\frac{\omega_{eff}}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2}} \right) \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0 \quad (9.4.12)$$

da cui, scartando la radice negativa:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2}}{\frac{\omega_{eff}}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2}} \right) + \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2}}{\frac{\omega_{eff}}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2}} \right)^2 + 1} \quad (9.4.13)$$

Moltiplicando per $\beta\alpha$ dato dalla (9.4.8), si ottiene:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{2c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2} \right) + \sqrt{\frac{\omega^4}{4c^4} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4c^4} \frac{\omega_p^4 \omega_{eff}^2}{(\omega_{eff}^2 + \omega^2)^2}} \quad (9.4.14)$$

Sostituendo la (9.4.14) nella (9.4.9), si ha:

$$\alpha^2 = -\frac{\omega^2}{2c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2} \right) + \sqrt{\frac{\omega^4}{4c^4} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4c^4} \frac{\omega_p^4 \omega_{eff}^2}{(\omega_{eff}^2 + \omega^2)^2}} \quad (9.4.15)$$

Calcoliamo, nel caso del rame, ω_p^2 . Si ha:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = \frac{87 \cdot 10^{27} (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} = 2.76 \cdot 10^{32} \quad (rad/s)^2 \quad (9.4.16)$$

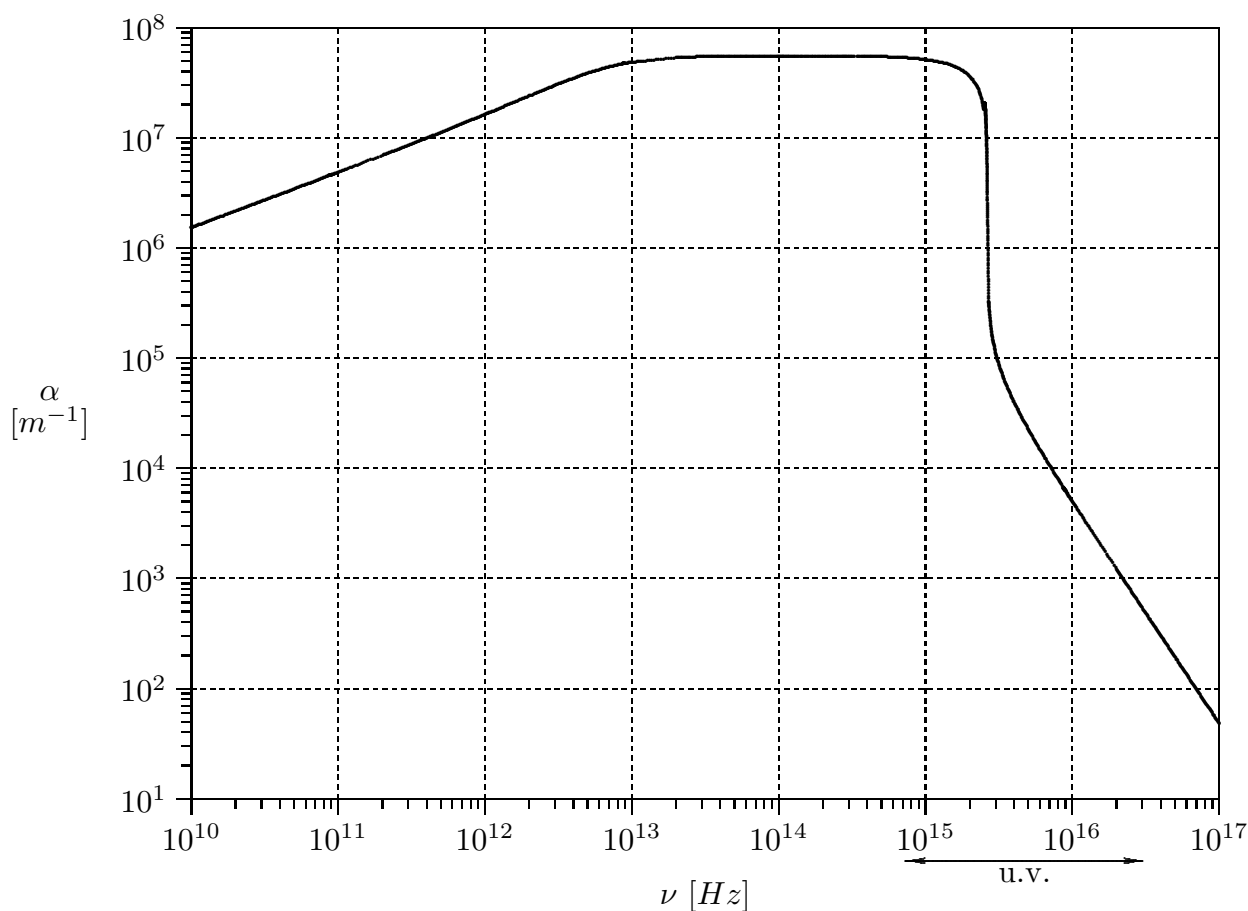
ω_{eff} si ottiene dalla (9.4.6) ponendo $\omega = 0$ e, quindi, considerare per σ' il suo valore nel caso statico, ossia σ_{st} :

$$\omega_{eff} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\sigma_{st}} = \frac{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2.76 \cdot 10^{32}}{5.8 \cdot 10^7} = 4.21 \cdot 10^{13} \quad rad/s \quad (9.4.17)$$

da cui:

$$\omega_{eff}^2 = 1.77 \cdot 10^{27} \quad (rad/s)^2 \quad (9.4.18)$$

Grafichiamo il coefficiente α in funzione della frequenza:



Il valore massimo di α si ha per $\nu = 1.24 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Riportiamo nella seguente tabella alcuni valori, riportati nel grafico, del coefficiente α in funzione della frequenza:

ν	α
10^{10}	$1.51 \cdot 10^6$
10^{11}	$4.82 \cdot 10^6$
10^{12}	$1.61 \cdot 10^7$
10^{13}	$4.83 \cdot 10^7$
10^{14}	$5.53 \cdot 10^7$
10^{15}	$5.13 \cdot 10^7$
10^{16}	$5.10 \cdot 10^3$
10^{17}	$4.80 \cdot 10^1$

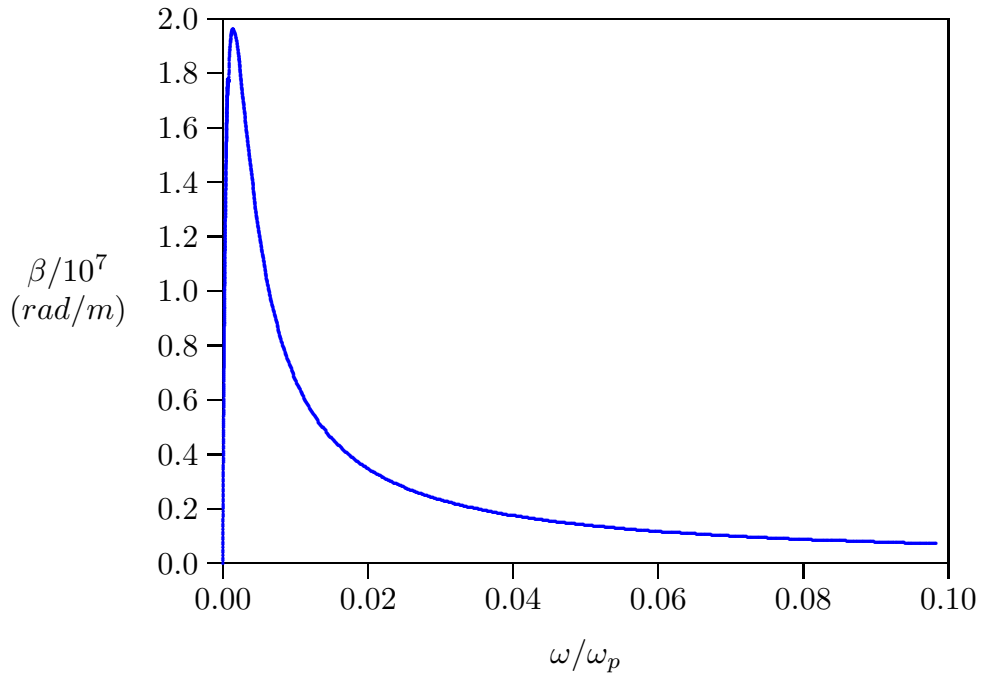
Per $\omega = \omega_p$ risulta $\alpha = 1.97 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$.

Dal grafico e dalla tabella si deduce che il coefficiente di attenuazione del metallo diventa relativamente piccolo alle frequenze dell'ultravioletto. In tal modo, cioè, anche se lo spessore del metallo é di circa 1 mm la radiazione ultravioletta riesce ad essere trasmessa.

A questo punto é interessante esaminare in modo comparativo la teoria dei metalli con quella dei plasmi in quanto come si può verificare, ed é stato già detto, il modello degli elettroni liberi é lo stesso ed é la stessa anche l'equazione che ne governa il moto.

Continuando con l'esempio del rame, osserviamo che la frequenza di plasma ad esso competente é circa $\nu_p = 2.64 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ che é quasi 4.4 volte la frequenza della luce (corrispondente alla lunghezza d'onda nel vuoto di $0.5 \mu\text{m}$). Inoltre il rapporto fra la frequenza efficace e quella di plasma é $2.5336 \cdot 10^{-3}$

Riportiamo nei due grafici seguenti la costante di propagazione β in funzione del rapporto ω/ω_p e il coefficiente di attenuazione α in funzione del rapporto ω/ω_p .



9.5 - Velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche

Nei capitoli precedenti abbiamo definito la velocità di fase e sembra si sia assunto tacitamente che essa sia la velocità con la quale si propaghi una generica onda elettromagnetica.

Abbiamo anche visto che nel caso dei mezzi dielettrici dispersivi, nei mezzi conduttori dispersivi e non, la velocità di fase dipende dalla frequenza impressa, addirittura nel caso di propagazione in mezzi dielettrici nella regione di dispersione anomala, la velocità di fase risulta maggiore della velocità della luce.

A parte quest'ultima incongruenza con la teoria della relatività, si pone il problema anche negli altri casi di definire concettualmente la velocità di propagazione in quanto se il campo elettromagnetico non è perfettamente monocromatico e non ha un solo valore del parametro k esso possiederà diverse velocità di fase competenti alle diverse armoniche.

Si tratta quindi di stabilire quale sarà la velocità di propagazione dell'intero segnale. Supponiamo di avere un impulso di forma qualsiasi che si propaghi lungo l'asse z . Esso si può esprimere come un integrale di Fourier del tipo:

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikz - i\omega(k)t} dk \quad (9.5.1)$$

dove il fattore $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ è stato inserito per uniformarsi alla notazione usata per gli integrali di Fourier. L'ampiezza $A(k)$ caratterizza le proprietà della sovrapposizione lineare delle varie onde. Essa è data dalla trasformata di Fourier di $u(z, t)$ calcolata per $t = 0$, trascurando la specificazione $\frac{\partial u(z, t)}{\partial t}$ per $t = 0$ perché non è importante per il resto del nostro discorso.

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(z, 0) e^{-ikz} dz \quad (9.5.2)$$

Se $u(z, 0)$ rappresenta un'onda sinusoidale e^{ik_0z} per tutti i valori di z , si ha $A(k) = \sqrt{2\pi}\delta(k - k_0)$ corrispondente quindi ad un'onda progressiva $u(z, t) = e^{ik_0z - i\omega(k_0)t}$ monocromatica, come richiesto.

Se invece, per $t = 0$ $u(z, 0)$ rappresenta un treno d'onda finito con una lunghezza Δz come indicato in fig.9.5-1, allora l'ampiezza $A(k)$ non è una funzione δ , ma una funzione a campana, di larghezza Δk , centrata attorno ad un valore k_0 che è il numero d'onda dominante nell'onda modulata $u(z, 0)$.

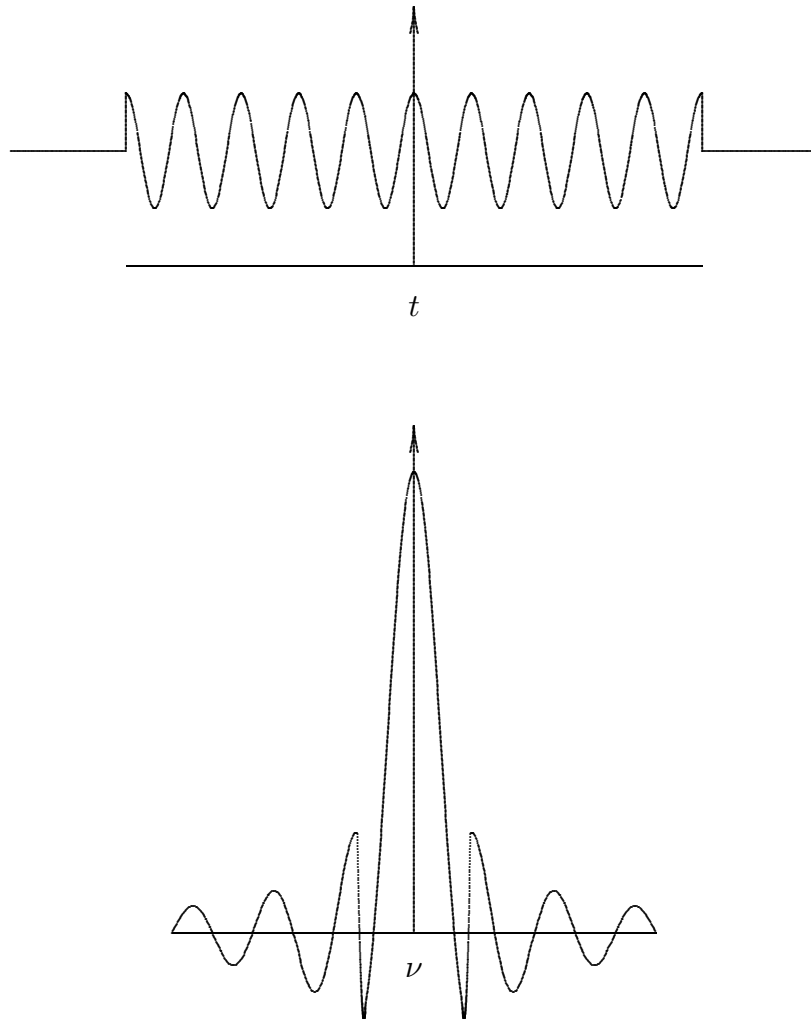
Se Δz e Δk sono definiti come deviazioni quadratiche medie dei valori medi di z e di k definiti in termini delle intensità $|u(z, 0)|^2$ e $|A(k)|^2$, è possibile dedurre la conclusione generale:

$$\Delta z \Delta k \geq \frac{1}{2} \quad (9.5.3)$$

Si può verificare facilmente che per forme di impulsi o pacchetti d'onda ragionevolmente regolari, che non siano troppo bruscamente tagliati il prodotto $\Delta z \Delta k$ è prossimo

al valore limite inferiore $\frac{1}{2}$. Questo significa che treni d'onda corti, con poche onde presenti, sono costituiti da una sovrapposizione di onde monocromatiche con una distribuzione di numeri d'onda molto larga, mentre treni d'onda sinusoidali molto estesi sono quasi monocromatici.

La relazione (9.5.3) si applica anche alle distribuzioni in frequenza e tempo.



Un treno di onde sinusoidali di estensione finita ed il suo spettro di Fourier in funzione della frequenza

fig.9.5-1

Il problema successivo é l'evoluzione nel tempo di un impulso o di un treno d'onde finito. L'impulso rappresentato in figura 9.5-1 per $t = 0$ si sposta col passare del tempo.

Le sue diverse componenti in frequenza o in numero d'onda si spostano con velocità di fase diverse.

L'iniziale coerenza tende perciò a sparire e l'impulso tende a deformarsi. Ci si può anche attendere che esso si sposti con velocità alquanto diverse, per esempio, dalla media delle velocità di fase delle sue componenti. Il caso generale di un mezzo fortemente dispersivo o di un impulso molto corto, con un ampio intervallo di frequenze componenti è difficile da trattare. Ma la propagazione di un impulso con uno spettro di frequenze non troppo ampio o che si propaga in un mezzo per cui la frequenza dipende poco dal numero d'onda, può essere trattata nel seguente modo approssimato. L'onda al tempo t sia rappresentata dalla (9.5.1); se la funzione $A(k)$ è abbastanza fortemente piccata attorno al valore $k = k_0$, la frequenza $\omega(k)$ può essere sviluppata nell'intorno di k_0 in serie di Taylor:

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) + \dots \quad (9.5.4)$$

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikz - i \left[\omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) \right] t} dk \quad (9.5.5)$$

$$u(z, t) = \frac{e^{i \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} k_0 t - i\omega_0 t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i \left[z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} t \right] k} dk \quad (9.5.6)$$

Posto $z' = z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} t$ si ha per la (9.5.1):

$$u(z', 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikz'} dk \quad (9.5.7)$$

Quindi

$$u(z, t) = u(z', 0) e^{i \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} k_0 t - i\omega_0 t} \quad (9.5.8)$$

L'ampiezza dell'impulso è costante sulle superfici definite dalla $z' = \text{costante}$ la quale mostra chiaramente che il pacchetto d'onda si propaga con velocità:

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \quad (9.5.9)$$

che viene chiamata **velocità di gruppo**.

Se all'ampiezza dell'onda (o al suo quadrato) è associata una densità di energia è chiaro che in questa approssimazione il trasporto di energia avviene con la velocità di gruppo, perché è questa la velocità con cui si sposta il profilo dell'ampiezza.

Dal modo con cui questa velocità è stata definita, risulta che questo concetto è del tutto preciso solo quando il pacchetto d'onde è composto da onde elementari situate in

un intervallo infinitamente breve dello spettro. Al crescere dell'intervallo Δk , in un mezzo dispersivo lo sparpagliamento delle velocità di fase delle diverse componenti armoniche diventa più marcato, il pacchetto si deforma rapidamente e la velocità di gruppo perde il suo significato fisico di velocità dell'intero pacchetto. Si osservi, come abbiamo già visto, che una concentrazione del campo nello spazio non implica una corrispondente concentrazione dello spettro di frequenze o di lunghezze d'onda, ma anzi succede piuttosto l'opposto. Si consideri il caso di figura 9.5-1. Il treno di onde armoniche è rappresentato da:

$$f(z) = 0 \quad \text{per } |z| > \frac{L}{2} \quad (9.5.10)$$

$$f(z) = \cos k_0 z \quad \text{per } |z| < \frac{L}{2} \quad (9.5.11)$$

L'ampiezza della perturbazione nella vicinanza di un numero d'onda k qualsiasi è data da:

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen} \frac{(k_0 - k)L}{2}}{k_0 - k} \quad (9.5.12)$$

Al crescere della lunghezza L , diminuisce l'intervallo di numeri d'onda Δk nel quale la $A(k)$ ha un valore apprezzabile.