

Cap. 6

Plasma - Propagazione di onde elettromagnetiche in plasma omogeneo

In questi ultimi decenni una considerevole attenzione é stata focalizzata sulla teoria della propagazione di onde elettromagnetiche in un mezzo costituito da **plasma**. In gran parte questo interesse é stato stimolato per le possibili applicazioni a problemi sempre attuali nel campo delle comunicazioni radio, nella radioastronomia, e nella fusione termonucleare controllata. Per esempio, la teoria é stata invocata per spiegare la propagazione di onde radio nella ionosfera, la propagazione di onde radio cosmiche nell'atmosfera solare, nelle nebulose, e nello spazio interstellare ed interplanetario, la riflessione delle onde radio da meteore e dallo spessore di gas ionizzato che si forma attorno ad una navicella spaziale o razzo vettore quando essa penetra nell'atmosfera, e la propagazione di microonde in plasmi da laboratorio. In tutte queste applicazioni il mezzo attraverso cui le onde elettromagnetiche devono viaggiare é formalmente lo stesso: esso é un plasma, o meglio in forma descrittiva, un gas ionizzato macroscopicamente neutro consistente principalmente di **elettroni liberi, ioni liberi e atomi o molecole neutre**. Questo significa che da una applicazione all'altra la natura del problema non cambia sostanzialmente, nonostante le grandi variazioni che esso puó avere in base alle applicazioni in termini, diciamo, di grado di ionizzazione e di temperatura.

All'incirca nel 1923 I.Langmuir¹⁾sviluppó l'appropriata teoria di base di un gas ionizzato e diede al mezzo il nome **plasma**. La parola plasma fu introdotta per la prima volta nella terminologia scientifica nel 1839 dal biologo ceco J.Purkynic coniando il termine protoplasma per descrivere una sostanza tipo jelly cosparsa da numerose particelle che costituiscono il corpo delle cellule. La parola plasma infatti deriva dalla parola greca $\pi\lambda\alpha\sigma\sigma\omega$ [plasso] (verbo transitivo) che vuol dire plasmare, formare. In ematologia indica la componente liquida del sangue.

6.1 - Descrizione elettromagnetica dei plasmi

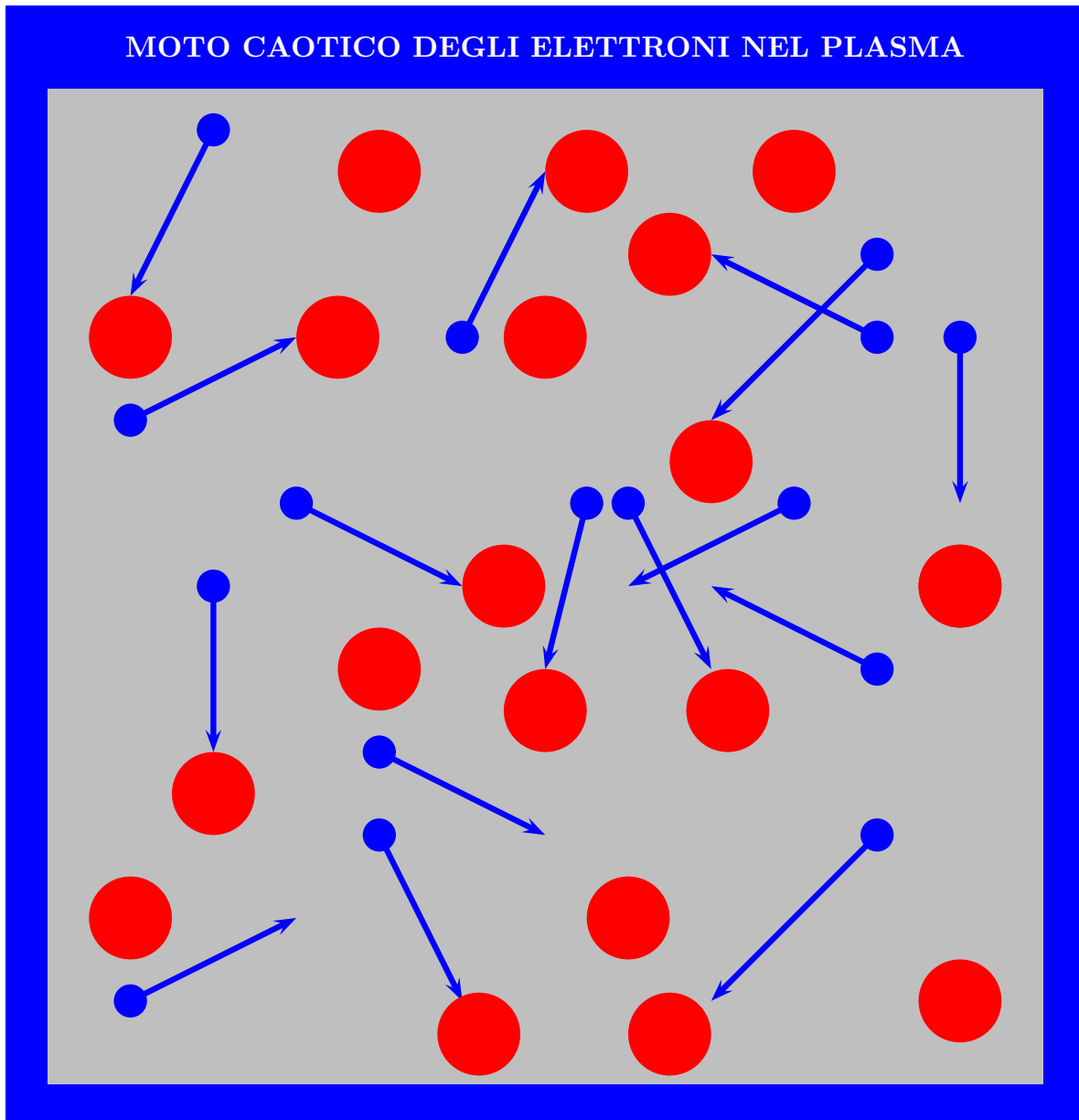
Scriviamo le equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Un'onda elettromagnetica che viaggia attraverso un plasma interagisce con tutte e tre

¹⁾ Irving Langmuir: Brooklyn (U.S.A), 31 gennaio 1881 - Woods Hole (U.S.A.), 16 agosto 1957 - premio Nobel per la Chimica nel 1932 per le sue scoperte e indagini nell'ambito della chimica delle superfici.

le componenti del plasma, cioè elettroni liberi, ioni liberi e molecole neutre.



Tuttavia, l'interazione dell'onda con le particelle neutre é così debole se paragonata all'interazione fra l'onda e le particelle cariche che può essere trascurata. Questo significa che \vec{P} , \vec{M} , \vec{Q} , che costituiscono la misura dell'interazione dell'onda con le particelle neutre possono essere poste eguali a zero. Inoltre, poiché gli ioni hanno una massa molto più grande di quella degli elettroni, la velocità impartita agli ioni da parte dell'onda é molto piccola rispetto a quella trasferita agli elettroni.

Cosí quando un'onda elettromagnetica passa attraverso un plasma sufficientemente ionizzato solo gli elettroni liberi del plasma influenzano apprezzabilmente la trasmissione dell'onda.

L'interazione fra l'onda e gli elettroni é introdotta nelle equazioni di Maxwell attraverso il termine densità di corrente \vec{J} . Come faremo vedere in seguito la densità di

corrente elettronica \vec{J} prodotta nel plasma dall'onda é correlata, allo stato stazionario, al vettore \vec{E} dell'onda (monocromatica) da una relazione lineare della forma:

$$\vec{J} = a\vec{E} + i\omega b\vec{E} \quad (a, b = \text{quantitá reali positive}) \quad (6.1.2)$$

finché \vec{E} non sia cosí elevato da innescare un regime non lineare.

Segue che quando un'onda elettromagnetica il cui vettore campo elettrico \vec{E} attraversa un plasma sufficientemente ionizzato, in regime lineare, le equazioni di Maxwell per il fenomeno nello stato stazionario diventano:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H} \quad (6.1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = a\vec{E} + i\omega b\vec{E} - i\omega\epsilon_0\vec{E} \quad (6.1.4)$$

dove abbiamo imposto la monocromaticitá dell'onda del tipo $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\omega t}$.

L'equazione (6.1.4) si puó scrivere:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (a + i\omega b)\vec{E} - i\omega\epsilon_0\vec{E} \quad (6.1.5)$$

dove formalmente $(a + i\omega b)\vec{E}$ appare come una corrente di conduzione e $-i\omega\epsilon_0\vec{E}$ come una corrente di spostamento nel vuoto.

Questa forma suggerisce che il fattore complesso $(a + i\omega b)$ puó essere pensato come una conducibilitá complessa data da:

$$\sigma_c = \sigma_r + i\sigma_i = a + i\omega b \quad (6.1.6)$$

e cosí descrivere il plasma come un conduttore avente una permeabilitá μ_0 , una costante dielettrica ϵ_0 , ed una conducibilitá complessa σ_c .

Alle alte frequenze é usualmente piú conveniente usare la terminologia dielettrica piuttosto che quella della conducibilitá complessa.

Per descrivere mezzi dielettrici, sostituiamo nella seconda delle equazioni di Maxwell (6.1.1) $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$. Essa si scrive, allora:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma\vec{E} - i\omega\vec{P} - i\omega\epsilon_0\vec{E} \quad (6.1.7)$$

dove σ é la conducibilitá del dielettrico e \vec{P} é la polarizzazione delle molecole neutre del dielettrico. Per un dielettrico abbiamo $\vec{P} = \chi_e\vec{E}$ dove χ_e é la suscettivitá elettrica del dielettrico ed é sempre positiva.

Quindi la (6.1.7) si scrive:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma\vec{E} - i\omega\chi_e\vec{E} - i\omega\epsilon_0\vec{E} \quad (6.1.8)$$

Confrontando l'equazione (6.1.8) con la (6.1.4) si deduce che la conducibilitá σ del dielettrico deve essere eguale ad a e la sua suscettivitá elettrica χ_e deve essere eguale a $-b$, cioè $\sigma = a$ e $\chi_e = -b$.

Poiché b é positiva, χ_e deve essere negativa. **Quindi noi possiamo pensare un plasma come un dielettrico con perdite la cui suscettività elettrica é negativa.** Ricordando che la permeabilità elettrica ϵ risulta eguale a $\epsilon_0 + \chi_e$, i parametri costitutivi del plasma sono allora dati da:

$$\sigma = a, \quad \mu = \mu_0, \quad \epsilon = \epsilon_0 - b \quad (6.1.10)$$

Notiamo che la costante dielettrica é piú piccola di ϵ_0 al contrario dei dielettrici reali.

Mettendo in evidenza nella (6.1.4) la quantità $-i\omega$, essa diventa:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega \left(-\frac{a}{i\omega} - b + \epsilon_0 \right) \vec{E} \quad (6.1.11)$$

Possiamo, quindi, descrivere il plasma come un dielettrico con costante dielettrica complessa ϵ_c e permeabilità magnetica μ_0 , ossia:

$$\mu = \mu_0 \quad \epsilon_c = -\frac{a}{i\omega} + \epsilon_0 - b \quad (6.1.12)$$

6.2 - Determinazione dell'espressione della densità di corrente e dei parametri costitutivi del plasma

Quando un'onda elettromagnetica viaggia attraverso un plasma é sufficiente considerare soltanto l'interazione fra l'onda e gli elettroni liberi. (L'effetto dell'interazione con gli ioni pesanti é stato molto studiato ma introduce qualche importante conseguenza fisica solo a bassissima frequenza).

Sia n il numero degli elettroni liberi per unità di volume, q ed m la carica e la massa dell'elettrone, \vec{v} la velocità macroscopica (cioé la velocità media) di ciascuno di essi.

Su ciascun elettrone agisce, allora:

1) la forza $q\vec{E}$ dovuta al campo elettrico dell'onda incidente; 2) la forza $q\vec{v} \times \vec{B}$ dovuta al campo magnetico dell'onda incidente; 3) una forza impulsiva dovuta alle collisioni dell'elettrone con le molecole del plasma. Se la frequenza delle collisioni (cioé il numero di collisioni per unità di tempo) é ω_{eff} , la forza impulsiva é $\vec{G} = -m\vec{v}\omega_{eff}$.

Il campo magnetico associato all'onda elettromagnetica che si propaga, per esempio, lungo l'asse z é:

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{z} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{z} \times \vec{E} \quad (6.2.1)$$

Pertanto la forza magnetica che agisce sull'elettrone é, per $\mu = \mu_0$:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \mu_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \hat{z} \times \vec{E} = q\vec{v} \times \sqrt{\epsilon\mu_0} \hat{z} \times \vec{E} = q \frac{\vec{v}}{c} \sqrt{\epsilon_r} \times \hat{z} \times \vec{E} \quad (6.2.2)$$

il cui modulo é:

$$F_m = q \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_r} E \quad (6.2.3)$$

Per velocità non relativistiche $v \ll c$ e, quindi, $F_m \ll qE$; pertanto la forza magnetica è trascurabile.

L'equazione del moto di un singolo elettrone è, allora:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - m\omega_{eff}\vec{v} \quad (6.2.4)$$

Ora $\frac{d\vec{v}}{dt}$ è la derivata totale della funzione $\vec{v}(x, y, z, t)$ espressa dalla formula:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Ricordiamo che, scelto un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y, z , e detto \vec{A} un vettore di componenti A_x, A_y, A_z , risulta:

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \hat{x} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \quad (6.2.6)$$

Date due funzioni vettoriali $\vec{A}(\vec{r})$ e $\vec{B}(\vec{r})$, da una relazione di Analisi differenziale si ha:

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (6.2.7)$$

Posto $\vec{B} = \vec{A}$, la (6.2.7) diventa:

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{A}) = \vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \quad (6.2.8)$$

ossia:

$$\vec{\nabla} A^2 = 2\vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + 2(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \quad (6.2.9)$$

da cui:

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} A^2 - \vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (6.2.10)$$

Ma:

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = A_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} \quad (6.2.11)$$

Sostituendo la (6.2.5), la (6.2.10) e la (6.2.11) nella (6.2.4) si ha:

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} m \vec{\nabla} v^2 + m \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \times \vec{v} = q\vec{E} - m\omega_{eff}\vec{v} \quad (6.2.12)$$

Come si vede, nella (6.2.12) gli ultimi due termini a primo membro sono non lineari in \vec{v} .

Trascurando tali non linearit , ossia assumendo che la velocit  non dipenda dalla posizione, l'equazione diventa:

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + m\omega_{eff}\vec{v} = q\vec{E} \quad (6.2.13)$$

Assumendo il campo elettrico monocromatico con variazione temporale del tipo $e^{-i\omega t}$, la (6.2.13) ammette la soluzione particolare $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$.

Sostituendo nella (6.2.13) si ha:

$$-i\omega m\vec{v} + m\omega_{eff}\vec{v} = q\vec{E} \quad (6.2.14)$$

da cui:

$$\vec{v}(-i\omega + \omega_{eff})m = q\vec{E} \quad (6.2.15)$$

$$\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{(-i\omega + \omega_{eff})m} \quad (6.2.16)$$

Per avere l'integrale generale della (6.2.13), bisogna aggiungere alla soluzione particolare data dalla (6.2.16) la soluzione della omogenea associata alla (6.2.13) cio  della:

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} + m\omega_{eff}\vec{v}' = 0 \quad (6.2.17)$$

la cui soluzione  :

$$\vec{v}' = \vec{v}'_0 e^{-\omega_{eff}t} \quad (6.2.18)$$

  chiaro che al crescere di t \vec{v}' tende allo zero e si pu  dunque affermare che a regime la soluzione   la (6.2.16).

Il vettore \vec{J} associato alla velocit  degli elettroni   dato da: $\vec{J} = nq\vec{v}$, cio :

$$\vec{J} = \frac{nq^2\vec{E}}{(-i\omega + \omega_{eff})m} \quad (6.2.19)$$

Moltiplicando e dividendo per ϵ_0 e definendo **frequenza angolare di plasma** la quantit  ω_p data da:

$$\omega_p^2 = \frac{nq^2}{m\epsilon_0} \quad (6.2.20)$$

si ha:

$$\vec{J} = \frac{\epsilon_0\omega_p^2\vec{E}}{(-i\omega + \omega_{eff})} = \frac{\epsilon_0\omega_{eff}\omega_p^2}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)}\vec{E} + i\omega \frac{\epsilon_0\omega_p^2}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)}\vec{E} \quad (6.2.21)$$

Confrontando la (6.2.21) con la (6.1.2), determiniamo i coefficienti a e b . Se noi vogliamo descrivere il plasma come un dielettrico con perdite si ha che:

$$\sigma = a \quad \epsilon = \epsilon_0 - b \quad e \quad \mu = \mu_0 \quad (6.2.22)$$

cioé:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{eff} \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}, \quad \epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} \right) \quad (6.2.23)$$

La derivazione elementare dei parametri costitutivi del plasma utilizza la frequenza delle collisioni che é un parametro non noto. Per valutarlo devono essere prese in considerazione i microprocessi cui sono sottoposti le particelle del plasma. Questo é stato fatto altrove utilizzando la teoria cinetica e i risultati mostrano che ω_{eff} dipende dalla velocità dell' elettrone, sebbene per i nostri scopi può essere ritenuto costante.

La prima osservazione é che nel caso di un plasma la costante dielettrica e la conducibilità dipendono dalla frequenza; i mezzi per cui questo accade prendono il nome di **mezzi dispersivi**.

Alcuni esempi numerici

Come esempio ci riferiamo alla ionosfera in cui n é dell'ordine di $10^6 \text{ cm}^{-3} = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ e ω_{eff} é molto variabile a seconda dell'altezza; nelle regioni piú alte é dell'ordine di 10^4 rad/s .

Se prendiamo in considerazione una frequenza dell'ordine di 10^7 Hz (onde corte) si ha $\omega_{eff}^2 \ll \omega^2$, risulta $\frac{\sigma}{\epsilon\omega}$ dell'ordine di 10^{-4} e, quindi:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{m\epsilon_0}} = 5.6 \cdot 10^7 \text{ rad/s} \quad \text{per } n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{m\epsilon_0}} = 1.8 \cdot 10^7 \text{ rad/s} \quad \text{per } n = 10^{11} \text{ m}^{-3}$$

6.3 - Propagazione di onde piane in un plasma omogeneo

Studiamo ora la propagazione di onde elettromagnetiche trasversali in un plasma omogeneo ed isotropo. Poiché esso si comporta come un mezzo conduttore valgono le relazioni a suo tempo studiate, cioè:

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon + i \omega \mu_0 \sigma \quad (\text{avendo posto } \mu = \mu_0)$$

e

$$k = \beta + i\alpha$$

dove β e α sono date da:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right]} \quad (6.3.1)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right]} \quad (6.3.2)$$

Consideriamo, in primo luogo, un plasma senza perdite cioè $\omega_{eff} = 0$. Si ha allora:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad \sigma = 0, \quad \mu = \mu_0 \quad (6.3.3)$$

Quindi:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)} \quad \alpha = 0 \quad n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)} \quad \text{per } \omega > \omega_p \quad (6.3.4)$$

Se $\omega < \omega_p$ risulta:

$$\beta = 0 \quad \alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \quad n = 0 \quad (6.3.5)$$

Ovviamente, se $\omega = \omega_p$ risulta:

$$\beta = 0, \quad \alpha = 0, \quad n = 0 \quad (6.3.6)$$

Queste espressioni mostrano la marcata differenza nel comportamento fra un'onda la cui frequenza operativa è più grande della frequenza di plasma e di un'onda la cui frequenza operativa è minore della frequenza di plasma. Quando $\omega > \omega_p$, l'onda viaggia senza attenuazione ad una velocità di fase più grande della velocità della luce nel vuoto.

D'altra parte, quando $\omega < \omega_p$ l'onda è evanescente e non trasporta energia. A $\omega = \omega_p$ l'onda è al "cut-off"; il campo magnetico è nullo ed il campo elettrico deve soddisfare l'equazione $\vec{\nabla} \times \vec{E}(t) = 0$. Quindi, al cut-off un'onda elettromagnetica trasversale non può

esistere; può esistere, tuttavia un'onda elettrica longitudinale, talvolta chiamata "onda di plasma" o "onda elettrostatica".

Consideriamo, adesso, un plasma con piccole perdite; cioè il caso limite $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1$. Si ha in questo caso:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon}, \quad \alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}, \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \quad (\omega \geq \omega_p) \quad (6.3.7)$$

Utilizzando le espressioni di ϵ e σ per il plasma si ha:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}, \quad \alpha = \frac{\frac{1}{2}\omega_{eff}\omega_p^2}{c(\omega^2 + \omega_{eff}^2)\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}}, \quad n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}} \quad (6.3.8)$$

La velocità di fase é:

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}} \quad (6.3.9)$$

Riportiamo in un grafico l'andamento di n^2 in funzione di $\frac{\omega}{\omega_p}$ per un plasma privo di collisioni.

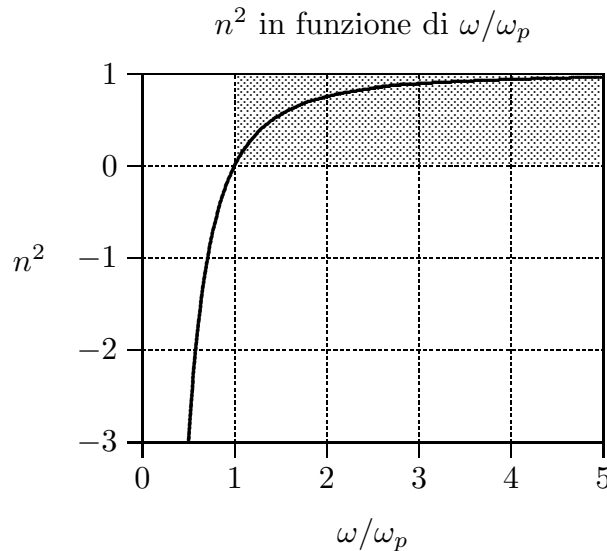


fig.6.3-1

Grafichiamo, ora, il diagramma di Brillouin competente alla propagazione di un'onda elettromagnetica piana in un plasma isotropo, omogeneo e privo di collisioni, ossia l' andamento della costante di propagazione β o meglio $\beta c/\omega_p$ in funzione di ω/ω_p . La retta

tratteggiata corrisponde alla costante di propagazione di un'onda piana nel vuoto, ad essa tende la curva che rappresenta la costante di propagazione nel plasma.

Diagramma di Brillouin
Costante di propagazione β
in plasma isotropo

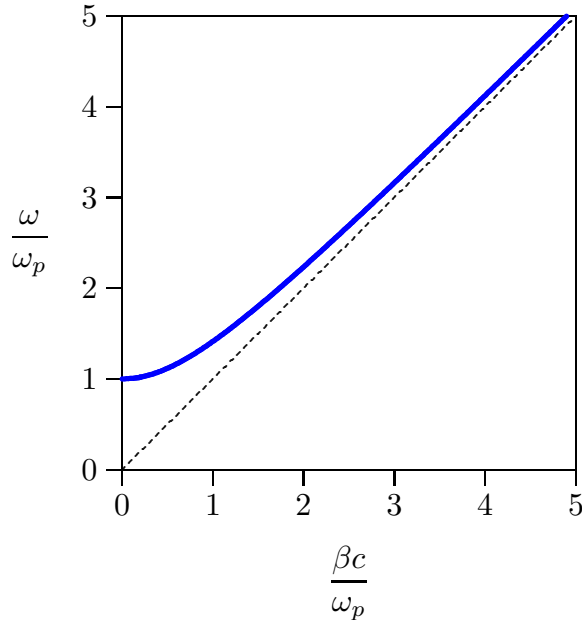


fig.6.3-2

Passiamo, adesso, ad un plasma con perdite. In tal caso é importante studiare l'andamento del coefficiente di attenuazione α all'aumentare della frequenza. Dalle tabelle seguenti e dai grafici effettuati per due valori di ω_{eff} si evince che esso é una funzione monotona decrescente della frequenza spiegando cosí il fenomeno fisico per cui il plasma é trasparente alla radiazione visibile. Per questo si vede la luce di una stella attraverso la ionosfera e per tale motivo le comunicazioni satellitari si svolgono alle frequenze delle microonde (GHz). La formula corretta per il calcolo del coefficiente di attenuazione é la (6.3.2) ma come si evince dalle tabelle, per frequenze non immediatamente vicine alla frequenza di soglia, la formula approssimata (6.3.8) dá risultati praticamente identici a quelli calcolati con la formula esatta. I valori calcolati con la formula approssimata sono indicati con * nei grafici.

$$\omega_p = 10^{10} \text{ rad/s}, \omega_{eff} = 10^{10} \text{ rad/s}$$

$\omega/10^{10}$ (rad/s)	ϵ_r	σ (S/m)	$\frac{\sigma}{\epsilon\omega}$	α_{esatta} (m^{-1})	$\alpha_{approssimata}$ (m^{-1})
1	0.5	0.04427	1	10.734	11.793
1.5	0.69231	0.027243	0.2963	6.1023	6.1675
2	0.8	0.017708	0.125	3.7221	3.7293
2.5	0.86207	0.012212	0.064	2.4764	2.4776

3	0.9	0.008854	0.03703	1.7577	1.758
3.5	0.92453	0.006682	0.02332	1.309	1.3091
4	0.94118	0.005208	0.01562	1.0112	1.0113
4.5	0.95294	0.004166	0.01097	0.80398	0.80399
5	0.96154	0.003405	0.008	0.65416	0.65417
5.5	0.968	0.002833	0.00601	0.54244	0.54245
6	0.97297	0.002393	0.00463	0.45697	0.45698
6.5	0.97688	0.002047	0.00364	0.39016	0.39016
7	0.98	0.001771	0.00291	0.33695	0.33695
7.5	0.98253	0.001546	0.00237	0.2939	0.2939
8	0.98462	0.001362	0.00195	0.25858	0.25858
8.5	0.98635	0.001209	0.00162	0.22926	0.22926
9	0.9878	0.001079	0.00137	0.20464	0.20464
9.5	0.98904	0.000970	0.00116	0.18378	0.18378
10	0.9901	0.000876	0.001	0.16595	0.16595

$$\omega_p = 10^{10} \text{ rad/s}, \omega_{eff} = 10^9 \text{ rad/s}$$

$\omega/10^{10}$ (rad/s)	ϵ_r	σ (S/m)	$\frac{\sigma}{\epsilon\omega}$	α_{esatta} (m^{-1})	$\alpha_{approssimata}$ (m^{-1})
1	0.00990	0.0087663	10	7.0603	16.595
1.5	0.55752	0.0039177	0.05291	0.98799	0.98834
2	0.75062	0.002208	0.016611	0.48004	0.48005
2.5	0.84026	0.0014144	0.0076046	0.29064	0.29065
3	0.88901	0.00098269	0.0041615	0.19632	0.19632
3.5	0.91843	0.00072219	0.0025374	0.14195	0.14195
4	0.93754	0.00055303	0.0016656	0.10759	0.10759
4.5	0.95064	0.00043702	0.0011538	0.08443	0.08443
5	0.96002	0.00035402	0.00083299	0.06806	0.06806
5.5	0.96695	0.0002926	0.00062139	0.05605	0.05605
6	0.97223	0.00024588	0.00047605	0.046972	0.046972
6.5	0.97634	0.00020951	0.00037287	0.039941	0.039941
7	0.9796	0.00018066	0.00029756	0.034382	0.034382
7.5	0.98223	0.00015738	0.00024128	0.029912	0.029912
8	0.98438	0.00013832	0.00019838	0.026261	0.026261
8.5	0.98616	0.00012253	0.0001651	0.023242	0.023242
9	0.98766	0.0001093	0.00013887	0.020716	0.020716
9.5	0.98892	0.00009809	0.00011793	0.018581	0.018581
10	0.99	0.00008853	0.000101	0.01676	0.01676

Coefficiente di attenuazione α in funzione di ω/ω_p
($\omega_p = 10^{10}$ rad/s)

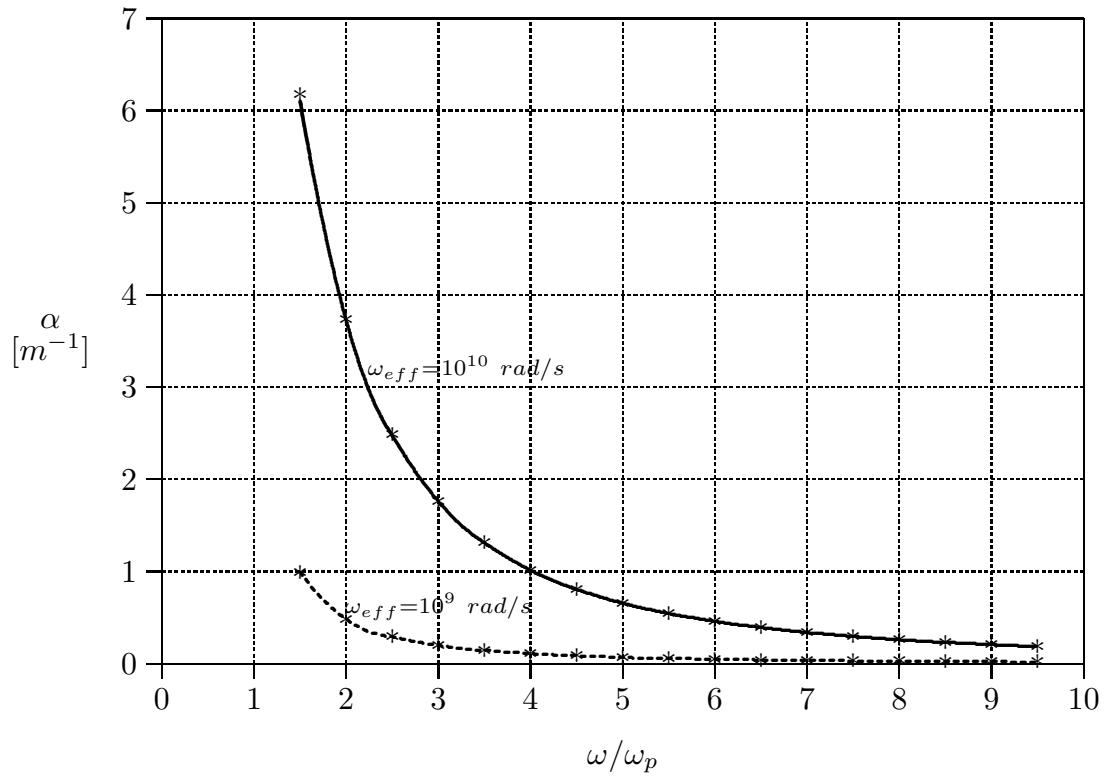


fig.6.3-3

Plasmi in assenza di campo magnetico

Abbiamo visto che nel caso di plasma senza collisioni, se $\omega < \omega_p$ l'onda non si propaga nel plasma. La condizione di cutoff é allora $\omega_{cutoff} = \omega_p$. In queste condizioni la costante dielettrica del plasma é zero. Ne segue pertanto che il campo magnetico associato all'onda elettromagnetica supposta piana, nel caso $\epsilon_r = 0$, é:

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{z} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{z} \times \vec{E} = 0$$

Sostituendo nell'equazione di Maxwell si ottiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

ossia nel plasma puó esistere un campo elettrostatico.

6.4 - Densità di energia in mezzi dispersivi

Dal teorema di Poynting per un mezzo senza perdite possiamo scrivere:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}(t) = -\vec{E}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(t) - \vec{H}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t) \quad (6.4.1)$$

essendo:

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \quad (6.4.2)$$

il vettore di Poynting. La quantità $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}(t)$ rappresenta la variazione temporale della densità di energia elettromagnetica $w(t)$ immagazzinata nel campo elettromagnetico, cioè:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}(t) = -\frac{\partial}{\partial t} w(t) \quad (6.4.3)$$

Dalle equazioni (6.4.1) e (6.4.3) segue:

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t) = \vec{E}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(t) + \vec{H}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t) \quad (6.4.4)$$

Per un semplice, non dispersivo, mezzo dielettrico senza perdite ϵ é una costante reale e μ é uguale a μ_0 ; quindi:

$$\vec{D}(t) = \epsilon \vec{E}(t) \quad \text{e} \quad \vec{B}(t) = \mu_0 \vec{H}(t) \quad (6.4.5)$$

e l'equazione (6.4.4) si scrive:

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \epsilon \vec{E}(t) \cdot \vec{E}(t) + \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}(t) \cdot \vec{H}(t) \right] \quad (6.4.6)$$

che mostra che la densità di energia elettromagnetica per un semplice, non dispersivo, mezzo dielettrico senza perdite é data da:

$$w(t) = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}(t) \cdot \vec{E}(t) + \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}(t) \cdot \vec{H}(t) \quad (6.4.7)$$

Il primo termine del secondo membro é la densità di energia elettrica w_e ed il secondo termine é la densità di energia magnetica w_m :

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}(t) \cdot \vec{E}(t) \quad (6.4.8)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}(t) \cdot \vec{H}(t) \quad (6.4.9)$$

Nel caso di dipendenza temporale armonica, dove cioè $\vec{E}(t) = \Re(\vec{E}e^{-i\omega t})$ e $\vec{H}(t) = \Re(\vec{H}e^{-i\omega t})$, le densità di energia mediate in un periodo possono essere scritte in termini di fasori \vec{E} e \vec{H} come segue:

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \epsilon \vec{E}(t) \cdot \vec{E}^*(t) \quad (6.4.10)$$

$$\langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \mu_0 \vec{H}(t) \cdot \vec{H}^*(t) \quad (6.4.11)$$

Per definire le densità di energia elettrica e magnetica di un'onda elettromagnetica in un plasma, dobbiamo assumere che il plasma sia senza perdite perché è solo per un mezzo senza perdite che l'energia elettromagnetica possa essere razionalmente definita come una quantità termodinamica. Per questa ragione noi dobbiamo limitare le nostre considerazioni alle situazioni in cui la frequenza di collisione ω_{eff} è così piccola che possiamo porla eguale a zero. Con queste restrizioni consideriamo un plasma la cui frequenza di collisione è zero e quindi che i suoi parametri costitutivi sono:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad \mu = \mu_0, \quad \sigma = 0 \quad (6.4.12)$$

Poiché ϵ è una funzione della frequenza, il mezzo è dispersivo e le usuali espressioni non possono essere usate per valutare la densità di energia elettrica. Per esempio se noi usassimo l'espressione usuale, otterremmo l'espressione:

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (6.4.13)$$

che predice che $\langle w_e \rangle < 0$ quando $\omega < \omega_p$ in contraddizione con il fatto che $\langle w_e \rangle$ deve sempre essere definita positiva.

Poiché il plasma è un mezzo dispersivo noi non possiamo calcolare la densità di energia elettrica su una base monocromatica. La ragione di questo è che poiché $\frac{\partial w_e}{\partial t} = \vec{E}(t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t}$, l'espressione per la densità di energia elettrica ossia $w_e(t) = \int \vec{E}(t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + C$, contiene la costante d'integrazione C , il cui valore dipende da come il campo è definito. Per determinare C , assumiamo che l'onda sia quasi monocromatica; allora per $t \rightarrow -\infty$ noi abbiamo $\vec{E}(-\infty) = 0$, $w_e(-\infty) = 0$ e quindi $C = 0$. Cioè, per un'onda quasi-monocromatica che inizia nel remoto passato dal valore zero e cresce gradualmente, la costante d'integrazione è zero e $w_e(t)$ è pienamente determinata.

Un'onda ad alta frequenza la cui ampiezza è lentamente modulata è un esempio di onda che cresce gradualmente nel tempo e così serve bene per calcolare la densità di energia elettrica. Assumiamo, quindi, che la dipendenza dal tempo del vettore elettrico in un plasma senza perdite abbia la forma:

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} \vec{E}_0 [\cos(\omega + \Delta\omega)t - \cos(\omega - \Delta\omega)t] = -\vec{E}_0 \sin \Delta\omega t \sin \omega t \quad (6.4.14)$$

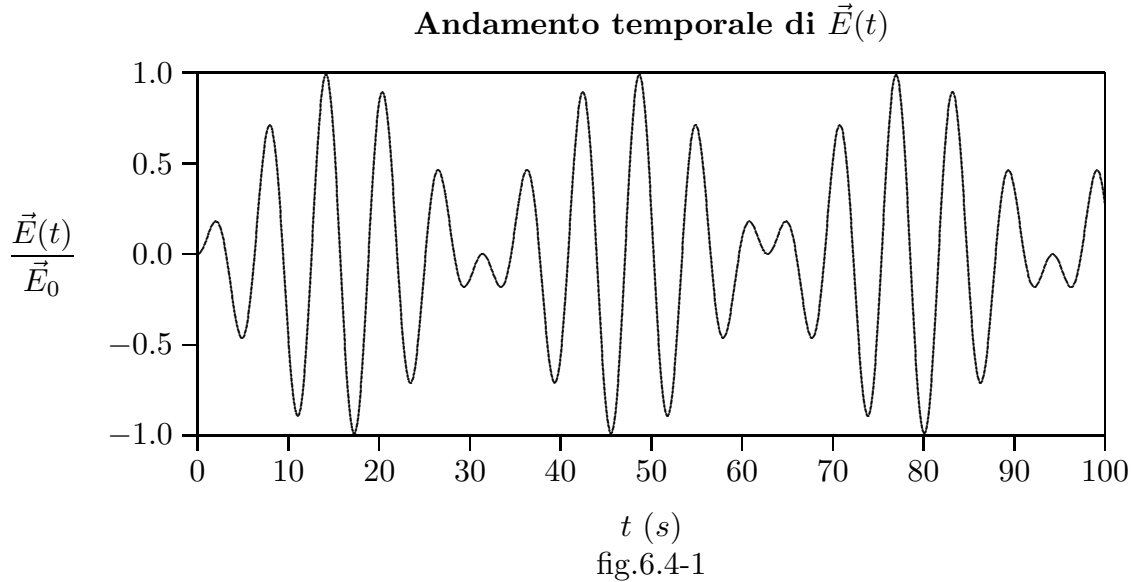
dove \vec{E}_0 è un vettore costante e $\Delta\omega$ è una quantità piccola rispetto a ω . Poiché $\vec{D} = \epsilon(\omega)\vec{E}$, il vettore induzione elettrica è:

$$\vec{D}(t) = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \{ [\epsilon(\omega + \Delta\omega)] \cos(\omega + \Delta\omega)t - [\epsilon(\omega - \Delta\omega)] \cos(\omega - \Delta\omega)t \} \quad (6.4.15)$$

e la densità di corrente di spostamento é:

$$\frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \vec{E}_0 \{ (\omega + \Delta\omega) [\epsilon(\omega + \Delta\omega)] \sin(\omega + \Delta\omega)t - (\omega - \Delta\omega) [\epsilon(\omega - \Delta\omega)] \sin(\omega - \Delta\omega)t \} \quad (6.4.16)$$

A titolo di esempio riportiamo nel seguente grafico l'andamento temporale del campo elettrico dato dalla (6.4.14) per $\omega = 1 \text{ rad/s}$ e $\Delta\omega = 0.1 \text{ rad/s}$.



Sviluppando le funzioni $\epsilon(\omega + \Delta\omega)$ e $\epsilon(\omega - \Delta\omega)$ in serie di Taylor e fermandoci ai primi due termini, otteniamo le espressioni approssimate:

$$\epsilon(\omega + \Delta\omega) \simeq \epsilon(\omega) + \Delta\omega \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \quad (6.4.17)$$

$$\epsilon(\omega - \Delta\omega) \simeq \epsilon(\omega) - \Delta\omega \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \quad (6.4.18)$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} (\omega + \Delta\omega) [\epsilon(\omega + \Delta\omega)] &= \omega\epsilon(\omega) + \omega\Delta\omega \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega} + \Delta\omega\epsilon(\omega) + (\Delta\omega)^2 \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \simeq \\ &\simeq \omega\epsilon(\omega) + \Delta\omega \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega\epsilon(\omega)] \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

$$\begin{aligned} (\omega - \Delta\omega) [\epsilon(\omega - \Delta\omega)] &= \omega\epsilon(\omega) - \omega\Delta\omega \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega} - \Delta\omega\epsilon(\omega) + (\Delta\omega)^2 \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \simeq \\ &\simeq \omega\epsilon(\omega) - \Delta\omega \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega\epsilon(\omega)] \end{aligned} \quad (6.4.20)$$

avendo trascurato i termini quadratici in $\Delta\omega$.

Le equazioni (6.4.19) e (6.4.20) comportano la seguente espressione per la densità di corrente di spostamento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \vec{E}_0 \left\{ \left[\omega \epsilon(\omega) + \Delta \omega \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \right] \sin(\omega + \Delta \omega)t - \right. \\ & \left. - \left[\omega \epsilon(\omega) - \Delta \omega \left(\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \right) \right] \sin(\omega - \Delta \omega)t \right\} \end{aligned} \quad (6.4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \vec{E}_0 \left\{ \omega \epsilon(\omega) \left[\sin(\omega + \Delta \omega)t - \sin(\omega - \Delta \omega)t \right] + \right. \\ & \left. + \Delta \omega \left(\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \right) \left[\sin(\omega + \Delta \omega)t + \sin(\omega - \Delta \omega)t \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.4.22)$$

$$\frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} = -\vec{E}_0 \left[\omega \epsilon(\omega) \sin \Delta \omega t \cos \omega t + \Delta \omega \left(\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \right) \cos \Delta \omega t \sin \omega t \right] \quad (6.4.23)$$

Dall'equazione (6.4.4) si deduce che la variazione temporale della densità di energia elettrica é:

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \vec{E}(t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} \quad (6.4.24)$$

e, quindi l'energia guadagnata durante l'intervallo di tempo $t_1 - t_0$ é data da:

$$w_e(t_1) - w_e(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{E}(t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} dt \quad (6.4.25)$$

Dall'espressione del campo elettrico (6.4.14) é evidente che $\vec{E}(t)$ é zero quando $t = 0$ ed ha la forma di una portante ad alta frequenza $\sin \omega t$ la cui modulante $\sin \Delta \omega t$ varia lentamente con il tempo. Il tempo necessario affinché $\vec{E}(t)$ cresca da zero al suo valore massimo é $\Delta \omega t = \pi/2$ o $t = \pi/2\Delta \omega$. L'energia guadagnata durante l'intervallo di tempo $t_0 = 0$ a $t_1 = \pi/2\Delta \omega$ é data da:

$$w_e = \int_{t_0}^{\pi/2\Delta \omega} \vec{E}(t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} dt \quad (6.4.26)$$

Sostituendo nella (6.4.26) le equazioni (6.4.14) e (6.4.23), si ha:

$$\begin{aligned} w_e = & \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 \omega \epsilon(\omega) \int_{t_0}^{\pi/2\Delta \omega} \sin^2 \Delta \omega t \sin \omega t \cos \omega t dt + \\ & + \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 \Delta \omega \left(\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \right) \int_{t_0}^{\pi/2\Delta \omega} \sin^2 \omega t \sin \Delta \omega t \cos \Delta \omega t dt \end{aligned} \quad (6.4.27)$$

Il primo integrale al secondo membro é trascurabile rispetto al secondo. Nel secondo integrale possiamo sostituire $\sin^2 \omega t$ con $1/2$ e cosí si può scrivere:

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\pi/2\Delta \omega} \sin \Delta \omega t \cos \Delta \omega t dt = \frac{1}{4\Delta \omega} \quad (6.4.28)$$

Segue che la densità di energia elettrica mediata in un periodo é data da:

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \quad (6.4.29)$$

Se invece per $\vec{E}(t)$ prendiamo $\vec{E}(t) = \Re[\vec{E}_0(t)e^{-i\omega t}]$ dove $\vec{E}_0(t)$ é una funzione lentamente variabile nel tempo, abbiamo:

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \right) \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* \quad (6.4.30)$$

Poiché $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 (1 - \omega_p^2/\omega^2)$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] &= \epsilon(\omega) + \omega \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) + \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right] = \\ &= \epsilon_0 - \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \epsilon_0 \omega \frac{2\omega \omega_p^2}{\omega^4} = \epsilon_0 - \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \epsilon_0 \frac{2\omega_p^2}{\omega^2} = \epsilon_0 + \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (6.4.31)$$

Quindi:

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* + \frac{1}{4} \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* \quad (6.4.32)$$

che mostra che $\langle w_e \rangle$ é la somma di due termini, il primo rappresentante l'energia nel vuoto ed il secondo rappresentante l'energia cinetica degli elettroni. (Formalmente questo risultato può essere ottenuto dal teorema dell'energia).

Per dimostrare che il secondo termine é eguale all'energia cinetica, mediata in un periodo, degli elettroni scriviamo la formula della velocità del singolo elettrone, nel caso di plasma senza collisioni, derivante dalla (6.2.16) dopo aver posto $\omega_{eff} = 0$:

$$\vec{v} = i \frac{q \vec{E}}{\omega m} \quad (6.4.33)$$

La densità di energia cinetica, ossia l'energia cinetica per unità di volume, mediata in un periodo é allora:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \left[\frac{1}{2} n m \vec{v} \cdot \vec{v}^* \right] \right\} = \frac{1}{4} n m \vec{v} \cdot \vec{v}^* = \frac{1}{4} \frac{n q^2}{\omega^2 m} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (6.4.34)$$

Utilizzando la definizione della frequenza di plasma $\omega_p^2 = \frac{n q^2}{\epsilon_0 m}$, si ottiene:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (6.4.35)$$

che é identica al secondo termine dell'espressione precedente.

In definitiva vediamo che per un plasma senza perdite la densitá di energia elettromagnetica totale mediata in un periodo é la somma dell'energia immagazzinata nel campo elettrico data dalla (6.4.30) e di quella immagazzinata nel campo magnetico data dalla (6.4.11), ossia:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}^* + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \right) \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (6.4.36)$$

Cosí come abbiamo dimostrato nel capitolo 2 (vedi formule (2.10.21) e (2.10.22)) dimostriamo che in un plasma senza perdite la densitá media di energia magnetica é uguale alla densitá media di energia elettrica.

Infatti, nel caso di onde elettromagnetiche piane, risulta:

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega \mu_0} \hat{n} \times \vec{E} \quad (6.4.37)$$

essendo \hat{n} il vettore unitario lungo la direzione di propagazione.

Quindi:

$$\frac{1}{4} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}^* = \frac{1}{4} \mu_0 \left(\frac{k}{\omega \mu_0} \right)^2 (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot (\hat{n} \times \vec{E}^*) \quad (6.4.38)$$

Dal formulario F2 si ha:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{D} \vec{C} - \vec{B} \cdot \vec{C} \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (6.4.39)$$

Posto $\vec{A} = \hat{n}$, $\vec{B} = \vec{E}$, $\vec{C} = \hat{n}$, $\vec{D} = \vec{E}^*$ e considerando l'eguaglianza fra il primo e l'ultimo membro si ha:

$$(\hat{n} \times \vec{E}) \cdot (\hat{n} \times \vec{E}^*) = (\hat{n} \cdot \hat{n})(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) - (\hat{n} \cdot \vec{E}^*)(\vec{E} \cdot \hat{n}) = (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \quad (6.4.40)$$

essendo $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ in quanto vettori ortogonali ed $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$.

In definitiva:

$$\frac{1}{4} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}^* = \frac{1}{4} \mu_0 \left(\frac{k}{\omega \mu_0} \right)^2 \vec{E} \cdot \vec{E}^* = \frac{1}{4} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (6.4.41)$$

in quanto:

$$\left(\frac{k}{\omega \mu_0} \right)^2 = \left(\frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu_0}}{\omega \mu_0} \right)^2 = \frac{\epsilon}{\mu_0} \quad (6.4.42)$$

Pertanto la (6.4.36) ossia la densitá di energia elettromagnetica immagazzinata nel plasma si scrive:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \right) \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (6.4.43)$$

6.5 - Velocità di fase, di gruppo e dell'energia in un plasma senza perdite

Ad ogni onda elettromagnetica trasversale si possono associare tre tipi di velocità: la velocità di fase, il cui valore può essere trovato dalla conoscenza dell'indice di rifrazione utilizzando la relazione $v_f = c/n$; la velocità di gruppo v_g che per definizione è $\partial\omega/\partial\beta$ e la velocità di trasporto dell'energia v_{en} che è definita dal rapporto $\langle S_z \rangle / \langle w \rangle$. Infatti sia $\langle \vec{S} \rangle$ la densità di potenza che attraversa una superficie unitaria. Dopo un secondo l'energia da essa trasportata si trova immagazzinata in un volume pari al prodotto della superficie unitaria per la velocità dell'energia nel mezzo, ossia in un volume contenuto in un cilindro la cui base è la superficie unitaria e la cui altezza è la velocità dell'energia nel mezzo.

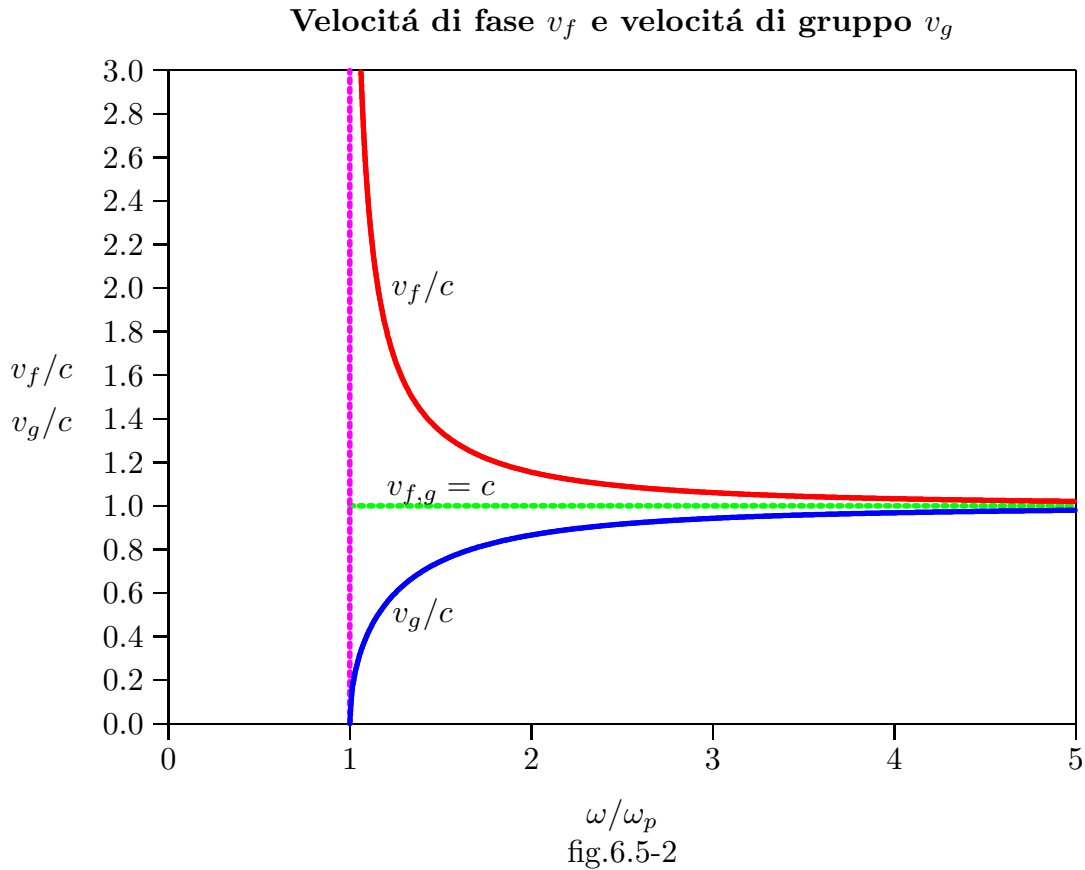
Supponendo di nuovo che il plasma sia senza perdite, le espressioni per la velocità di fase e per quella di gruppo sono:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (\omega \geq \omega_p) \quad (6.5.1)$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = \frac{1}{\frac{\partial\beta}{\partial\omega}} = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial\omega} \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \frac{1}{c} \frac{\frac{2\omega_p^2}{\omega^2}}{2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\frac{1}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) + \frac{1}{c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (\omega \geq \omega_p) \quad (6.5.2)$$

La (6.5.2) si può scrivere in virtù di un noto teorema sulle funzioni inverse: sia $f(x)$ una funzione crescente (decrecente) nell'intervallo $[a, b]$ ed ivi derivabile. Se $f'(x) \neq 0$ anche la funzione $\varphi(y)$ inversa di $f(x)$ è derivabile e si ha: $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.



Poiché un aumento della lunghezza d'onda (o, equivalentemente, una diminuzione della frequenza) risulta in un aumento della velocità di fase, **la dispersione è detta normale**.

Per trovare v_{en} , notiamo che il valore mediato in un periodo del vettore di Poynting dell'onda elettromagnetica è diretto lungo l'asse z ed ha il valore:

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \Re \hat{z} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \Re \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* \quad (6.5.3)$$

Notiamo, inoltre, che la densità di energia elettromagnetica mediata in un periodo data dalla (6.4.43) in questo caso si riduce a:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \epsilon \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\omega)] \right) \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* \quad (6.5.4)$$

Quindi la velocità di trasporto dell'energia assume la forma:

$$v_{en} = \frac{\langle \vec{S}_z \rangle}{\langle w \rangle} = \frac{\frac{1}{2} \Re \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}}}{\frac{1}{4} \epsilon + \frac{1}{4} \epsilon + \frac{1}{4} \omega \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega}} = \frac{\frac{1}{2} \Re \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}}}{\frac{1}{2} \epsilon + \frac{1}{4} \omega \frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega}} \quad (6.5.5)$$

Ricordando che $\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$, si ha:

$$\frac{\partial \epsilon(\omega)}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right] = \epsilon_0 \frac{2\omega\omega_p^2}{\omega^4} = \epsilon_0 \frac{2\omega_p^2}{\omega^3} \quad (6.5.6)$$

Sostituendo, quindi, nella (6.5.5) si ottiene:

$$v_{en} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\frac{1}{2} \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (\omega \geq \omega_p) \quad (6.5.7)$$

che é identica all'espressione (6.5.2) della velocità di gruppo.

6.6 - Velocità di fase, di gruppo e dell'energia in un plasma con piccole perdite

Consideriamo, ora, un plasma con piccole perdite. Nel caso limite in cui $|\epsilon| \gg \sigma/\omega$, le perdite sono piccole e possiamo usare le formule (6.3.8) e la formula (6.3.9) per la velocità di fase.

La velocità di gruppo é, allora:

$$v_g = \frac{c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}}{1 - \frac{\omega_p^2 \omega_{eff}^2}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)^2}} \quad (6.6.1)$$

Osserviamo subito che la velocità di fase diminuisce in presenza di perdite. La velocità di gruppo, invece aumenta in presenza di perdite. L'interpretazione della velocità di gruppo e della velocità di trasporto dell'energia cade quando il mezzo é dissipativo.

6.7 - Effetto Doppler in un mezzo omogeneo dispersivo

Applicheremo, ora, la formula dell'effetto Doppler alla situazione in cui una sorgente monocromatica ed un osservatore siano in un mezzo omogeneo dispersivo. Limiteremo la nostra discussione ai due casi: in uno la sorgente é fissa rispetto al mezzo e nell'altro l'osservatore é fisso rispetto al mezzo. L'osservatore é assunto essere nel campo 'lontano' della sorgente cosicché, con buona approssimazione, le onde che gli arrivano possono essere considerate piane.

Nel caso in cui la sorgente é fissa rispetto al mezzo, scegliamo il sistema di riferimento S solidale al mezzo ed alla sorgente ed il sistema di riferimento S' solidale all'osservatore ossia in moto rispetto al sistema S con velocità v . Dalla formula (2.11.16), si ha:

$$\omega' = \gamma \omega [1 - \beta n(\omega) \cos \theta] \quad (\beta c = v) \quad (6.7.1)$$

dove ω é la frequenza della sorgente nel sistema S , e ω' é la frequenza osservata nel sistema di riferimento in moto S' . L'indice di rifrazione $n(\omega)$ é valutato nel sistema di riferimento S . Poiché $n(\omega) \geq 0$, segue dall'espressione (6.7.1) che quando l'osservatore si muove verso la sorgente ($\theta = \pi$), **ossia sorgente e osservatore sono in avvicinamento**, ω' é piú grande di ω , come accadrebbe se il mezzo fosse il vuoto. Tuttavia, **quando l'osservatore si allontana dalla sorgente** ($\theta = 0$), ω' non é necessariamente minore di ω . In circostanze speciali (per esempio, quando il mezzo é un plasma vicino alla risonanza, $\omega \simeq \omega_p$) $n(\omega)$ puó diventare cosí piccolo che ω' diventerebbe piú grande di ω , in contraddizione con il corrispondente fenomeno nel vuoto, dove ω' verrebbe ad essere necessariamente minore di ω .

Nel caso in cui l'osservatore é in quiete rispetto al mezzo, scegliamo S solidale al mezzo ed all'osservatore, e S' solidale alla sorgente e che quindi si muove con velocità \vec{v} rispetto a S . Vale di nuovo la (6.7.1) dove ora ω' é la frequenza della sorgente e ω la frequenza dell'osservatore.

Quando $\theta = \pi$ la sorgente si allontana dall'osservatore, e quando $\theta = 0$ essa si avvicina all'osservatore. A causa della natura dispersiva di $n(\omega)$, l'espressione (6.7.1) non é, in generale, monotona fra ω' e ω . Quindi, ad un dato valore di ω' puó corrispondere piú di un valore di ω . Questo significa che la radiazione che arriva all'osservatore puó apparire avere parecchie componenti spettrali anche se la sorgente oscilla a singola frequenza. Questo **splitting della radiazione monocromatica emessa** in diverse componenti o modi é chiamato **effetto Doppler complesso**.

Se il mezzo fosse non dispersivo, l'espressione (6.7.1) comporterebbe, naturalmente, una relazione monotona fra ω' e ω . Come esempio illustrativo, esaminiamo l'effetto Doppler complesso nel caso speciale in cui il mezzo sia un plasma omogeneo. Per tale mezzo l'equazione (6.7.1) diventa:

$$\omega' = \gamma \left(\omega - \beta \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \cos \theta \right) \quad (6.7.2)$$

essendo ω_p la frequenza angolare di plasma. Un grafico di ω' versus ω é mostrato in figura (6.7-1) e in figura (6.7-2).

La curva ha due rami, uno dato dalla linea azzurra e l'altro dalla linea rossa. La linea rossa rappresenta, dall'equazione 6.7.2, il caso $\theta = \pi$ (la sorgente si allontana dall'osservatore), e la linea azzurra rappresenta, dall'equazione 6.7.2, il caso $\theta = 0$ (la sorgente si avvicina all'osservatore). I due rami si uniscono nel punto A , dove $\omega = \omega_p$ e $\omega' = \gamma\omega_p$. La linea azzurra ha il punto di minimo in B , dove $\omega = \gamma\omega_p$ e $\omega' = \omega_p$. Gli asintoti formano con gli assi un angolo ψ che dipende dalla velocità relativa v secondo la relazione:

$$\tan \psi = \frac{\sqrt{1 - \beta}}{\sqrt{1 + \beta}} \quad (6.7.3)$$

Dalla curva si evince che per un dato valore ω'_s di ω' piú grande di $\gamma\omega_p$, otteniamo un singolo valore ω_r di ω quando la sorgente é in avvicinamento. Vediamo anche che se ω'_s é minore di $\gamma\omega_p$, l'onda dovuta alla sorgente in allontanamento é sotto il cutoff, e l'onda dovuta alla sorgente in avvicinamento si divide in due comportando cosí due valori di ω_a invece di uno solo. Una di queste due frequenze é sempre piú grande di ω'_s ,

mentre l'altra può essere più grande o più piccola di ω'_s a secondo di quanto ω'_s è vicino a $\gamma\omega_p$. Finalmente, notiamo che se ω'_s è minore di ω_p allora l'onda dovuta alla sorgente in avvicinamento è sotto il cutoff.

$\beta = 0.9, \gamma = 2.2942, \tan \psi = 0.22942, \psi = 12^{\circ}.921$

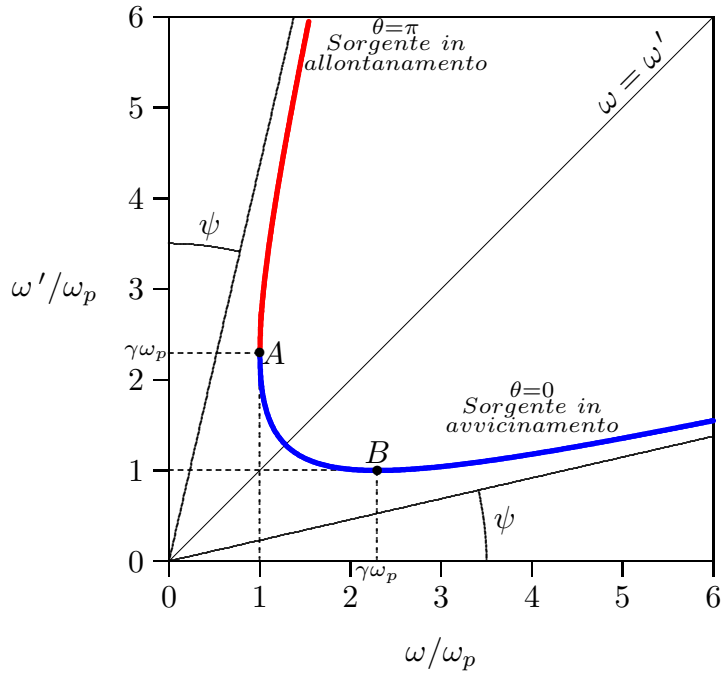


fig.6.7-1

$\beta = 0.5, \gamma = 1.1547, \tan \psi = 0.57735, \psi = 30^{\circ}$

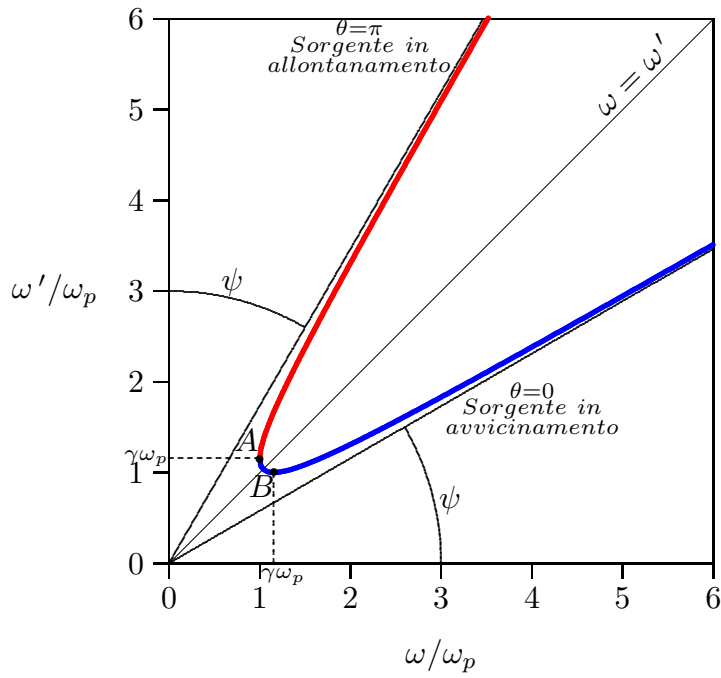


fig.6.7-2

6.8 - Indice di rifrazione di un mezzo omogeneo in moto

Per valutare l'indice di rifrazione di un mezzo omogeneo in moto con velocità \vec{v} rispetto ad un sistema di riferimento S , scegliamo un sistema di riferimento S' che è solidale al mezzo e assumiamo che in S' vi sia un'onda monocromatica piana avente vettore d'onda \vec{k}' e frequenza ω' . Nel sistema di riferimento S l'onda è osservata come un'onda piana di vettore d'onda \vec{k} e frequenza ω . L'indice di rifrazione del mezzo è definito come $n' = ck'/\omega'$ in S' e da $n = ck/\omega$ in S .

Come punto di partenza per il calcolo utilizziamo le trasformazioni:

$$\vec{k} = \vec{k}' + \gamma \frac{\omega'}{c^2} \vec{v} + (\gamma - 1) \frac{\vec{k}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (6.8.1)$$

$$\omega = \gamma(\omega' + \vec{v} \cdot \vec{k}') \quad (6.8.2)$$

Dall'equazione (6.8.1) troviamo che k è dato da:

$$k = \left[k'^2 + 2\gamma^2 \frac{\omega'}{c^2} \vec{k}' \cdot \vec{v} + (\gamma^2 - 1) \frac{(\vec{k}' \cdot \vec{v})^2}{v^2} + \gamma^2 \frac{\omega'^2}{c^2} \beta^2 \right]^{1/2} \quad (6.8.3)$$

Dividendo l'equazione (6.8.3) per l'equazione (6.8.2) e tenendo conto che $\vec{k}' \cdot \vec{v} = k'v \cos \theta'$, otteniamo:

$$\frac{k}{\omega} = \frac{\sqrt{k'^2 + 2\gamma^2 \frac{\omega'}{c^2} k'v \cos \theta' + (\gamma^2 - 1) k'^2 \cos^2 \theta' + \gamma^2 \frac{\omega'^2}{c^2} \beta^2}}{\gamma(\omega' + k'v \cos \theta')} \quad (6.8.4)$$

Poiché per definizione $n = ck/\omega$ e $n' = ck'/\omega'$, segue dall'equazione (6.8.4) che:

$$n = \frac{ck}{\omega} = \frac{\sqrt{n'^2 + 2\gamma^2 n' \beta \cos \theta' + (\gamma^2 - 1) n'^2 \cos^2 \theta' + \gamma^2 \beta^2}}{\gamma(1 + n' \beta \cos \theta')} \quad (6.8.5)$$

Sebbene questa relazione lega n ad n' , non è ancora la relazione che noi desideriamo, perché essa coinvolge l'angolo θ' . Per ottenere la relazione desiderata, noi dobbiamo eliminare θ' in favore dell'angolo θ fra \vec{k} e \vec{v} . Per questo, coinvolgiamo le relazioni dell'aberrazione:

$$\cos \theta = \frac{\gamma(n' \cos \theta' + \beta)}{\sqrt{n'^2 \sin^2 \theta' + \gamma^2(n' \cos \theta' + \beta)^2}} \quad (6.8.6)$$

$$\cos \theta' = \frac{\gamma(n \cos \theta - \beta)}{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta + \gamma^2(n \cos \theta - \beta)^2}} \quad (6.8.7)$$

Combinando le equazioni (6.8.5) e (6.8.6), otteniamo:

$$n \cos \theta = \frac{n' \cos \theta' + \beta}{1 + n' \beta \cos \theta'} \quad (6.8.8)$$

che, con l'aiuto dell'equazione (6.8.7) comporta la seguente equazione quadratica per n :

$$[1 - (n'^2 - 1) \gamma^2 \beta^2 \cos^2 \theta] n^2 + [2\gamma^2 \beta (n'^2 - 1) \cos \theta] n - \gamma^2 (n'^2 - \beta^2) = 0 \quad (6.8.9)$$

Risolviendo questa equazione e scegliendo la radice che comporta $n = n'$ per $\vec{v} = 0$, otteniamo la relazione desiderata:

$$n = \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 (n'^2 - 1) (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} - \beta \gamma^2 (n'^2 - 1) \cos \theta}{1 - \gamma^2 (n'^2 - 1) \beta^2 \cos^2 \theta} \quad (6.8.10)$$

Qui n' é l'indice di rifrazione del mezzo nel sistema S' , che é a riposo rispetto al mezzo, n é l'indice di rifrazione nel sistema S , rispetto al quale il mezzo si muove con velocità \vec{v} , e θ é l'angolo fra \vec{v} ed il vettore d'onda \vec{k} . Vediamo dall'equazione (6.8.10) che l'indice di rifrazione n di un mezzo in movimento dipende dalla velocità $v = \beta c$ del mezzo e dall'angolo θ fra \vec{k} e \vec{v} . Quando $\beta^2 \ll 1$, l'equazione (6.8.10) si riduce alla seguente equazione:

$$n = n' - (n'^2 - 1) \beta \cos \theta \quad (6.8.11)$$

che é valida sia per i mezzi dispersivi che per i mezzi non dispersivi. Nel caso in cui la direzione di \vec{k} é parallela ($\theta = 0$) o antiparallela ($\theta = \pi$) a \vec{v} ed il mezzo é non dispersivo, l'equazione (6.8.11) comporta:

$$v_f = \frac{c}{n'} \pm \nu \left(1 - \frac{1}{n'^2} \right) \quad (6.8.12)$$

dove $v_f = c/n$ é la velocità di fase dell'onda in S . Questa é la ben conosciuta formula di Fresnel. Il coefficiente $(1 - 1/n'^2)$ é chiamato il coefficiente di trascinamento di Fresnel. La formula di Fresnel fu verificata sperimentalmente da Fizeau che usó un flusso di acqua come mezzo in moto. Per un mezzo dispersivo l'equazione (6.8.11) deve essere modificata. Per questo, osserviamo che nell'equazione (6.8.10) l'indice di rifrazione n' é una funzione di ω' . Poiché la formula dell'effetto Doppler per basse velocità ($\beta^2 \ll 1$) comporta $\omega' \mp \beta n \omega$, dove il segno superiore vale per $\theta = 0$ ed il segno inferiore vale per $\theta = \pi$, vediamo che:

$$n'(\omega') = n'(\omega \mp \beta n \omega) \quad (6.8.13)$$

Sviluppando in serie attorno ad ω , tenendo solo i primi due termini si ha:

$$n'(\omega') = n'(\omega) \mp \beta n \omega \frac{\partial n'(\omega)}{\partial \omega} \quad (6.8.14)$$

Sostituendo questo sviluppo nell'equazione:

$$n = n' \mp (n'^2 - 1) \beta \quad (6.8.15)$$

che segue dalla equazione (6.8.11) quando $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ e trascurando i termini in β^2 , si ha:

$$n = n'(\omega) \mp [n'^2(\omega) - 1] \beta \mp \beta \omega n'(\omega) \frac{\partial n'(\omega)}{\partial \omega} \quad (6.8.16)$$

Poiché $v_f = c/n$, deduciamo dalla (6.8.16) che:

$$v_f = \frac{c}{n'(\omega)} \pm \nu \left[1 - \frac{1}{n'^2(\omega)} \right] \pm \frac{\omega}{n'(\omega)} \frac{\partial n'(\omega)}{\partial \omega} \quad (6.8.17)$$

Questa é la forma che l'equazione (6.8.12) assume per un mezzo dispersivo. Vediamo che la natura dispersiva del mezzo é contenuta nell'ultimo termine del secondo membro. Questo termine é talvolta chiamato **termine di Lorentz**. Fu verificato sperimentalmente da Zeeman.

6.9 - Fenomeni elettromagnetici non lineari nei plasmi ed in particolare nella ionosfera - Cross modulation o Effetto Lussemburgo

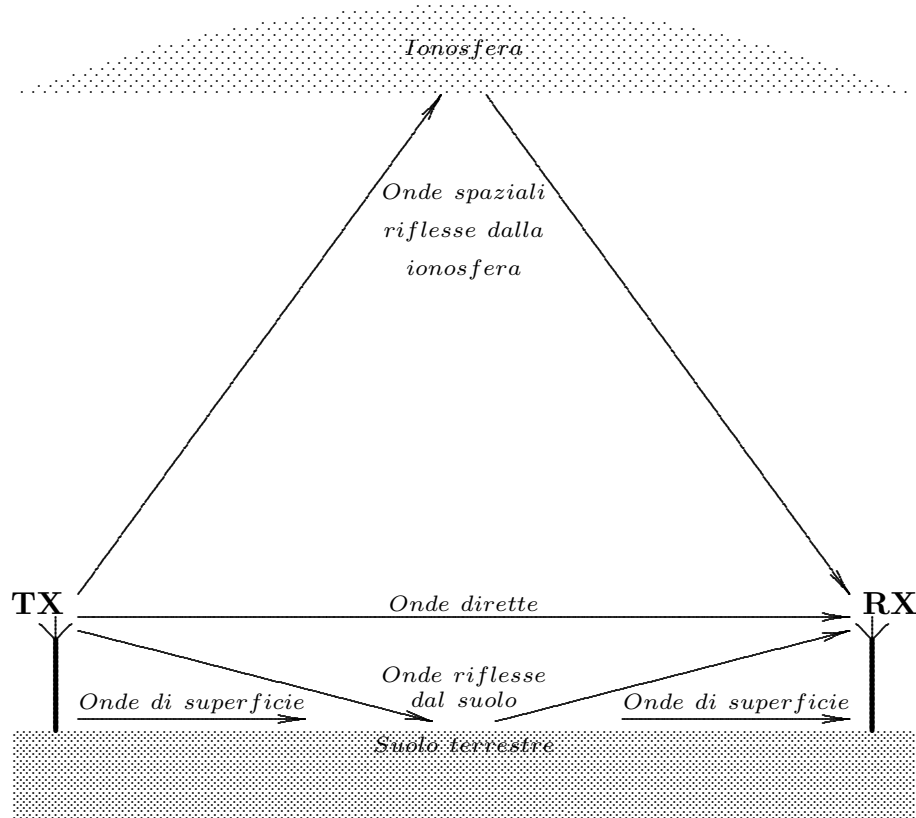


fig.6.9-1

I fenomeni di propagazione delle onde elettromagnetiche dipendono, essenzialmente, dalla costituzione dell'atmosfera che circonda la Terra e dalla frequenza dell'onda. Poiché il diagramma di radiazione dell'antenna trasmittente non è mai diretto lungo una precisa direzione ma come sappiamo è costituito da lobi più o meno larghi in ampiezza angolare, in generale le onde elettromagnetiche irradiate nello spazio da un'antenna trasmittente (TX) possono giungere all'antenna ricevente (RX) seguendo diversi percorsi, come mostrato in figura 6.9-1.

Le onde elettromagnetiche, nei confronti della direzione di propagazione, si classificano in onde spaziali e onde terrestri. Le onde spaziali sono dovute al fenomeno della riflessione dell'onda da parte della ionosfera e sono alla base delle trasmissioni a grande distanza. Le onde terrestri sono quelle che si propagano nelle vicinanze della terra. Esse si classificano in onde dirette, onde riflesse e onde di superficie. Le onde dirette e riflesse, a causa della curvatura terrestre, hanno importanza solo quando l'antenna ricevente è nel campo visivo di quella trasmittente; cioè le antenne sono in linea in modo da potersi vedere. Esse trovano applicazione nel campo delle onde ultracorte e microonde. Le onde di superficie sono dovute a fenomeni di diffrazione del suolo assimilabile, come è noto, ad un conduttore posto sotto l'antenna. La conducibilità del suolo vincola le onde a seguire la curvatura terrestre. Tali onde hanno importanza nel campo delle comunicazioni a breve distanza con onde medie e lunghe.

Nei paragrafi che seguono ci proponiamo di illustrare uno dei piú bei fenomeni non lineari che coinvolgono la propagazione radio ionosferica.

Il piú noto fenomeno non lineare che si manifesta nella propagazione delle onde elettromagnetiche in un plasma é la cosiddetta interazione delle radioonde, cioé la possibilitá di trasferire la modulazione di un'onda su un'altra di diversa frequenza. Il fenomeno, osservato la prima volta sperimentalmente nel 1933, é stato poi interpretato con una teoria che ha permesso di prevedere estensioni e modalitá del fenomeno stesso; previsioni confermate dall'esperienza. Questa teoria é ovviamente non lineare, perché introduce nelle equazioni del campo elettromagnetico termini non lineari.

Studieremo il fenomeno nel caso di propagazione di onde radio attraverso la ionosfera.

6.10 - Effetto Lussemburgo

Nel 1933, ad Eindhoven (Olanda), un tecnico della Philips, B.D.H. Tellegen,¹⁾ con un radiorecettore accordato su Beromünster (Svizzera)²⁾ notó apparire come brusio di fondo il programma di Lussemburgo. Il fenomeno osservato non era da attribuirsi a poca selettivitá del ricevitore, perché le due stazioni emettevano con lunghezza d'onda molto diversa,³⁾ né poteva essere dovuto a qualche altra proprietá del radiorecettore, perché il brusio di fondo si osservava con qualunque tipo di apparato ricevente.

Restava perciò l'ipotesi, pensata dal Tellegen, che, **durante la propagazione, l'onda di Lussemburgo imprimesse a quella di Beromünster la sua modulazione.** A questo fenomeno, per cui una radioonda puó imprimere la sua modulazione ad un'altra che si propaga contemporaneamente, é stato dato il nome di effetto Lussemburgo, ed anche in modo piú preciso quello di fenomeno di azione mutua (interazione) fra radioonde o cross-modulation.⁴⁾

Per la nomenclatura del fenomeno noteremo che la stazione su cui é accordato il radio ricevitore viene chiamata in inglese 'wanted', l'altra 'unwanted'. Noi tradurremo tali parole rispettivamente con 'ricercata' o 'desiderata' e 'non ricercata' o 'non desiderata' o

¹⁾ B.D.H. Tellegen: Nature, 1933, CXXXI, pag.840.

²⁾ Switzerland's National Public Radio fondata nel 1931 come risposta alla propaganda nazista in Germania. Era una trasmittente AM di 60KW in lingua tedesca.

³⁾ Lussemburgo m.1190, Beromünster m.460. Non essendo poi 1190 multiplo di 460, si veniva ad escludere che il fenomeno potesse attribuirsi ad una armonica di Lussemburgo.

⁴⁾ É da notare che poco prima del Tellegen, A.G. Butt (World Radio, 28 Aprile 1933) aveva osservato un fenomeno del tipo di quello descritto, ma é merito di Tellegen l'aver escluso che esso fosse dovuto al ricevitore.

'disturbatrice'.

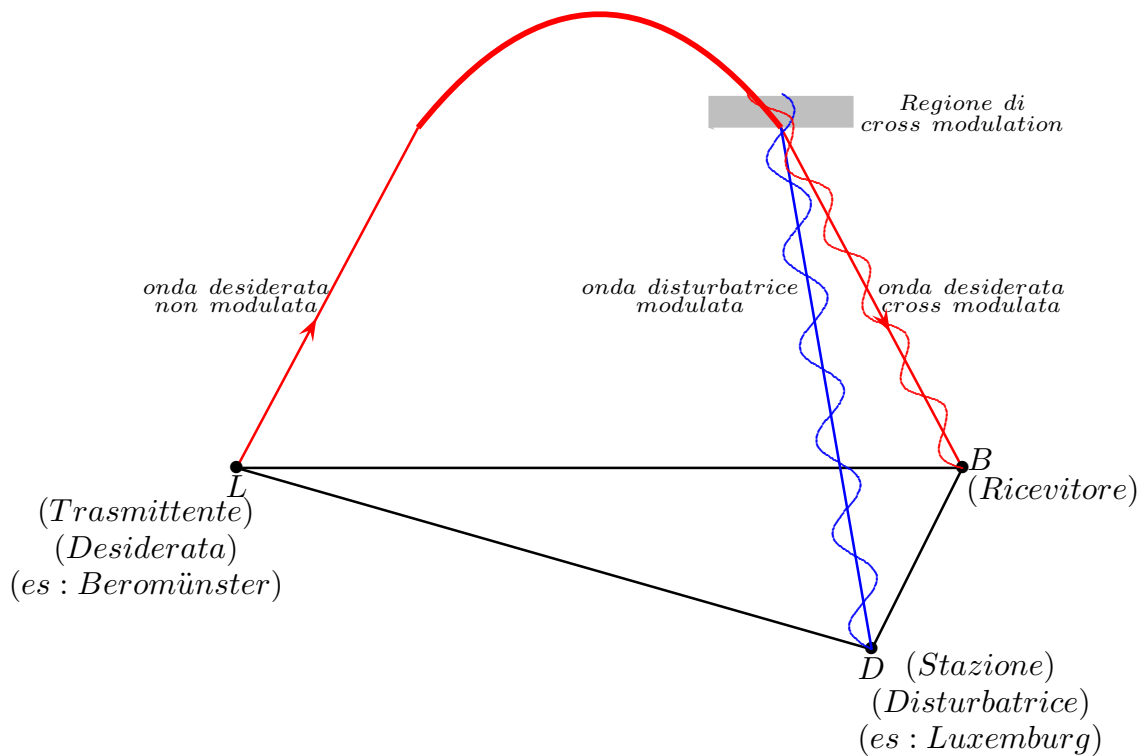


fig. 6.10-1

Siano L e D due stazioni trasmittenti e B un punto di osservazione. La trasmittente L emette **un'onda non modulata** (portante) ad una frequenza $\omega_w/2\pi$. Questa onda e la sua frequenza sono chiamate **onda desiderata** e **frequenza desiderata** rispettivamente. La trasmittente in D é chiamata **trasmittente disturbatrice**. Essa emette un'onda portante di frequenza $\omega_{unw}/2\pi$ (**onda disturbatrice e frequenza disturbatrice**) che può essere modulata da un'onda sinusoidale a frequenza audio $\omega_m/2\pi$.

Si trova che l'onda desiderata emessa da L quando ricevuta in B é cross modulata con la frequenza dell'onda disturbatrice; il fenomeno avviene quando i campi delle due onde si incontrano nella regione E della ionosfera.

6.11 - Risultati sperimentali sull'Effetto Lussemburgo

Dopo la scoperta del Tellegen, specie per opera di van der Pol e van der Mark fu dato notevole impulso alle ricerche sperimentali sul fenomeno osservato. Già il Tellegen aveva notato che la stazione di Lussemburgo disturbava non solo l'audizione di Beromünster, ma anche quelle di Milano, Budapest, Francoforte ed altre. Van der Pol e van der Mark, con la collaborazione di altri osservatori, estesero e moltiplicarono le constatazioni del fenomeno e provarono che anche i trasmettitori di Radio-Paris, Praga, Königwusterhausen possono imprimere la loro modulazione sulle onde di altre stazioni.

Dai risultati sperimentali raccolti, i due autori dedussero, che la stazione disturbatrice deve essere di grande potenza, emettere su lunghezza d'onda compresa fra i 470 e 2000

metri e trovarsi a distanza di 250-300 Km dall'arco di cerchio massimo, che unisce la ricercata ed il ricevitore.

Infine, poiché il fenomeno si verificava solo di notte, ricavarono una nuova conferma del fatto, che esso non dipende dal radiorecettore.

Nella notte dal 15 al 16 febbraio 1934 van der Pol ed il suo collaboratore fecero alcune misure sistematiche sull'effetto Lussemburgo. In seguito ad opportuni accordi, in quella notte Lussemburgo eseguì a piena potenza una serie di emissioni, la cui frequenza e profondità di modulazione variavano ogni quattro minuti, mentre Beromünster emetteva la sua onda portante non modulata. Con un ricevitore posto ad Eindhoven e accordato su Beromünster si poté ascoltare nettamente Lussemburgo e determinare la profondità di modulazione che l'onda di questa stazione imprimeva su Beromünster. Risultò che tale profondità era, a parità di altre condizioni, proporzionale a quella della emissione disturbatrice, e decrescente al crescere della frequenza di modulazione. Infine per confermare una volta ancora che il fenomeno non era da attribuirsi al radiorecettore fu cambiata lievemente la frequenza di emissione delle due stazioni (Beromünster e Lussemburgo) e non si notò alcuna differenza nella ricezione.

Le ricerche di van der Pol e van der Mark furono interrotte al sopraggiungere dell'estate 1934, perché in tale stagione i fenomeni atmosferici mascherano completamente il fenomeno in esame. Nel successivo inverno le ricerche furono riprese. Dalle 23 alle 24 dei giorni 22 febbraio, 1 e 8 marzo 1935, la stazione di Lussemburgo emise la sua onda portante modulata a 400 Hz con modulazione telegrafica corrispondente alla lettera X (— · — ·). Gli sperimentatori dovevano ascoltare le altre stazioni di radio diffusione europea ed esaminare se riconoscevano il segnale emesso da Lussemburgo. Poiché come si è detto, le osservazioni riescono più semplici, se la stazione ricercata non ha modulazione, le stazioni di Firenze e di Milano emisero negli stessi giorni e nelle stesse ore le loro onde portanti non modulate. I risultati confermano l'esistenza dell'effetto e provano che esso è possibile su stazioni ricercate di lunghezza d'onda non inferiore a 300 m. È importante notare che van der Pol prevede, per la nuova stazione di Droitwich (U.K.) (P=150 kW, $\lambda = 1500$ m) la possibilità di disturbi a danno della ricezione in Olanda della stazione di Athlone. Ciò fu effettivamente confermato dai fatti fin dal primo giorno in cui Droitwich cominciò le sue emissioni.

6.12 - Richiami sulla teoria della propagazione delle radioonde

Per ben comprendere le spiegazioni proposte dell'effetto Lussemburgo, richiamiamo qualche elemento della teoria, che interpreta la propagazione delle radioonde. Come è noto, si ammette che le radioonde si propagano lungo il suolo per costituire il cosiddetto raggio diretto, in parte nella ionosfera per costituire il raggio indiretto o riflesso. Occorre tener conto particolarmente di quest'ultimo, perché ha speciale interesse per il nostro caso.

Si sa che la ionosfera è costituita da molecole neutre, da varie specie di ioni e da elettroni liberi. In base a considerazioni, che sono abbastanza note, si ritiene che l'influenza degli ioni sulla propagazione delle onde radio sia trascurabile rispetto a quella degli elettroni; per cui, anche per semplificare l'esposizione, ammettiamo la ionosfera costituita da molecole neutre e da elettroni liberi. Di più, essendo il numero degli elettroni piccolo

rispetto a quello delle molecole, trascuriamo gli urti fra elettroni ed elettroni tenendo conto solo di quelli fra elettroni e molecole.

Supponiamo per ora, che nella ionosfera non si propagano radioonde. Gli elettroni si muovono allora con velocità costante, fino a che un urto non venga a cambiarla bruscamente. Durante tali urti l'elettrone può cedere parte della sua energia cinetica alle molecole e viceversa. Supposto raggiunto l'equilibrio statistico, è intuitivo ammettere che, per ogni unità di volume⁵⁾ e in ogni istante, l'energia cinetica ceduta da alcuni elettroni alle molecole venga compensata da altrettanta energia ceduta dalle molecole agli elettroni.

Se invece nella ionosfera si propaga una radioonda, il cui campo elettrico ammettiamo sia sinusoidale di pulsazione ω e di ampiezza E , su ciascun elettrone agisce una forza di direzione costante⁶⁾ e di grandezza $eE \sin \omega t$, ove e è la carica dell'elettrone. Indicando perciò con V la velocità istantanea dell'elettrone e con m la sua massa, vale fra un urto e l'altro la relazione:

$$m \frac{dV}{dt} = eE \sin \omega t \quad (6.12.1)$$

Integrando la (6.12.1) si ottiene:

$$V = V_0 - \frac{eE}{\omega m} (\cos \omega t - \cos \omega t') \quad (6.12.2)$$

ove t' è l'istante in cui è avvenuto l'ultimo urto e V_0 la velocità dell'elettrone immediatamente dopo tale urto.⁷⁾

L'equazione (6.12.2) mostra che la velocità dell'elettrone è composta di un termine costante $\left(V_0 + \frac{eE}{\omega m} \cos \omega t' \right)$ e un termine sinusoidale $\left(\frac{eE}{\omega m} \cos \omega t \right)$ e che, ad ogni modo, la velocità, per la presenza del termine in E , non è più quella che si avrebbe in assenza delle radioonde.

L'alterazione della velocità degli elettroni, per effetto del campo elettrico dell'onda, porta, fra le altre, ad una notevole conseguenza. Si dimostra infatti, che l'energia cinetica totale degli elettroni contenuta nell'unità di volume è maggiore di quella che si aveva in assenza della radioonda, per cui nella ionosfera non risultano più verificate le condizioni per l'equilibrio statistico. L'energia cinetica ceduta dagli elettroni alle molecole non è quindi più compensata in modo completo, ossia il passaggio nella ionosfera di un'onda radio ha per effetto un aumento dell'energia cinetica delle molecole. Ciò non può avvenire altro che a spese dell'energia dell'onda stessa, la quale perciò, attraversando la ionosfera, deve subire una certa attenuazione. Si comprende poi subito che questa attenuazione è tanto più notevole, quanto più grande è il numero degli urti che nell'unità di tempo avvengono fra elettroni e molecole.

6.13 - Interpretazione dell'Effetto Lussemburgo

⁵⁾ Si ammette che l'unità di volume sia scelta in modo da contenere un grande numero di molecole ed elettroni.

⁶⁾ Qui ammettiamo, per semplicità, che le radioonde siano polarizzate linearmente.

⁷⁾ Si noti che, sempre per semplicità e senza perdere di vista l'essenza del fenomeno, trascuriamo l'effetto del campo magnetico terrestre.

Ricordate le linee essenziali del meccanismo che spiega la propagazione delle radioonde, passiamo ad accennare alle varie interpretazioni proposte per l'effetto Lussemburgo. L'interpretazione svolta in maniera piú completa é quella dovuta a Bayley e Martin⁸⁾, di cui si vogliono qui illustrare le linee essenziali.

Il punto di partenza é dato dalle seguenti considerazioni, che trovano conferma nel calcolo. Se, come si é detto, l'energia cinetica degli elettroni contenuta in ogni unitá di volume dei gas della ionosfera aumenta, **quando nella ionosfera stessa si propaga una radioonda, si comprende come, a paritá di altre condizioni, debba anche aumentare il numero degli urti, che avvengono nell'unitá di tempo fra elettroni e molecole.** Non é difficile intuire, e risulta confermato dal calcolo, che, se nella ionosfera si propaga una radioonda sinoidale e non modulata, il numero degli urti si stabilizza intorno ad un valore medio dipendente dall'ampiezza del campo elettrico dell'onda. **Ma se l'onda é modulata, si comprende che il numero di urti deve fluttuare nel tempo col ritmo della frequenza di modulazione.**

Supponiamo, ora, che nella ionosfera si propagino due onde di frequenza (portante) diverse, per esempio quelle emesse da Lussemburgo e da Beromünster, la prima modulata e l'altra no. Il numero degli urti dipende evidentemente dalla presenza di ambedue le onde, ma, siccome Lussemburgo é molto piú potente, si puó ammettere che il numero di urti sia approssimativamente lo stesso come se mancasse Beromünster, vale a dire che esso fluttui ancora con la frequenza di modulazione di Lussemburgo. Ma se, come abbiamo osservato, l'attenuazione che l'onda subisce nella ionosfera é tanto piú grande, quanto piú grande é il numero degli urti, ne segue che **l'attenuazione dell'onda di Beromünster deve fluttuare nello stesso modo con cui fluttua quel numero, cioé con la frequenza di modulazione di Lussemburgo. Cosí l'onda di Beromünster arriva al ricevitore con ampiezza piú o meno grande a seconda che l'attenuazione é stata piú o meno intensa, ossia arriva al ricevitore modulata e, per quanto precede, con la frequenza di Lussemburgo.** Con un ricevitore accordato su Beromünster si puó allora udire il programma di Lussemburgo e ció é in accordo con i risultati di van der Pol e van der Mark. Se poi l'onda di Beromünster viene emessa con una certa modulazione sua propria, la modulazione impressa da Lussemburgo si sovrappone a quella propria di Beromünster per cui con un radiorecettore regolato su Beromünster puó ascoltarsi il programma di Lussemburgo come rumore di fondo, in armonia con le osservazioni del Tellegen.

Questa é concettualmente l'interpretazione di Bayley e Martin, da cui vogliamo trarre alcune conseguenze. Anzitutto, poiché il raggio riflesso si verifica, per le onde medie, con notevole intensitá solo di notte, il fenomeno in esame non puó osservarsi di giorno, com'è appunto confermato dai risultati sperimentali.

Di piú, siccome l'intensitá delle onde che penetrano nella ionosfera é tanto minore, quanto piú grande é la loro lunghezza d'onda, si capisce come esista un valore di questa ultima, al di sopra del quale le radioonde non danno piú luogo all'effetto Lussemburgo. Anche questo risultato, come si é visto, é confermato dall'esperienza.

Ma l'esperienza dimostra, che esiste altresí un limite inferiore per le lunghezze d'onda delle stazioni disturbatrici. Anche ció é in accordo con la teoria, perché come si rileva dalla 6.12.2, il termine in E , a cui é dovuta la variazione nel numero medio degli urti, é

⁸⁾ V.A. Bayley e D.F. Martin: Phil. Mag., 1934, XVIII, p.369.

proporzionale inversamente ad ω ossia direttamente a λ per cui deve esistere un valore λ al disotto del quale l'influenza di tale termine sul numero degli urti diventa trascurabile.

Dalle formule di Bayley e Martin si può dedurre, che la profondità di modulazione decresce al crescere della frequenza, in accordo con le esperienze di van der Pol e van der Mark.

Al termine di queste sommarie considerazioni teoriche, è ancora opportuno mettere in rilievo che l'effetto Lussemburgo conduce a rinunciare alla linearità delle equazioni di Maxwell, in base alla quale non sarebbe possibile ammettere l'esistenza del fenomeno stesso, cioè l'influenza reciproca fra due radioonde che si propagano contemporaneamente. Per scrivere le equazioni di Maxwell in forma non lineare, adatta allo studio della propagazione nella ionosfera, sembra che si dovrebbe ricercare la relazione fra densità di corrente e campo elettrico in base alle equazioni della meccanica statistica⁹⁾ nella cui risoluzione non si dovrebbe in questo caso, a differenza di quanto si fa di solito, accontentarsi della prima approssimazione, perché ciò conduce nuovamente alla forma lineare. Si potrebbe forse in tal modo giungere ad una teoria rigorosa dell'effetto Lussemburgo. È dubbio comunque, se una indagine così laboriosa e di incerto risultato meriti di essere affrontata in sostituzione dei procedimenti esposti e delle interpretazioni che essi consentono di formulare.

6.14 - Teoria dell'Effetto Lussemburgo¹⁰⁾¹¹⁾

Supponiamo di avere un plasma in equilibrio termico, ossia l'energia cinetica media degli elettroni è eguale all'energia cinetica media delle molecole neutre e a quella degli ioni. In queste condizioni gli elettroni subiscono un certo numero di urti al secondo con le molecole neutre e con gli ioni. In presenza di un campo elettromagnetico, dimostreremo che la velocità degli elettroni varia e conseguentemente il numero di urti al secondo subirà una variazione anche esso. Quindi dobbiamo cercare la legge con la quale varia il numero di urti al secondo con la velocità e calcolare con tale nuova legge i parametri caratteristici della propagazione dell'onda elettromagnetica nel plasma ossia il coefficiente di attenuazione e la costante di propagazione.

La ionosfera è rarefatta e solo leggermente ionizzata. Così le collisioni fra elettroni e particelle neutre determinano praticamente il trasferimento della quantità di moto e le perdite per dissipazione. Il libero cammino medio degli elettroni è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda delle radio onde; così l'energia cinetica degli elettroni, fra due successive collisioni, è considerevolmente aumentata a causa della presenza del campo elettromagnetico.

6.15 - Descrizione del campo elettromagnetico 'disturbante'

Sia il campo disturbante modulato in ampiezza, ossia costituito da un'onda portante

⁹⁾ Cfr. ad esempio il Cap VIII del libro: G.H. Jeans: *Theorie dynamique des gas* - Blanchard, Paris, 1925.

¹⁰⁾ L.G.H.Huxley and A. Ratcliffe: *A Survey of Ionospheric Cross-modulation*, 1949.

¹¹⁾ Bishwanath Chakraborty: *Principles of Plasma Mechanics* - New Age international Publishers, 2003.

di frequenza ω :

$$E_1 = E_0 \cos \omega t \quad (6.15.1)$$

e da un'onda modulante di piú bassa frequenza ω_1 :

$$E_m = E_{m_0} \cos \omega_1 t \quad (6.15.2)$$

L'onda modulata si scrive, allora:

$$E_2 = (E_0 + E_{m_0} \cos \omega_1 t) \cos \omega t = E_0 (1 + M \cos \omega_1 t) \cos \omega t \quad (6.15.3)$$

essendo:

$$M = \frac{E_{m_0}}{E_0} \quad (6.15.4)$$

la **profonditá di modulazione**.

Il campo modulato si puó anche scrivere:

$$E_2 = E_0 \cos \omega t + E_0 M \cos \omega_1 t \cos \omega t \quad (6.15.5)$$

Poiché:

$$\cos \omega t \cos \omega_1 t = \frac{1}{2} [\cos(\omega t + \omega_1 t) + \cos(\omega t - \omega_1 t)] \quad (6.15.6)$$

la (6.15.5) si scrive, allora:

$$E_2 = E_0 \cos \omega t + \frac{E_0}{2} M \cos[(\omega + \omega_1)t] + \frac{E_0}{2} M \cos[(\omega - \omega_1)t] \quad (6.15.7)$$

Quindi E_2 é il risultato dell'interazione di tre onde aventi la frequenza centrale ω e due frequenze laterali $\omega \pm \omega_1$ che si trovano egualmente distanziate da quella centrale a destra e a sinistra rispettivamente.

Occupiamoci, ora, della densitá di potenza trasportata dall'onda modulata.

Ricordando che la densitá di potenza, mediata in un periodo, é data dal modulo quadro dell'ampiezza E_a del campo elettrico diviso per il doppio dell'impedenza del mezzo, ossia $\mathcal{P}_a = \frac{E_a^2}{2Z}$, si ha:

$$\mathcal{P}_1 = \frac{E_0^2}{2Z} \begin{cases} \text{densitá di potenza dell'onda portante} \\ \text{mediata nel periodo } T = 2\pi/\omega \end{cases} \quad (6.15.8)$$

Dalla (6.15.3) si ha:

$$\mathcal{P}_2 = \frac{E_0^2}{2Z} (1 + M \cos \omega_1 t)^2 \begin{cases} \text{densitá di potenza dell'onda modulata} \\ \text{mediata nel periodo } T = 2\pi/\omega \end{cases} \quad (6.15.9)$$

ossia:

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 (1 + M^2 \cos^2 \omega_1 t + 2M \cos \omega_1 t) \quad (6.15.10)$$

Tenendo conto che $\cos^2 \omega_1 t = \frac{1 + \cos 2\omega_1 t}{2}$, si ha:

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \left(1 + \frac{M^2}{2} + \frac{M^2}{2} \cos 2\omega_1 t + 2M \cos \omega_1 t \right) \quad (6.15.11)$$

ossia:

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) + 2M \mathcal{P}_1 \cos \omega_1 t + \frac{M^2}{2} \mathcal{P}_1 \cos 2\omega_1 t \quad (6.15.12)$$

La media di \mathcal{P}_2 su un periodo $T_1 = 2\pi/\omega_1$ é:

$$\langle \mathcal{P}_2 \rangle = \mathcal{P}_1 \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \quad (6.15.13)$$

6.16 - Equazione di bilancio energetico degli elettroni

Indichiamo con ξ l'energia cinetica media di un elettrone in presenza di un campo elettromagnetico, con ξ_m l'energia cinetica media perduta da un elettrone in seguito ad una collisione con una molecola neutra, con \mathcal{P} la densità di potenza mediata in un periodo impressa dal campo sugli elettroni; allora l'equazione che illustra il trasferimento energetico all'interno di un gas di elettroni é:

$$d(N\xi) + N\nu_{eff}\xi_m dt = \mathcal{P} dt \quad (6.16.1)$$

essendo N il numero di elettroni per unità di volume e ν_{eff} il numero di urti per unità di tempo.

Poiché la sorgente \mathcal{P} é mediata su un periodo di tempo $2\pi/\omega$, essa agisce solo sulle variazioni che avvengono lentamente (cioé sulle variazioni in tempi molto piú grandi di $2\pi/\omega$). Detta ε la frazione media dell'energia cinetica perduta dall'elettrone in ogni collisione, risulta:

$$\xi_m = \varepsilon \xi \quad (6.16.2)$$

Per piccoli valori di ξ_m il valore di ε osservato sperimentalmente é dato dalla seguente formula:

$$\varepsilon = G \left(1 - \frac{1}{K_0} \right) \quad (6.16.3)$$

dove $K_0 = \xi/\xi_0$, essendo ξ_0 l'energia cinetica media di una molecola e G il fattore di perdita energetica per piccole variazioni di energia. Per collisioni puramente elastiche $G = 2m/M$ dove M é la massa di una molecola ed m quella dell'elettrone. Per campi elettrici applicati molto forti, a causa delle complicazioni dovute a collisioni anelastiche, il valore sperimentalmente soddisfacente per G é $2 \cdot 10^{-3}$; cosí l'energia perduta é maggiore per le collisioni anelastiche rispetto alle altre.

La (6.16.2) si può scrivere, allora:

$$\xi_m = G \left(1 - \frac{\xi_0}{\xi} \right) \xi = G (\xi - \xi_0) \quad (6.16.4)$$

La (6.16.3), che vale per piccole perdite di energia dovute alle collisioni, rappresenta la perdita media dell'energia cinetica per elettrone fra due collisioni consecutive; essa é proporzionale alla differenza fra l'attuale energia cinetica media ed il suo valore ξ_0 sotto condizioni di equilibrio termico. Quindi, la potenza assorbita dall'elettrone per secondo, é $G\nu_{eff}(\xi - \xi_0)$.

Trascurando la variazione della densità elettronica N , il tasso a cui l'energia assorbita é trasferita alle molecole vicine é dato dall'equazione di trasporto:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{N} - G\nu_{eff}(\xi - \xi_0) \quad (6.16.5)$$

In questa equazione é evidente che il numero di collisioni al secondo ν_{eff} é, a sua volta, funzione della velocità degli elettroni e quindi di ξ . Si puó dimostrare per mezzo della teoria cinetica che, trascurando le collisioni con gli ioni, risulta:

$$\nu_{eff} \simeq N_m \bar{v} \quad (6.16.6)$$

essendo N_m il numero di molecole neutre per unità di volume e \bar{v} la media del modulo della velocità degli elettroni.

Effettuando questa sostituzione nell'equazione (6.16.5), essa diventa non lineare e difficile da risolvere. Allora, se $\nu_{0_{eff}}$ é la frequenza di collisione, nello stato imperturbato, e $\delta\nu_{eff}$ é il suo incremento in presenza del campo elettromagnetico, si ha: $\nu_{eff} = \nu_{0_{eff}} + \delta\nu_{eff}$. Quando $\xi - \xi_0$ é piccolo noi possiamo approssimare $\nu_{eff}(\xi - \xi_0) \simeq \nu_{0_{eff}}(\xi - \xi_0)$.

Allora l'equazione di bilancio (6.16.5) si riduce a:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{P}_0 - G\nu_{0_{eff}}(\xi - \xi_0) \quad (6.16.7)$$

dove $\mathcal{P}_0 = \frac{\mathcal{P}}{N}$.

6.17 - Variazione di ν_{eff} dovuta al campo modulato

Consideriamo l'equazione (6.16.7)

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{P}_0 - G\nu_{0_{eff}}(\xi - \xi_0) \quad (6.17.1)$$

ed inseriamo in essa, al posto di \mathcal{P}_0 , la densità di potenza dell'onda modulata (6.15.12) divisa per N :

$$\frac{\mathcal{P}_2}{N} = \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) + 2M \frac{\mathcal{P}_1}{N} \cos \omega_1 t + \frac{M^2}{2} \frac{\mathcal{P}_1}{N} \cos 2\omega_1 t \quad (6.17.2)$$

L'equazione (6.17.1) diventa, allora:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} + G\nu_{0_{eff}}\xi = & G\nu_{0_{eff}}\xi_0 + \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) + \\ & + 2M \frac{\mathcal{P}_1}{N} \cos \omega_1 t + \frac{M^2}{2} \frac{\mathcal{P}_1}{N} \cos 2\omega_1 t \end{aligned} \quad (6.17.3)$$

Essa determina le vibrazioni forzate, a bassa frequenza ω_1 , dell'energia cinetica ξ degli elettroni in presenza del campo elettromagnetico.

Una equazione differenziale lineare del primo ordine si scrive:

$$y' + a_1(x)y = f(x) \tag{6.17.4}$$

e l'equazione omogenea ad essa associata é:

$$y' + a_1(x)y = 0 \tag{6.17.5}$$

$a_1(x)$ e $f(x)$ essendo due funzioni continue per $a \leq x \leq b$.

Se $y_1(x)$ é l'integrale generale della (6.17.5) e $\bar{y}(x)$ un integrale particolare della (6.17.4), l'integrale generale della (6.17.4) é, come sappiamo:

$$y = c_1 y_1 + \bar{y} \tag{6.17.6}$$

Vogliamo, ora, effettuare un procedimento che permette di determinare le funzioni y_1 e \bar{y} . Per integrare la (6.17.5) cominciamo ad osservare che essa é a variabili separabili, per cui si ha:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int a_1(x) dx \tag{6.17.7}$$

da cui, detto x_0 un qualsiasi punto dell'intervallo in cui é definita la $a_1(x)$, si ha:

$$\log |y| = - \int_{x_0}^x a_1(t) dt + c \tag{6.17.8}$$

Da tale equazione, posto $c_1 = e^c$, si ricava:

$$y = c_1 \exp \left(- \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right) \tag{6.17.9}$$

Per integrare la (6.17.4) cerchiamo la $\bar{y}(x)$ nella classe definita dalla legge:

$$\gamma(x) \exp \left(- \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right) \tag{6.17.10}$$

con $\gamma(x)$ funzione da determinare mediante sostituzione della (6.17.10) nella (6.17.4). Si ha:

$$\gamma'(x) \exp \left(- \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right) - a_1(x) \gamma(x) \exp \left(- \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right) + a_1(x) \gamma(x) \exp \left(- \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right) = f(x) \tag{6.17.11}$$

ossia:

$$\gamma'(x) \exp \left(- \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right) = f(x) \tag{6.17.12}$$

da cui:

$$\gamma'(x) = f(x) \exp\left(\int_{x_0}^x a_1(t) dt\right) \quad (6.17.13)$$

Integrando:

$$\gamma(x) = \int f(x) \exp\left(\int_{x_0}^x a_1(t) dt\right) dx \quad (6.17.14)$$

Poniamo:

$$a_1(t) = a_1 = G\nu_{0_{eff}} \quad (6.17.15)$$

$$f(t) = A_0 + A_1 + A_2 \cos \omega_1 t + A_3 \cos 2\omega_1 t \quad (6.17.16)$$

essendo:

$$A_0 = G\nu_{0_{eff}} \xi_0; \quad A_1 = \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left(1 + \frac{M^2}{2}\right); \quad A_2 = 2M \frac{\mathcal{P}_1}{N}; \quad A_3 = \frac{M^2}{2} \frac{\mathcal{P}_1}{N} \quad (6.17.17)$$

Valutiamo la funzione $\gamma(t)$:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \int f(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(x) dx\right) dt = \\ &= \int [A_0 + A_1 + A_2 \cos \omega_1 t + A_3 \cos 2\omega_1 t] e^{a_1(t-t_0)} dt = \\ &= \int [A_0 + A_1] e^{a_1(t-t_0)} dt + \int A_2 \cos \omega_1 t e^{a_1(t-t_0)} dt + \int A_3 \cos 2\omega_1 t e^{a_1(t-t_0)} dt = \\ &= e^{-a_1 t_0} \left\{ (A_0 + A_1) \int e^{a_1 t} dt + A_2 \int e^{a_1 t} \cos \omega_1 t dt + A_3 \int e^{a_1 t} \cos 2\omega_1 t dt \right\} \end{aligned} \quad (6.17.18)$$

Calcoliamo a parte l'integrale $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$. Si ha:

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx &= \int e^{\alpha x} \left[\frac{e^{+i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \right] dx = \frac{1}{2} \int e^{(\alpha + i\beta)x} dx + \frac{1}{2} \int e^{(\alpha - i\beta)x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(\alpha + i\beta)x}}{\alpha + i\beta} + \frac{e^{(\alpha - i\beta)x}}{\alpha - i\beta} \right] = \frac{1}{2} e^{\alpha x} \left[\frac{\alpha e^{+i\beta x} - i\beta e^{+i\beta x} + \alpha e^{-i\beta x} + i\beta e^{-i\beta x}}{\alpha^2 + \beta^2} \right] = \\ &= e^{\alpha x} \left[\frac{\alpha \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right] \end{aligned} \quad (6.17.19)$$

D'altra parte si ha:

$$\alpha \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x) = A \cos(\beta x - \theta) = A \cos(\beta x) \cos \theta + A \sin(\beta x) \sin \theta \quad (6.17.20)$$

da cui:

$$\begin{cases} A \cos \theta = \alpha \\ A \sin \theta = \beta \end{cases} \quad (6.17.21)$$

ossia, quadrando e sommando, risulta:

$$A^2 = \alpha^2 + \beta^2 \text{ e quindi: } \cos \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \sin \theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \text{ e } \tan \theta = \frac{\beta}{\alpha} \quad (6.17.22)$$

Allora, l'integrale (6.17.18) risulta:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \int f(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a_1(x) dx \right) dt = \\ &= e^{-a_1 t_0} \left\{ (A_0 + A_1) \int e^{a_1 t} dt + A_2 \int e^{a_1 t} \cos \omega_1 t dt + A_3 \int e^{a_1 t} \cos 2\omega_1 t dt \right\} = \\ &= e^{-a_1 t_0} \left\{ (A_0 + A_1) \frac{e^{a_1 t}}{a_1} + A_2 e^{a_1 t} \left[\frac{\cos(\omega_1 t - \theta_1)}{\sqrt{a_1^2 + \omega_1^2}} \right] + A_3 e^{a_1 t} \left[\frac{\cos(2\omega_1 t - \theta_2)}{\sqrt{a_1^2 + 4\omega_1^2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.17.23)$$

Sostituendo nella (6.17.23) le quantità date dalla (6.17.15) e dalle (6.17.17), si ha:

$$\begin{aligned} e^{G\nu_{0eff}(t-t_0)} &\left\{ \left[G\nu_{0eff} \xi_0 + \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \right] \frac{1}{G\nu_{0eff}} + 2M \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left[\frac{\cos(\omega_1 t - \theta_1)}{\sqrt{G^2 \nu_{0eff}^2 + \omega_1^2}} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{M^2}{2} \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left[\frac{\cos(2\omega_1 t - \theta_2)}{\sqrt{G^2 \nu_{0eff}^2 + 4\omega_1^2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.17.24)$$

che si può scrivere:

$$\begin{aligned} e^{G\nu_{0eff}(t-t_0)} &\left\{ \xi_0 + \frac{\mathcal{P}_1}{NG\nu_{0eff}} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) + 2M \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left[\frac{\cos(\omega_1 t - \theta_1)}{\sqrt{G^2 \nu_{0eff}^2 + \omega_1^2}} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{M^2}{2} \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left[\frac{\cos(2\omega_1 t - \theta_2)}{\sqrt{G^2 \nu_{0eff}^2 + 4\omega_1^2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.17.25)$$

Dalla (6.17.10) si ha che la soluzione particolare é:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \left\{ \xi_0 + \frac{\mathcal{P}_1}{NG\nu_{0eff}} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) + 2M \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left[\frac{\cos(\omega_1 t - \theta_1)}{\sqrt{G^2 \nu_{0eff}^2 + \omega_1^2}} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{M^2}{2} \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left[\frac{\cos(2\omega_1 t - \theta_2)}{\sqrt{G^2 \nu_{0eff}^2 + 4\omega_1^2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.17.26)$$

essendo $\theta_1 = \arctan(\omega_1/G\nu_{0eff})$ e $\theta_2 = \arctan(2\omega_1/G\nu_{0eff})$.

Poiché la soluzione generale della equazione omogenea é un esponenziale decrescente possiamo dire che, a regime, la soluzione generale dell'equazione (6.17.1) é data dalla equazione (6.17.26).

Mediando su un periodo $2\pi/\omega_1$, il valore medio $\langle \xi \rangle$ é dato da:

$$\langle \xi \rangle = \xi_0 + \frac{\mathcal{P}_1}{NG\nu_{0eff}} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \quad (6.17.27)$$

Sostituendo l'espressione data dalla (6.17.27) nella (6.17.26), si ha, in definitiva:

$$\xi(t) = \left\{ \langle \xi \rangle + 2M \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left[\frac{\cos(\omega_1 t - \theta_1)}{\sqrt{G^2 \nu_{0eff}^2 + \omega_1^2}} \right] + \frac{M^2}{2} \frac{\mathcal{P}_1}{N} \left[\frac{\cos(2\omega_1 t - \theta_2)}{\sqrt{G^2 \nu_{0eff}^2 + 4\omega_1^2}} \right] \right\} \quad (6.17.28)$$

ossia:

$$\xi(t) = \langle \xi \rangle \left\{ 1 + 2M \frac{\mathcal{P}_1}{N \langle \xi \rangle} \left[\frac{\cos(\omega_1 t - \theta_1)}{\sqrt{G^2 \nu_{0eff}^2 + \omega_1^2}} \right] + \frac{M^2}{2} \frac{\mathcal{P}_1}{N \langle \xi \rangle} \left[\frac{\cos(2\omega_1 t - \theta_2)}{\sqrt{G^2 \nu_{0eff}^2 + 4\omega_1^2}} \right] \right\} \quad (6.17.29)$$

Quindi ξ aumenta con l'ampiezza del campo modulante. I coefficienti di $\cos(\omega_1 t - \theta_1)$ e $\cos(2\omega_1 t - \theta_2)$ rappresentano le profonditá di modulazione indotte dall'onda disturbante sull'energia elettronica. Il coefficiente di $\cos(2\omega_1 t - \theta_2)$ é il contributo di un'onda alla frequenza ottava (doppia) della modulazione disturbante. Il ritardo di fase é circa $\pi/2$ per grandi valori di ω_1 . Indicando con l il libero cammino medio dell'elettrone, ossia il percorso fatto da un elettrone fra un urto e l'altro, il percorso fatto dall'elettrone nell'unitá di tempo, ossia la sua velocitá é $l\nu_{eff}$; quindi, l'energia cinetica dell'elettrone é $\xi = ml^2\nu_{eff}^2/2$ essendo m la massa dell'elettrone.

Posto quindi: $\xi = ml^2\nu_{eff}^2/2$, $\langle \xi \rangle = ml^2\langle \nu_{eff} \rangle^2/2$ e $\xi_0 = ml^2\nu_{0eff}^2/2$, si ha:

$$\nu_{eff}(t) = \langle \nu_{eff} \rangle \sqrt{\xi/\langle \xi \rangle} \quad (6.17.30)$$

Quindi la modulazione della variazione della frequenza di collisione $\delta\nu_{eff}$, dovuta alla variazione di ξ , é data da:

$$\nu_{eff}(t) = \langle \nu_{eff} \rangle [1 + 2M_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + 2M_2 \cos(2\omega_1 t - \theta_2)]^{1/2} \quad (6.17.31)$$

dove:

$$M_1 = \left(\frac{M\mathcal{P}_1}{N\langle \xi \rangle G\nu_{0eff}} \right) \left(1 + \frac{\omega_1^2}{G^2 \nu_{0eff}^2} \right)^{-1/2}, \quad M_2 = \left(\frac{M^2\mathcal{P}_1}{4N\langle \xi \rangle G\nu_{0eff}} \right) \left(1 + \frac{2\omega_1^2}{G^2 \nu_{0eff}^2} \right)^{-1/2} \quad (6.17.32)$$

Poiché M_1 e M_2 sono piccoli rispetto all'unitá, possiamo sviluppare in serie di Taylor $\left(\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x \right)$ il termine sotto la radice quadrata dell'equazione (6.17.31) e scrivere, quindi:

$$\nu_{eff}(t) = \langle \nu_{eff} \rangle [1 + M_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + M_2 \cos(2\omega_1 t - \theta_2)] \quad (6.17.33)$$

L'andamento oscillante di $\nu_{eff}(t)$ influisce su ogni campo elettromagnetico che attraversa la regione.

6.18 - Assorbimento di un'onda elettromagnetica

Consideriamo un'onda elettromagnetica (solo portante) desiderata o ricercata che si propaga nella ionosfera ed incontra la zona dove é presente l'onda non desiderata e quindi la ionosfera perturbata nel senso che il numero di urti al secondo é dato dalla (6.17.33). Nello schema della teoria elementare del plasma, le espressioni per ϵ e σ rimangono le stesse anche in presenza di un campo elettrico arbitrario, cosí come in un debole campo, tranne per rimpiazzare la frequenza degli urti con $\nu_{eff}(t)$ data dalla (6.17.33). Questo si ripercuote sulle caratteristiche di propagazione di tale onda ed in particolare sul coefficiente di attenuazione α e sulla costante di propagazione β . Essi sono dati dalla formula (6.3.8), utilizzando le espressioni di ϵ e σ per il plasma omogeneo ed isotropo:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}, \quad \alpha = \frac{\frac{1}{2}\omega_{eff}\omega_p^2}{c(\omega^2 + \omega_{eff}^2)\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}}, \quad n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}} \quad (6.18.1)$$

Consideriamo il coefficiente di attenuazione. In assenza del campo disturbante, ω_{eff} coincide con ω_{0eff} .

In presenza di campo disturbante il coefficiente di attenuazione α puó quindi essere scritto nella seguente forma lasciando per semplicitá all'interno della radice quadrata ω_{0eff} .

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}\omega_{0eff}\omega_p^2}{c(\omega^2 + \omega_{0eff}^2)\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{0eff}^2}}} \frac{\omega_{eff}}{\omega_{0eff}} \frac{\omega^2 + \omega_{0eff}^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} \quad (6.18.2)$$

Indicando con α_0 il coefficiente di attenuazione competente al plasma in assenza del campo disturbante, il coefficiente di attenuazione (6.18.2) si scrive:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\omega_{eff}}{\omega_{0eff}} \frac{\omega^2 + \omega_{0eff}^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} \quad (6.18.3)$$

Trascurando il termine $\frac{\omega^2 + \omega_{0eff}^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} (\simeq 1)$ e sostituendo al posto di $\frac{\omega_{eff}}{\omega_{0eff}}$ l'espressione data dalla (6.17.33), il coefficiente di attenuazione α diventa:

$$\alpha = \alpha_0 [1 + M_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + M_2 \cos(2\omega_1 t - \theta_2)] \quad (6.18.4)$$

Ne segue che l'onda elettromagnetica 'desiderata' che supponiamo sia costituita dalla sola portante di frequenza ω_d subirá un coefficiente di attenuazione α . Essa si scrive:

$$\vec{E}_d = \vec{E}_{d0} e^{-\alpha_0 [1 + M_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + M_2 \cos(2\omega_1 t - \theta_2)]z} \cos \omega_d t \quad (6.18.5)$$

essendo z la direzione di propagazione per ipotesi.

La (6.18.5) si può anche scrivere:

$$\vec{E}_d = \vec{E}_{d_0} e^{-\alpha_0 z} e^{-\alpha_0 [M_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + M_2 \cos(2\omega_1 t - \theta_2)] z} \cos \omega_d t \quad (6.18.6)$$

Nell'ipotesi che l'esponente del secondo esponenziale sia molto minore di uno, come in genere accade nella ionosfera, possiamo sviluppare in serie il secondo esponenziale e scrivere, quindi:

$$\vec{E}_d = \vec{E}_{d_0} e^{-\alpha_0 z} \{1 - \alpha_0 z [M_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + M_2 \cos(2\omega_1 t - \theta_2)]\} \cos \omega_d t \quad (6.18.7)$$

L'onda desiderata é quindi modulata in ampiezza con frequenza angolare fondamentale ω_1 e con profondità di modulazione $\alpha_0 z M_1$. Questo é ancora piú evidente se si trascura il termine il cui coefficiente é M_2 essendo questo molto piú piccolo di M_1 .

Se l'onda desiderata é modulata in ampiezza, notiamo che, se Lussemburgo é modulato con pulsazione ω_1 e Beromünster con pulsazione ω_2 , il calcolo ci dimostrerebbe che l'ampiezza A dell'onda ricevuta ha la forma:

$$A = e^{-\alpha \cos \omega_1 t} [H + K \cos(\omega_2 t + \phi)] \quad (6.18.8)$$

essendo α, H, K, ϕ costanti. Siccome α é molto piccolo, possiamo sviluppare l'esponenziale in serie e trascurare le potenze superiori di α . Si ha cosí:

$$A = H + K \cos(\omega_2 t + \phi) - \alpha H \cos \omega_1 t - \alpha K \cos \omega_1 t \cos(\omega_2 t + \phi) \quad (6.18.9)$$

Sviluppando con note formule di trigonometria l'ultimo termine di questa espressione, si ha:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (6.18.10)$$

Posto $\alpha = \omega_1 t$ e $\beta = \omega_2 t + \phi$, si ha:

$$\cos \omega_1 t \cos(\omega_2 t + \phi) = \frac{1}{2} \cos [(\omega_1 + \omega_2)t + \phi] + \frac{1}{2} \cos [(\omega_1 - \omega_2)t - \phi] \quad (6.18.11)$$

Si deduce, allora, che esso é composto da un termine sinoidale in $(\omega_1 + \omega_2)t + \phi$ piú un altro termine in $(\omega_1 - \omega_2)t - \phi$. Cioé col ricevitore si udiranno i suoni emessi da Beromünster e da Lussemburgo distorti da altri di frequenza $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi}$ e $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$. Anche questa particolaritá del fenomeno é stata osservata da van der Pol e van der Mark.