

Cap. 5

**Lamine piane (Plane slabs)**

**5.1 - Campo elettromagnetico riflesso e trasmesso**

Consideriamo un sistema costituito da tre mezzi omogenei qualsiasi, separati da superfici piane e caratterizzati dai fattori di propagazione  $k_1$ ,  $k_2$ , e  $k_3$ .

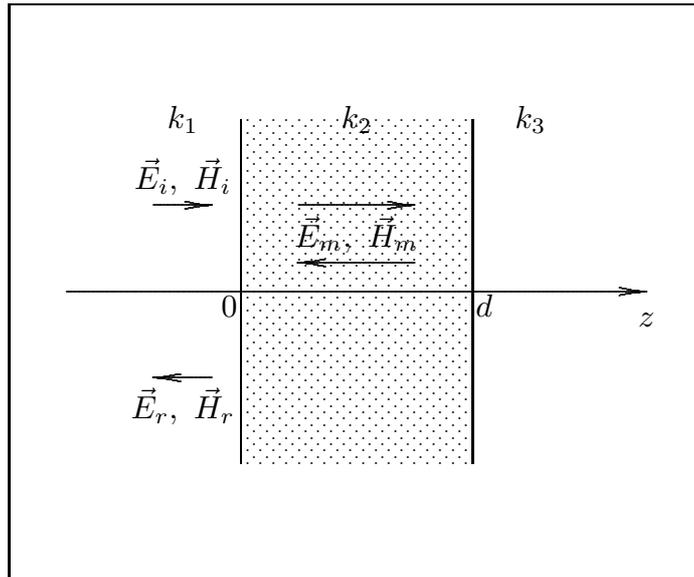


fig.5.1-1

Consideriamo un'onda elettromagnetica di vettori  $\vec{E}_i$  e  $\vec{H}_i$  che viaggia nel mezzo 1 **in direzione normale alla superficie di separazione** fra i mezzi 1 e 2. Il secondo mezzo di spessore finito  $d$ , prende il nome di **lamina piana** o **plane slab**.

É importante ricordare che, come abbiamo visto, nel caso di incidenza normale i due stati di polarizzazione parallela e ortogonale sono indistinguibili cioè  $R_{\parallel} = R_{\perp}$ ; inoltre dalla  $R = R_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + R_{\perp} \sin^2 \alpha_i$  segue che  $R = R_{\parallel} = R_{\perp}$ , cioè qualunque stato di polarizzazione rettilinea é indistinguibile. Pertanto non é necessario, nella nostra trattazione, specificare lo stato di polarizzazione dell'onda incidente.

Si ha, quindi, nel I mezzo:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{ik_1 z - i\omega t} \quad \vec{H}_i = \frac{k_1}{\omega \mu_1} \hat{z} \times \vec{E}_i \quad (5.1.1)$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_1 e^{-ik_1 z - i\omega t} \quad \vec{H}_r = -\frac{k_1}{\omega \mu_1} \hat{z} \times \vec{E}_r \quad (5.1.2)$$

Nel mezzo intermedio, ovviamente, il campo elettromagnetico é la sovrapposizione di un campo progressivo e di un campo regressivo dovuto alla riflessione sulla seconda interfaccia.

Nel mezzo 2, quindi, si ha:

$$\vec{E}_m = \vec{E}_2^+ e^{ik_2 z - i\omega t} + \vec{E}_2^- e^{-ik_2 z - i\omega t} \quad (5.1.3)$$

$$\vec{H}_m = \frac{k_2}{\omega\mu_2} \hat{z} \times \vec{E}_2^+ e^{ik_2 z - i\omega t} - \frac{k_2}{\omega\mu_2} \hat{z} \times \vec{E}_2^- e^{-ik_2 z - i\omega t} \quad (5.1.4)$$

Nel III mezzo l'onda trasmessa é:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_3 e^{ik_3 z - i\omega t} \quad (5.1.5)$$

$$\vec{H}_t = \frac{k_3}{\omega\mu_3} \hat{z} \times \vec{E}_3 e^{ik_3 z - i\omega t} \quad (5.1.6)$$

Ovviamente questi campi devono soddisfare alle condizioni al contorno sulle superfici di separazione fra i mezzi.

Osservando che qualunque direzione di polarizzazione del campo elettrico incidente é parallela alla superficie di separazione, sulla prima superficie l'applicazione diretta delle (3.2.2) dá:

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_1 = \vec{E}_2^+ + \vec{E}_2^- \quad (z = 0) \quad (5.1.7)$$

$$\vec{E}_0 - \vec{E}_1 = \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} (\vec{E}_2^+ - \vec{E}_2^-) \quad (z = 0) \quad (5.1.8)$$

Analogamente sulla seconda superficie si ha:

$$\vec{E}_2^+ e^{ik_2 d} + \vec{E}_2^- e^{-ik_2 d} = \vec{E}_3 e^{ik_3 d} \quad (z = d) \quad (5.1.9)$$

$$\vec{E}_2^+ e^{ik_2 d} - \vec{E}_2^- e^{-ik_2 d} = \frac{\mu_2 k_3}{\mu_3 k_2} \vec{E}_3 e^{ik_3 d} \quad (z = d) \quad (5.1.10)$$

Posto:

$$Z_{12} = \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \quad e \quad Z_{23} = \frac{\mu_2 k_3}{\mu_3 k_2} \quad (5.1.11)$$

le (5.1.7) - (5.1.10) si scrivono, togliendo il segno di vettore e ordinando:

$$E_1 - E_2^+ - E_2^- = -E_0 \quad (5.1.12)$$

$$-E_1 - Z_{12} E_2^+ + Z_{12} E_2^- = -E_0 \quad (5.1.13)$$

$$E_2^+ e^{ik_2 d} + E_2^- e^{-ik_2 d} - E_3 e^{+ik_3 d} = 0 \quad (5.1.14)$$

$$E_2^+ e^{ik_2 d} - E_2^- e^{-ik_2 d} - Z_{23} E_3 e^{+ik_3 d} = 0 \quad (5.1.15)$$

Il sistema (5.1.12)÷ (5.1.15) é un sistema non omogeneo di quattro equazioni nelle quattro incognite  $E_1, E_2^+, E_2^-, E_3$ .

Sommando prima e poi sottraendo membro a membro le equazioni (5.1.14) e (5.1.15), si ottiene:

$$2E_2^+ e^{+ik_2 d} = (1 + Z_{23}) E_3 e^{ik_3 d} \quad (5.1.16)$$

$$2E_2^- e^{-ik_2 d} = (1 - Z_{23}) E_3 e^{ik_3 d} \quad (5.1.17)$$

Sostituendo la (5.1.16) e la (5.1.17) nella (5.1.12), si ha:

$$E_1 - \frac{1}{2} (1 + Z_{23}) E_3 e^{ik_3 d} e^{-ik_2 d} - \frac{1}{2} (1 - Z_{23}) E_3 e^{ik_3 d} e^{+ik_2 d} = -E_0 \quad (5.1.18)$$

Dividendo per  $E_0$  e raggruppando:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1}{2} \frac{E_3}{E_0} e^{ik_3 d} \left( e^{-ik_2 d} + Z_{23} e^{-ik_2 d} + e^{ik_2 d} - Z_{23} e^{ik_2 d} \right) - 1 \quad (5.1.19)$$

Analogamente sostituendo la (5.1.16) e la (5.1.17) nella (5.1.13), si ha:

$$-E_1 - Z_{12} \left[ \frac{1}{2} (1 + Z_{23}) E_3 e^{ik_3 d} e^{-ik_2 d} - \frac{1}{2} (1 - Z_{23}) E_3 e^{ik_3 d} e^{+ik_2 d} \right] = -\vec{E}_0 \quad (5.1.20)$$

Dividendo per  $E_0$  e raggruppando:

$$-\frac{E_1}{E_0} = Z_{12} \frac{E_3}{E_0} e^{ik_3 d} \left[ \frac{1}{2} (1 + Z_{23}) e^{-ik_2 d} - \frac{1}{2} (1 - Z_{23}) e^{+ik_2 d} \right] - 1 \quad (5.1.21)$$

Sommando membro a membro la (5.1.19) e la (5.1.21):

$$2 = \frac{E_3}{E_0} e^{ik_3 d} \left\{ \left[ \frac{1}{2} e^{-ik_2 d} + \frac{1}{2} Z_{23} e^{-ik_2 d} + \frac{1}{2} e^{ik_2 d} - \frac{1}{2} Z_{23} e^{ik_2 d} \right] + \right. \\ \left. + Z_{12} \left[ \frac{1}{2} (1 + Z_{23}) e^{-ik_2 d} - \frac{1}{2} (1 - Z_{23}) e^{+ik_2 d} \right] \right\} \quad (5.1.22)$$

ossia:

$$4 = \frac{E_3}{E_0} e^{ik_3 d} \left\{ e^{-ik_2 d} [1 + Z_{23} + Z_{12} (1 + Z_{23})] + e^{ik_2 d} [1 - Z_{23} - Z_{12} (1 - Z_{23})] \right\} \quad (5.1.23)$$

In definitiva:

$$\boxed{\frac{E_3}{E_0} = \frac{4e^{-ik_3 d}}{e^{-ik_2 d} (1 + Z_{12}) (1 + Z_{23}) + e^{ik_2 d} (1 - Z_{12}) (1 - Z_{23})}} \quad (5.1.24)$$

Sostituendo la (5.1.24) nella (5.1.19) si ha:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{2 \left( e^{-ik_2 d} + Z_{23} e^{-ik_2 d} + e^{ik_2 d} - Z_{23} e^{ik_2 d} \right)}{e^{-ik_2 d} (1 + Z_{12}) (1 + Z_{23}) + e^{ik_2 d} (1 - Z_{12}) (1 - Z_{23})} - 1 \quad (5.1.25)$$

ossia:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{2e^{-ik_2d}(1+Z_{23}) + 2e^{ik_2d}(1-Z_{23}) - e^{-ik_2d}(1+Z_{12})(1+Z_{23}) - e^{ik_2d}(1-Z_{12})(1-Z_{23})}{e^{-ik_2d}(1+Z_{12})(1+Z_{23}) + e^{ik_2d}(1-Z_{12})(1-Z_{23})} \quad (5.1.26)$$

In definitiva:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{e^{-ik_2d}(1-Z_{12})(1+Z_{23}) + e^{ik_2d}(1+Z_{12})(1-Z_{23})}{e^{-ik_2d}(1+Z_{12})(1+Z_{23}) + e^{ik_2d}(1-Z_{12})(1-Z_{23})} \quad (5.1.27)$$

Sostituendo la (5.1.24) nella (5.1.16) e nella (5.1.17) si ha:

$$\frac{E_2^+}{E_0} = \frac{2(1+Z_{23})e^{-ik_2d}}{e^{-ik_2d}(1+Z_{12})(1+Z_{23}) + e^{ik_2d}(1-Z_{12})(1-Z_{23})} \quad (5.1.28)$$

$$\frac{E_2^-}{E_0} = \frac{2(1-Z_{23})e^{+ik_2d}}{e^{-ik_2d}(1+Z_{12})(1+Z_{23}) + e^{ik_2d}(1-Z_{12})(1-Z_{23})} \quad (5.1.29)$$

Dividendo numeratore e denominatore della (5.1.27) e della (5.1.24) per la quantità  $(1+Z_{12})(1+Z_{23})$  e moltiplicando numeratore e denominatore delle stesse per  $e^{+ik_2d}$ , per le ampiezze dei campi riflesso e trasmesso otteniamo:

$$E_1 = \frac{\left(\frac{1-Z_{12}}{1+Z_{12}}\right) + \left(\frac{1-Z_{23}}{1+Z_{23}}\right)e^{2ik_2d}}{1 + \left(\frac{1-Z_{12}}{1+Z_{12}}\right)\left(\frac{1-Z_{23}}{1+Z_{23}}\right)e^{2ik_2d}} E_0 \quad (5.1.30)$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \left[ \frac{1}{(1+Z_{12})(1+Z_{23})} \right] \frac{4e^{-ik_3d}E_0}{\left[ e^{-ik_2d} + \left(\frac{1-Z_{12}}{1+Z_{12}}\right)\left(\frac{1-Z_{23}}{1+Z_{23}}\right)e^{ik_2d} \right]} = \\ &= \left[ \frac{1}{(1+Z_{12})(1+Z_{23})} \right] \frac{4e^{i(k_2-k_3)d}}{\left[ 1 + \left(\frac{1-Z_{12}}{1+Z_{12}}\right)\left(\frac{1-Z_{23}}{1+Z_{23}}\right)e^{2ik_2d} \right]} E_0 \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

Dalle formule (5.1.30) e (5.1.31) si deduce che la ampiezza del campo elettrico riflesso dalla lamina e l'ampiezza del campo elettrico trasmesso dipendono essenzialmente dai rapporti complessi

$$r_{12} = \frac{1 - Z_{12}}{1 + Z_{12}} \quad e \quad r_{23} = \frac{1 - Z_{23}}{1 + Z_{23}} \quad (5.1.32)$$

che, per la definizione di  $Z_{12}$  e  $Z_{23}$  date dalle (5.1.11), si possono scrivere:

$$r_{12} = \frac{\mu_2 k_1 - \mu_1 k_2}{\mu_2 k_1 + \mu_1 k_2} \quad e \quad r_{23} = \frac{\mu_3 k_2 - \mu_2 k_3}{\mu_3 k_2 + \mu_2 k_3} \quad (5.1.33)$$

Le (5.1.33) rappresentano i rapporti complessi fra l'ampiezza del campo elettrico riflesso e quella del campo elettrico incidente, in direzione della normale, sulla superficie di separazione fra due mezzi infinitamente estesi aventi gli stessi parametri costitutivi dei mezzi 1 e 2 e dei mezzi 2 e 3 rispettivamente.

I moduli quadri di  $r_{12}$  ed  $r_{23}$  rappresentano, quindi, i coefficienti di riflessione per incidenza normale su una superficie piana che separa i due semispazi.

Dalle (5.1.32) segue:

$$Z_{12} = \frac{1 - r_{12}}{1 + r_{12}} \quad e \quad Z_{23} = \frac{1 - r_{23}}{1 + r_{23}} \quad (5.1.34)$$

e, quindi:

$$(1 + Z_{12})(1 + Z_{23}) = \frac{4}{(1 + r_{12})(1 + r_{23})} \quad (5.1.35)$$

Pertanto, in funzione dei rapporti  $r_{12}$  ed  $r_{23}$  la (5.1.30) e la (5.1.31) si scrivono:

$$E_1 = \frac{r_{12} + r_{23} e^{2ik_2 d}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2ik_2 d}} E_0 \quad (5.1.36)$$

$$E_3 = \frac{(1 + r_{12})(1 + r_{23}) e^{i(k_2 - k_3)d}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2ik_2 d}} E_0 \quad (5.1.37)$$

Le (5.1.36) e (5.1.37) ci forniscono le ampiezze dei campi, riflessi e trasmessi dallo strato piano.

## 5.2 - Coefficienti di riflessione e di trasmissione

Vogliamo calcolare il coefficiente di riflessione per incidenza normale.  
Sostituendo al posto di  $k_2$  l'espressione complessa:

$$k_2 = \beta_2 + i\alpha_2$$

si ha:

$$E_1 = \frac{r_{12} + r_{23}e^{-2\alpha_2 d}e^{+2i\beta_2 d}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-2\alpha_2 d}e^{+2i\beta_2 d}}E_0 \quad (5.2.1)$$

e, quindi, il coefficiente di riflessione é:

$$\begin{aligned} R &= \frac{|E_1|^2}{|E_0|^2} = \left| \frac{r_{12} + r_{23}e^{-2\alpha_2 d}e^{+2i\beta_2 d}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-2\alpha_2 d}e^{+2i\beta_2 d}} \right|^2 = \\ &= \frac{(r_{12} + r_{23}e^{-2\alpha_2 d}e^{+2i\beta_2 d})(r_{12}^* + r_{23}^*e^{-2\alpha_2 d}e^{-2i\beta_2 d})}{(1 + r_{12}r_{23}e^{-2\alpha_2 d}e^{+2i\beta_2 d})(1 + r_{12}^*r_{23}^*e^{-2\alpha_2 d}e^{-2i\beta_2 d})} = \\ &= \frac{|r_{12}|^2 + r_{12}r_{23}^*e^{-2\alpha_2 d}e^{-2i\beta_2 d} + r_{12}^*r_{23}e^{-2\alpha_2 d}e^{+2i\beta_2 d} + |r_{23}|^2e^{-4\alpha_2 d}}{1 + r_{12}^*r_{23}^*e^{-2\alpha_2 d}e^{-2i\beta_2 d} + r_{12}r_{23}e^{-2\alpha_2 d}e^{+2i\beta_2 d} + |r_{12}|^2|r_{23}|^2e^{-4\alpha_2 d}} = \\ &= \frac{|r_{12}|^2 + e^{-2\alpha_2 d}[(r_{12}^*r_{23} + r_{12}r_{23}^*)\cos(2\beta_2 d) + i(r_{12}^*r_{23} - r_{12}r_{23}^*)\sin(2\beta_2 d)] + |r_{23}|^2e^{-4\alpha_2 d}}{1 + e^{-2\alpha_2 d}[(r_{12}r_{23} + r_{12}^*r_{23}^*)\cos(2\beta_2 d) + i(r_{12}r_{23} - r_{12}^*r_{23}^*)\sin(2\beta_2 d)] + |r_{12}|^2|r_{23}|^2e^{-4\alpha_2 d}} = \\ &= \frac{|r_{12}|^2 + e^{-2\alpha_2 d}[2\Re(r_{12}^*r_{23})\cos(2\beta_2 d) - 2\Im(r_{12}^*r_{23})\sin(2\beta_2 d)] + |r_{23}|^2e^{-4\alpha_2 d}}{1 + e^{-2\alpha_2 d}[2\Re(r_{12}r_{23})\cos(2\beta_2 d) - 2\Im(r_{12}r_{23})\sin(2\beta_2 d)] + |r_{12}|^2|r_{23}|^2e^{-4\alpha_2 d}} \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Per valutare il coefficiente di trasmissione cominciamo con il calcolare il rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{|E_3|^2}{|E_0|^2} &= \left| \frac{(1 + r_{12})(1 + r_{23})e^{i(k_2 - k_3)d}}{1 + r_{12}r_{23}e^{2ik_2 d}} \right|^2 = \\ &= \frac{(1 + r_{12})(1 + r_{12}^*)(1 + r_{23})(1 + r_{23}^*)e^{-2(\alpha_2 - \alpha_3)d}}{1 + e^{-2\alpha_2 d}[2\Re(r_{12}r_{23})\cos(2\beta_2 d) - 2\Im(r_{12}r_{23})\sin(2\beta_2 d)] + |r_{12}|^2|r_{23}|^2e^{-4\alpha_2 d}} = \\ &= \frac{[1 + 2\Re(r_{12}) + |r_{12}|^2][1 + 2\Re(r_{23}) + |r_{23}|^2]e^{-2(\alpha_2 - \alpha_3)d}}{1 + e^{-2\alpha_2 d}[2\Re(r_{12}r_{23})\cos(2\beta_2 d) - 2\Im(r_{12}r_{23})\sin(2\beta_2 d)] + |r_{12}|^2|r_{23}|^2e^{-4\alpha_2 d}} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

avendo posto  $k_3 = \beta_3 + i\alpha_3$ .

Valutiamo il vettore di Poynting complesso associato all'onda elettromagnetica trasmessa nel terzo mezzo ed all'onda incidente (nel primo mezzo):

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_t \rangle &= \frac{1}{2}\Re(\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) = \frac{1}{2}\Re\left[\vec{E}_t \times \left(\frac{k_3^*}{\omega\mu_3}\hat{z} \times \vec{E}_t^*\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\Re\left(\frac{k_3^*}{\omega\mu_3}\right)\right]|\vec{E}_3|^2e^{-2\alpha_3 z}\hat{z} = \frac{1}{2}\frac{\beta_3}{\omega\mu_3}|\vec{E}_3|^2e^{-2\alpha_3 z}\hat{z} \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

$$\langle \vec{S}_i \rangle = \frac{1}{2} \Re \left( \vec{E}_i \times H_i^* \right) = \frac{1}{2} \Re \left[ \vec{E}_i \times \left( \frac{k_1^*}{\omega \mu_1} \hat{z} \times \vec{E}_i^* \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\omega \mu_1} |\vec{E}_0|^2 e^{-2\alpha_1 z} \hat{z} \quad (5.2.5)$$

Ne segue che, per incidenza normale:

$$\mathcal{P}_t = |\langle \vec{S}_t \rangle| = \frac{1}{2} \frac{\beta_3}{\omega \mu_3} |\vec{E}_3|^2 e^{-2\alpha_3 d} \quad \text{per } z = d \quad (5.2.6)$$

$$\mathcal{P}_i = |\langle \vec{S}_i \rangle| = \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\omega \mu_1} |\vec{E}_0|^2 \quad \text{per } z = 0 \quad (5.2.7)$$

Quindi il coefficiente di trasmissione é:

$$T = \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_i} = \frac{\beta_3 \mu_1}{\beta_1 \mu_3} \frac{|E_3|^2}{|E_0|^2} e^{-2\alpha_3 d} \quad (5.2.8)$$

ossia:

$$T = \frac{\frac{\beta_3 \mu_1}{\beta_1 \mu_3} [1 + 2\Re(r_{12}) + |r_{12}|^2] [1 + 2\Re(r_{23}) + |r_{23}|^2] e^{-2\alpha_2 d}}{1 + e^{-2\alpha_2 d} [2\Re(r_{12}r_{23}) \cos(2\beta_2 d) - 2\Im(r_{12}r_{23}) \sin(2\beta_2 d)] + |r_{12}|^2 |r_{23}|^2 e^{-4\alpha_2 d}} \quad (5.2.9)$$

### 5.3 - Applicazione ai mezzi dielettrici

Imponiamo, ora, che i tre mezzi siano dielettrici perfetti e ci proponiamo di valutare il coefficiente di riflessione al variare dello spessore dello strato.

Essendo  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  e quindi  $r_{12}$  ed  $r_{23}$  reali, la (5.2.2) si scrive:

$$R = \frac{r_{12}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos(2\beta_2 d) + r_{23}^2}{1 + 2r_{12}r_{23} \cos(2\beta_2 d) + r_{12}^2 r_{23}^2} \quad (5.3.1)$$

Poiché  $\cos 2\beta_2 d = 1 - 2 \sin^2 \beta_2 d$ , la (5.3.1) diventa:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d} \quad (5.3.2)$$

essendo:

$$r_{12} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad r_{23} = \frac{\beta_2 - \beta_3}{\beta_2 + \beta_3} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \quad (5.3.3)$$

in quanto  $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_3$ .

Dalla (5.3.2) si rileva che il coefficiente di riflessione  $R$  dipende dallo spessore  $d$  dello strato secondo il termine "d'interferenza" oscillante  $\sin^2 \beta_2 d$ .

Analogamente, per il coefficiente di trasmissione, si ha:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\beta_3 (1 + 2r_{12} + r_{12}^2) (1 + 2r_{23} + r_{23}^2)}{1 + 2r_{12}r_{23} \cos(2\beta_2 d) + r_{12}^2 r_{23}^2} = \frac{\beta_3 (1 + r_{12})^2 (1 + r_{23})^2}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d} = \\
 &= \frac{\beta_3 \left(1 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}\right)^2 \left(1 + \frac{\beta_2 - \beta_3}{\beta_2 + \beta_3}\right)^2}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d} = \frac{\beta_3 \left(\frac{2\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}\right)^2 \left(\frac{2\beta_2}{\beta_2 + \beta_3}\right)^2}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d} = \quad (5.3.4) \\
 &= \frac{\beta_3 \frac{4\beta_1^2}{(\beta_1 + \beta_2)^2} \frac{4\beta_2^2}{(\beta_2 + \beta_3)^2}}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d} = \frac{\frac{4\beta_1\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)^2} \frac{4\beta_2\beta_3}{(\beta_2 + \beta_3)^2}}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d}
 \end{aligned}$$

d'altra parte si ha:

$$4\beta_1\beta_2 = (\beta_1 + \beta_2)^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 = (\beta_1 + \beta_2)^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2 \quad (5.3.5)$$

$$4\beta_2\beta_3 = (\beta_2 + \beta_3)^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 + 2\beta_2\beta_3 = (\beta_2 + \beta_3)^2 - (\beta_2 - \beta_3)^2 \quad (5.3.6)$$

Quindi:

$$\frac{4\beta_1\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)^2} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2}{(\beta_1 + \beta_2)^2} = 1 - \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{(\beta_1 + \beta_2)^2} = 1 - r_{12}^2 \quad (5.3.7)$$

$$\frac{4\beta_2\beta_3}{(\beta_2 + \beta_3)^2} = \frac{(\beta_2 + \beta_3)^2 - (\beta_2 - \beta_3)^2}{(\beta_2 + \beta_3)^2} = 1 - \frac{(\beta_2 - \beta_3)^2}{(\beta_2 + \beta_3)^2} = 1 - r_{23}^2 \quad (5.3.8)$$

In definitiva si ha:

$$\boxed{T = \frac{(1 - r_{12}^2) (1 - r_{23}^2)}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d}} \quad (5.3.9)$$

Dalla (5.3.2) e dalla (5.3.9) si deduce **l'importante risultato**:

$$\begin{aligned}
 R + T &= \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d + 1 - r_{23}^2 - r_{12}^2 + r_{12}^2 r_{23}^2}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d} = \\
 &= \frac{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d} = 1
 \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Per studiare meglio la (5.3.2) esplicitiamo l'argomento di  $\sin \beta_2 d$ ; si ha:

$$\beta_2 d = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_0} d = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r_2}} d \quad (5.3.11)$$

Esprimendo  $\omega$  in funzione della lunghezza d'onda della radiazione incidente, si ha:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r_1}} \lambda_1} \quad (5.3.12)$$

Pertanto:

$$\beta_2 d = 2\pi \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} \frac{d}{\lambda_1} = 2\pi \frac{n_2}{n_1} \frac{d}{\lambda_1} \quad (5.3.13)$$

e poiché  $n_1 \lambda_1 = \lambda_0$  che é la lunghezza d'onda relativa al "vuoto", si ha

$$\beta_2 d = 2\pi \frac{n_2 d}{\lambda_0} \quad (5.3.14)$$

Ne segue:

$$\sin^2 \beta_2 d = \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 d) \quad (5.3.15)$$

La quantità  $n_2 d$  prende il nome di "spessore ottico" dello strato, infatti é la sua variazione che caratterizza l'andamento oscillante della riflettività. A questo proposito osserviamo che il coefficiente di riflessione resta invariato per tutti gli spessori geometrici  $d'$  che differiscono da  $d$  per un multiplo intero di  $\frac{\lambda_0}{2n_2}$ .

Ci proponiamo di determinare lo spessore ottico per cui il coefficiente di riflessione abbia un valore massimo o minimo. Posto  $n_2 d = h$ , valutiamo  $\frac{dR}{dh}$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dh} &= \frac{-4r_{12}r_{23} \sin \frac{4\pi}{\lambda_0} h \left[ (1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right]}{\frac{\lambda_0}{2\pi} \left[ (1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right]^2} + \\ &+ \frac{4r_{12}r_{23} \sin \frac{4\pi}{\lambda_0} h \left[ (r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right]}{\frac{\lambda_0}{2\pi} \left[ (1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right]^2} = \\ &= \frac{4r_{12}r_{23} \sin \frac{4\pi}{\lambda_0} h \left[ r_{12}^2 + r_{23}^2 - r_{12}^2 r_{23}^2 - 1 \right]}{\frac{\lambda_0}{2\pi} \left[ (1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right]^2} = \\ &= \frac{-4r_{12}r_{23} \sin \frac{4\pi}{\lambda_0} h \left[ (1 - r_{23}^2) (1 - r_{12}^2) \right]}{\frac{\lambda_0}{2\pi} \left[ (1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right]^2} \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Poiché  $r_{12} \neq 1$  e  $r_{23} \neq 1$  si ha che  $\frac{dR}{dh} = 0$  per  $\sin \frac{4\pi}{\lambda_0} h = 0$ , cioè per :

$$\frac{4\pi}{\lambda_0} h = m\pi \quad \text{ossia} \quad \text{per} \quad h = \frac{m\lambda_0}{4} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.3.17)$$

Per valori di  $n_2 d = m \frac{\lambda_0}{4}$  la funzione riflettività assume valori estremi.

Distinguiamo due casi:

a) m dispari, cioè h abbia i seguenti valori:

$$\frac{\lambda_0}{4}, \quad \frac{3\lambda_0}{4}, \quad \frac{5\lambda_0}{4}, \dots \quad (5.3.18)$$

In tal caso  $\sin^2 2\pi \frac{n_2 d}{\lambda_0} = 1$  e la (5.3.2) diventa:

$$R \left( n_2 d = m_{disp} \frac{\lambda_0}{4} \right) = \frac{(r_{12} - r_{23})^2}{(1 - r_{12} r_{23})^2} \quad (5.3.19)$$

$$R \left( n_2 d = m_{disp} \frac{\lambda_0}{4} \right) = \left( \frac{n_1 n_3 - n_2^2}{n_1 n_3 + n_2^2} \right)^2 \quad (5.3.20)$$

dove  $n_i$  é l'indice di rifrazione del mezzo iesimo.

b) m pari, cioè h abbia i seguenti valori:

$$\frac{\lambda_0}{2}, \quad \lambda_0, \quad \frac{3\lambda_0}{2}, \dots \quad (5.3.21)$$

In tal caso  $\sin^2 2\pi \frac{n_2 d}{\lambda_0} = 0$  e la (5.3.2) diventa:

$$R \left( n_2 d = m_{pari} \frac{\lambda_0}{4} \right) = \frac{(r_{12} + r_{23})^2}{(1 + r_{12} r_{23})^2} \quad (5.3.22)$$

Sostituendo le (5.3.3), la (5.3.22) si scrive:

$$R \left( n_2 d = m_{pari} \frac{\lambda_0}{4} \right) = \left( \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} \right)^2 \quad (5.3.23)$$

che risulta indipendente da  $n_2$ .

Vogliamo, ora, determinare la natura dei valori estremi dati dalla (5.3.20) e (5.3.23); per questo calcoliamo la derivata seconda della riflettività, cioè la derivata prima della

(5.3.16), valutata in  $h = m \frac{\lambda_0}{4}$

Posto:

$$D = \frac{\lambda_0}{2\pi} \left[ (1 + r_{12} r_{23})^2 - 4 r_{12} r_{23} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right]^2 \quad (5.3.24)$$

la (5.3.16) si scrive:

$$\frac{dR}{dh} = \frac{-4r_{12}r_{23} \sin \frac{4\pi}{\lambda_0} h [(1 - r_{23}^2) (1 - r_{12}^2)]}{D} \quad (5.3.25)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dh^2} &= \frac{-4r_{12}r_{23} \frac{4\pi}{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{2\pi} \left( \cos \frac{4\pi}{\lambda_0} h \right) [(1 - r_{23}^2) (1 - r_{12}^2)] \left[ (1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right]^2}{D^2} + \\ &\quad + \frac{4 \frac{\lambda_0}{2\pi} r_{12}r_{23} \left( \sin \frac{4\pi}{\lambda_0} h \right) [(1 - r_{23}^2) (1 - r_{12}^2)]}{D^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{d}{dh} \left[ 16r_{12}^2 r_{23}^2 \sin^4 \frac{2\pi}{\lambda_0} h - 8(1 + r_{12}r_{23})^2 r_{12}r_{23} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} h + (1 + r_{12}r_{23})^4 \right] = \\ &= \frac{-8r_{12}r_{23} [(1 - r_{23}^2) (1 - r_{12}^2)] \left[ (1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right]^2 \cos \frac{4\pi}{\lambda_0} h}{D^2} + \\ &\quad + \frac{4 \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda_0} r_{12}r_{23} \left( \sin \frac{4\pi}{\lambda_0} h \right) [(1 - r_{23}^2) (1 - r_{12}^2)]}{D^2} \cdot \\ &\quad \cdot \left[ 64r_{12}^2 r_{23}^2 \left( \sin^3 \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right) \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} h - 16(1 + r_{12}r_{23})^2 r_{12}r_{23} \left( \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right) \sin \frac{2\pi}{\lambda_0} h \right] \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

Sostituendo nella (5.3.26)  $h = m \frac{\lambda_0}{4}$  e, tenendo presente che:

$$\sin m\pi = 0 \quad \forall m \in N \quad e \quad \cos m\pi = (-1)^m \quad (5.3.27)$$

la (5.3.26) diventa:

$$\frac{d^2 R}{dh^2} \Big|_{(h=\frac{m\lambda_0}{4})} = \frac{-8r_{12}r_{23} [(1 - r_{23}^2) (1 - r_{12}^2)] \left[ (1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right]^2 (-1)^m}{D^2} \quad (5.3.28)$$

Dalla (5.3.28) si ottiene che:

$$\frac{d^2 R}{dh^2} \left( h = \frac{m\lambda_0}{4} \right) \quad \text{risulta} \quad > 0 \quad \text{oppure} \quad < 0 \quad \text{se} :$$

$$(-1)^m r_{12}r_{23} [(1 - r_{23}^2) (1 - r_{12}^2)] \quad \text{risulta} \quad < 0 \quad \text{oppure} \quad > 0 \quad (5.3.29)$$

cosicché se la (5.3.29) é  $< 0$  si ha un minimo, se la (5.3.29) é  $> 0$  si ha un massimo.

Esprimendo la (5.3.29) in funzione degli indici di rifrazione per mezzo delle (5.3.3) si ha:

$$\begin{aligned} r_{12}r_{23} (1 - r_{23}^2) (1 - r_{12}^2) &= \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right) \left( \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \right) \left[ 1 - \left( \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{16n_1 n_2^2 n_3}{(n_1 + n_2)^3 (n_2 + n_3)^3} (n_1 - n_2) (n_2 - n_3) \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

Pertanto la riflettività per  $n_2d = m\frac{\lambda_0}{4}$  ha:

$$\text{un massimo se } (-1)^m(n_1 - n_2)(n_2 - n_3) > 0 \quad (5.3.31)$$

$$\text{un minimo se } (-1)^m(n_1 - n_2)(n_2 - n_3) < 0 \quad (5.3.32)$$

Per meglio capire la (5.3.31) e la (5.3.32), **fissiamo l'indice di rifrazione del primo mezzo**. Generalmente esso é l'aria, pertanto  $n_1 \simeq 1$ ; certamente quindi,  $n_2 > n_1$ .

Ne segue, pertanto, che:

1) **Se l'indice di rifrazione  $n_2$  dello strato é piú grande dell'indice di rifrazione del terzo mezzo, la riflettività é massima per valori di  $m$  dispari cioè per  $n_2d = \frac{\lambda_0}{4}, \frac{3}{4}\lambda_0, \dots$  e minima per valori di  $m$  pari, cioè per  $n_2d = \frac{\lambda_0}{2}, \lambda_0, \dots$**

2) **Se l'indice di rifrazione  $n_2$  dello strato é piú piccolo dell'indice di rifrazione del terzo mezzo, la riflettività é massima per valori di  $m$  pari cioè per  $n_2d = \frac{\lambda_0}{2}, \lambda_0, \dots$  e minima per valori di  $m$  dispari cioè per  $n_2d = \frac{\lambda_0}{4}, \frac{3}{4}\lambda_0, \dots$**

Nel caso 1 i minimi assumono valore zero se  $n_1 = n_3$ , cioè i mezzi estremi hanno lo stesso indice di rifrazione.

Nel caso 2 i minimi assumono valore zero se  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$  cioè quando l'indice di rifrazione dello strato é la media geometrica degli indici di rifrazione dei mezzi estremi. Questo fatto ci consente di dire che l'introduzione di uno strato, di spessore ottico di un quarto d'onda, di opportuna costante dielettrica, ottiene lo stesso risultato di un adattatore di impedenza nel punto di collegamento di due linee di trasmissione elettrica.

In pratica questa condizione non può essere realizzata; infatti, per  $n_3 = 1.5$  deve essere  $n_2 = 1.22$  che é minore degli indici di rifrazione dei materiali esistenti.

Tuttavia é evidente dalla precedente analisi che uno strato, il cui spessore ottico é un quarto di lunghezza d'onda ed il cui indice di rifrazione é sufficientemente basso, può essere usato come strato antiriflettente, cioè come uno strato per mezzo del quale la riflettività di una superficie é ridotta.

Le due sostanze piú comunemente usate in ottica per questo scopo sono la criolite ( $n \simeq 1.35$ ) e il fluoruro di magnesio ( $MgF_2$ ,  $n \simeq 1.38$ ).

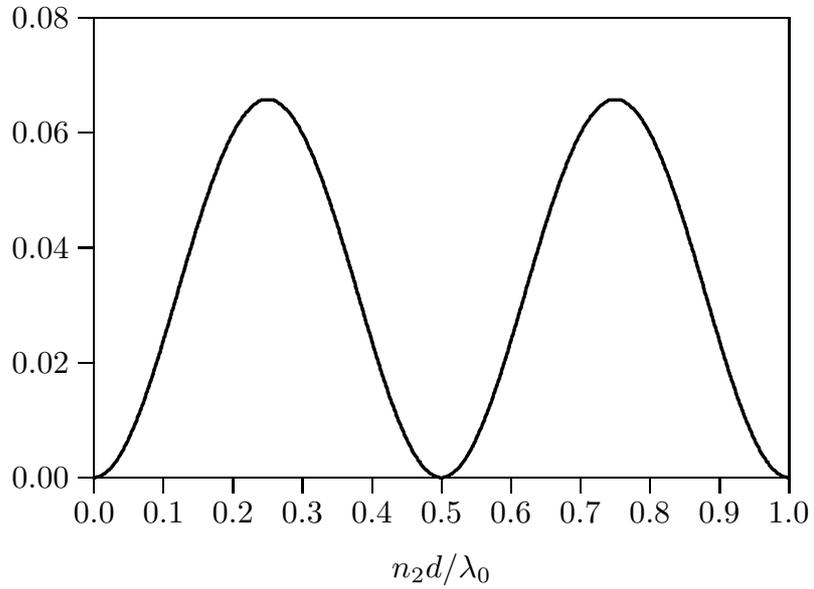
Se una superficie di vetro (per esempio) é rivestita da un materiale di indice di rifrazione sufficientemente elevato la riflettività della superficie aumenta notevolmente. La superficie agirá come "beam splitter" cioè se la radiazione incidente penetra con un angolo diverso da zero, il fascio incidente si divide in due parti: una parte riflessa che può essere utilizzata ed una parte trasmessa. Rivestimenti di diossido di titanio ( $TiO_2$ ,  $n \simeq 2.45$ ) o solfuro di zinco ( $ZnS$ ,  $n \simeq 2.3$ ) sono molto appropriati per tale scopo dando coefficienti di riflessione del 30%.

Facciamo infine osservare che ci siamo limitati al caso in cui la radiazione incidente si propaga in direzione normale alla superficie. Nel caso in cui la radiazione penetra sotto un angolo  $\theta_0$ , si può dimostrare che, se il vettore campo elettrico é ortogonale al piano di incidenza, tutte le formule restano invariate pur di sostituire  $n_j$  con  $n_j \cos \theta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

### Coefficienti di riflessione di lamine piane

**Sistema: aria - acqua - aria**

**Luce:**  $n_1 = 1, n_2 = 1.3, n_3 = 1$



**Sistema: aria - acqua - aria**

**Radiofrequenza:**  $n_1 = 1, n_2 = 9, n_3 = 1$

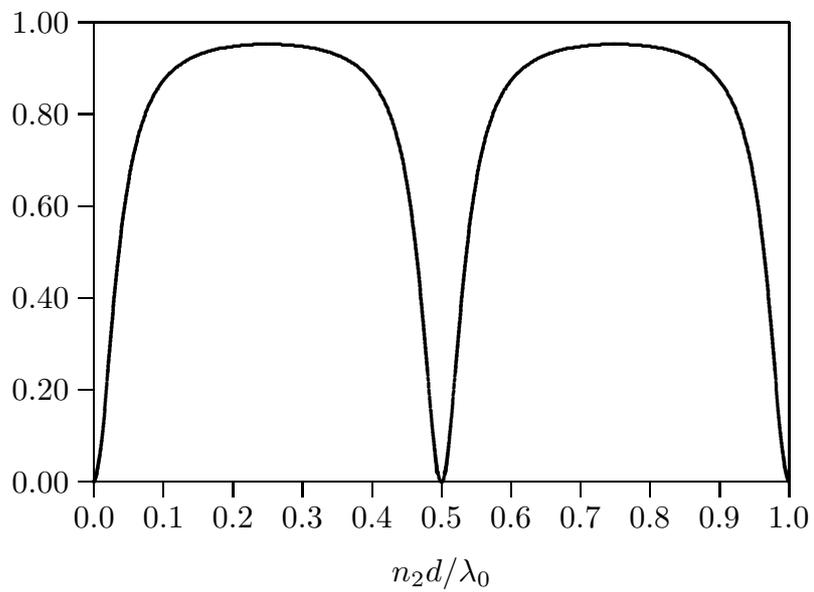
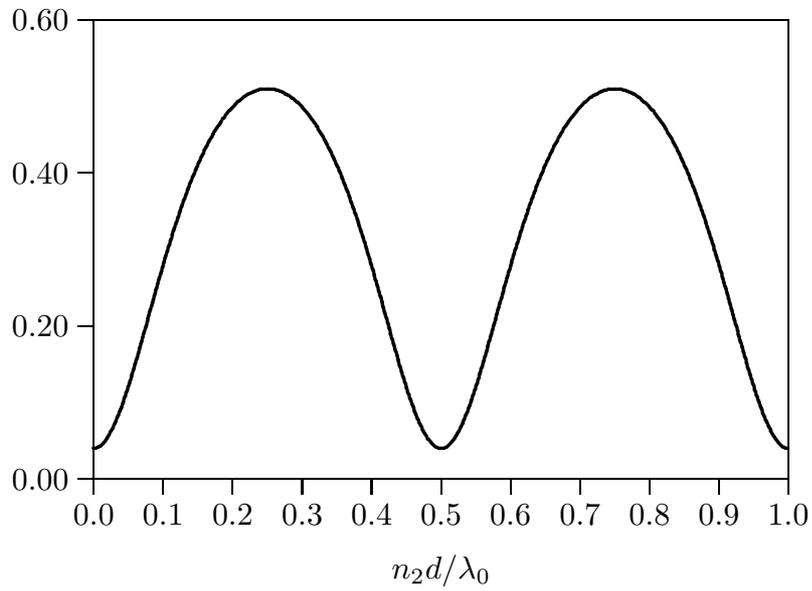


fig.5.3-1

### Coefficienti di riflessione di lamine piane

$$n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 1.5$$



$$n_1 = 1, n_2 = 1.2247 \text{ (media geometrica)}, n_3 = 1.5$$

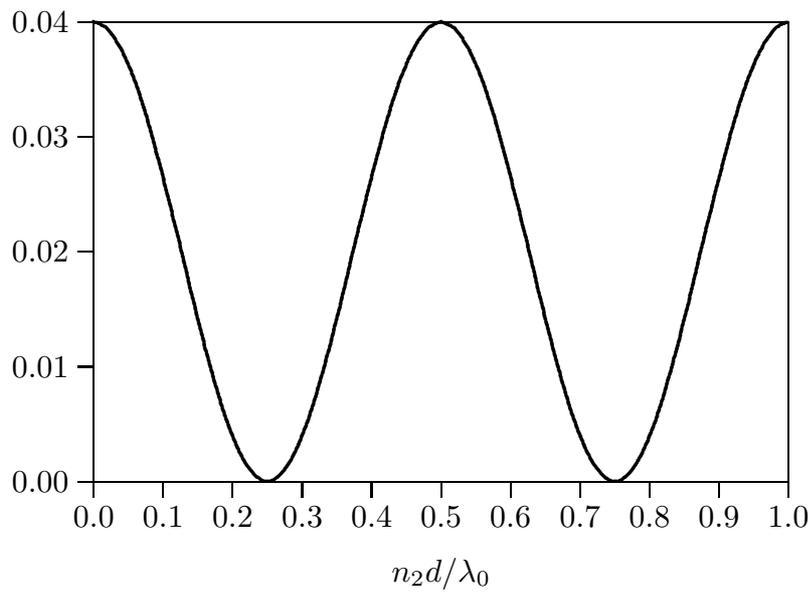


fig.5.3-2

**Coefficiente di riflessione di uno strato antiriflettente di criolite**

$$n_1 = 1, n_2 = 1.35 \text{ (criolite)}, n_3 = 1.5$$

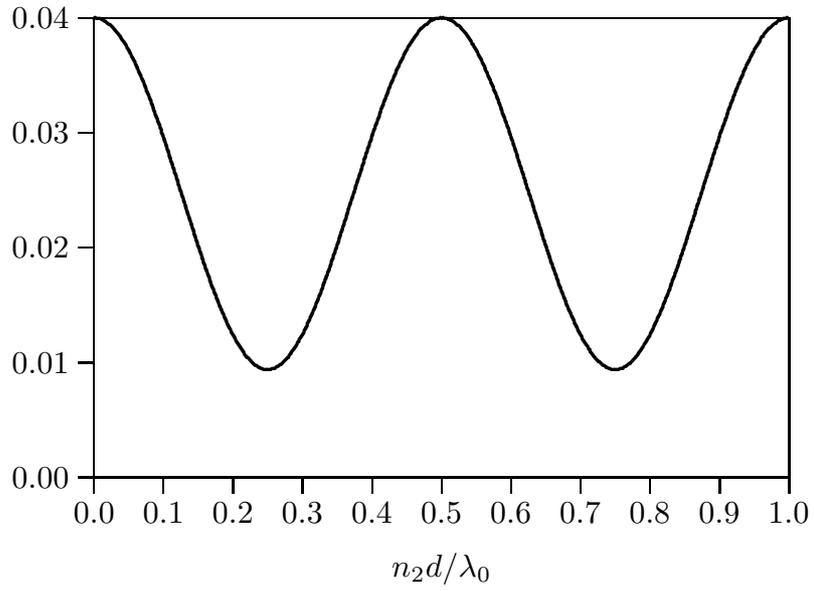


fig.5.3-3

### 5.4 - Protezione di antenne

Da quanto esposto precedentemente si può dedurre che per la protezione di antenne dagli elementi atmosferici si possono utilizzare involucri dielettrici di indice di rifrazione opportuno e di spessore tale che  $n_2 d = \frac{\lambda_0}{2}, \lambda_0, \dots$

Naturalmente non è sempre possibile, con un solo strato trovare il giusto spessore per lo scopo della protezione perché se lo spessore è grande ci possono essere effetti di perdite nel dielettrico.

Si utilizza, allora, uno strato che è combinazione di diversi strati; un dispositivo molto importante è il "sandwich". Esso è illustrato in figura (5.4-1).

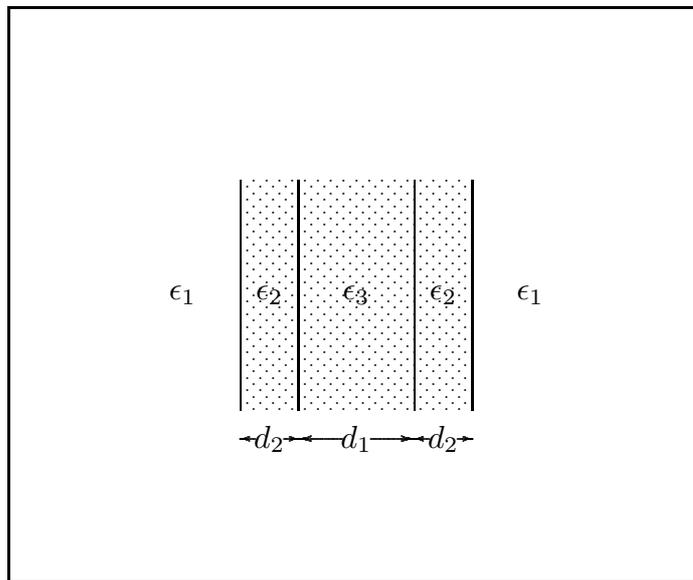


fig.5.4-1

Si può dimostrare che non vi è onda riflessa quando:

$$\frac{1}{2\pi} \beta_3 d_1 = \frac{1}{2} m - \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{2\sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \sin 2\beta_2 d_2}{(\epsilon_3 - \epsilon_2)(\epsilon_1 + \epsilon_2) + (\epsilon_2 + \epsilon_3)(\epsilon_2 - \epsilon_1) \cos 2\beta_2 d_2} \quad (5.4.1)$$

Un completo trattamento del "sandwich" richiede la valutazione della riflettività per angoli di incidenza arbitrari.

### 5.5 - Modello fisico della riflettività di uno strato dielettrico - Riflessioni multiple

Consideriamo un singolo raggio di luce che incide su uno strato dielettrico sotto un angolo  $\theta_0$  (per esempio un sottile fascetto laser). Il raggio subirà riflessioni multiple come

illustrato in figura 5.5-1. Questa é una situazione sperimentale che si verifica quando si vogliono verificare le formule di Fresnel; spesso le riflessioni multiple non vengono misurate (perché i raggi di luce non penetrano nella superficie sensibile del fotometro).

Valutiamo l'ampiezza del campo riflesso, come si deduce dal grafico, per  $\theta_0 = 0$ ; in tal caso  $d' = d$  e i coefficienti  $r$  e  $t$  sono quelli competenti ad incidenza normale. Posto  $\alpha = 2\beta_2 d$ , si ha:

$$E_r = r_{12}E_0 + E_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} r_{23}^n r_{21}^{n-1} e^{i\alpha n} \right] t_{12}t_{21} = E_0 \left[ r_{12} + \frac{t_{12}t_{21}}{r_{21}} \sum_{n=1}^{\infty} (r_{23}r_{21}e^{i\alpha})^n \right] \quad (5.5.1)$$

Poiché  $|r_{23}r_{21}|^2 < 1$ , per la proprietà della serie geometrica si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r_{23}r_{21}e^{i\alpha})^n = \frac{r_{23}r_{21}e^{i\alpha}}{1 - r_{23}r_{21}e^{i\alpha}}$$

Ricordiamo che:  $s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$  e che  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - r}$ ; nel nostro caso  $a = 1$  e il nostro risultato é dato da  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - 1)$ .

Per cui:

$$E_r = E_0 \left[ r_{12} + \frac{1}{r_{21}} \left( \frac{t_{12}t_{21}r_{23}r_{21}e^{i\alpha}}{1 - r_{23}r_{21}e^{i\alpha}} \right) \right] = E_0 \left[ r_{12} + \frac{t_{12}t_{21}r_{23}e^{i\alpha}}{1 + r_{23}r_{12}e^{i\alpha}} \right] \quad (5.5.2)$$

dove abbiamo posto  $r_{21} = -r_{12}$

Segue che:

$$E_r = E_0 \left[ \frac{r_{12} + r_{23} (r_{12}^2 + t_{12}t_{21}) e^{i\alpha}}{1 + r_{12}r_{23}e^{i\alpha}} \right] \quad (5.5.3)$$

D'altra parte, come si può facilmente verificare con le note formule, risulta:  $r_{12}^2 + t_{12}t_{21} = 1$ , quindi la (5.5.3) diventa:

$$E_r = E_0 \left[ \frac{r_{12} + r_{23}e^{i\alpha}}{1 + r_{12}r_{23}e^{i\alpha}} \right] \quad (5.5.4)$$

che é identica alla (5.1.36) come ci proponevamo di dimostrare.

### Riflessioni multiple

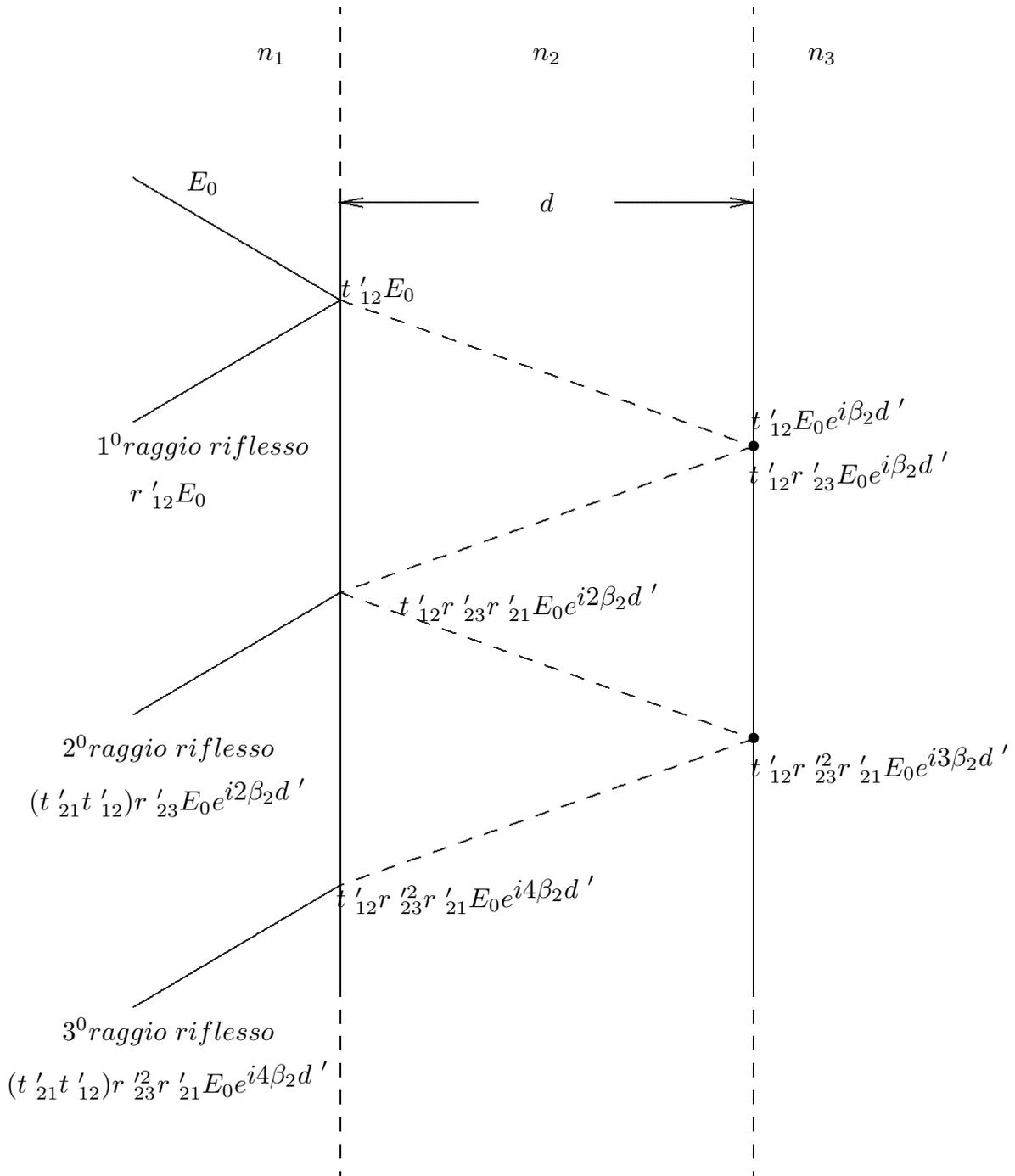


fig.5.5-1

### 5.6 - Lamina assorbente - Film sottile

Vogliamo esplicitare le espressioni del coefficiente di riflessione e di quello di trasmissione, per incidenza normale, quando la lamina é conduttrice ed i due mezzi estremi siano dielettrici perfetti e tutti e tre i mezzi siano non magnetici; ossia:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0 \quad \alpha_1 = \alpha_3 = 0 \quad (5.6.1)$$

In tal caso si ha:

$$r_{12} = \frac{(\beta_1 - \beta_2) - i\alpha_2}{(\beta_1 + \beta_2) + i\alpha_2} \quad e \quad r_{23} = \frac{(\beta_2 - \beta_3) + i\alpha_2}{(\beta_2 + \beta_3) + i\alpha_2} \quad (5.6.2)$$

essendo:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}n_1, \quad \beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_2^2\omega^2}}\right]}, \quad (5.6.3)$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_2^2\omega^2}} - 1\right]}, \quad \beta_3 = \frac{\omega}{c}n_3$$

Talvolta, soprattutto nel campo dell'ottica dei metalli, il mezzo viene caratterizzato dall'indice di rifrazione complesso. Infatti si ha:

$$k = \beta + i\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon'_r\mu_r} \quad (5.6.4)$$

avendo indicato con  $\epsilon'_r$  la costante dielettrica complessa relativa. Nell'ipotesi che  $\mu_r = 1$ , definiamo indice di rifrazione complesso del materiale la quantità:

$$n = \sqrt{\epsilon'_r} = n_r + in_i \quad (5.6.5)$$

essendo:

$$n_r = \Re(n) \quad e \quad n_i = \Im(n) \quad (5.6.6)$$

Conseguentemente risulta:

$$\beta = \frac{\omega}{c}n_r \quad e \quad \alpha = \frac{\omega}{c}n_i \quad (5.6.7)$$

In tal caso le (5.6.3) diventano:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}n_1, \quad \beta_2 = \frac{\omega}{c}n_r, \quad \alpha_2 = \frac{\omega}{c}n_i \quad e \quad \beta_3 = \frac{\omega}{c}n_3 \quad (5.6.8)$$

Esprimendo le grandezze  $\Re(r_{12}^*r_{23})$ ,  $\Im(r_{12}^*r_{23})$ ,  $\Re(r_{12}r_{23})$ ,  $\Im(r_{12}r_{23})$  che figurano nella (5.2.2) in funzione delle (5.6.8) o delle (5.6.3) tenendo conto che in questo ultimo caso  $n_r$  ed  $n_i$  rappresentano i termini con la radice quadrata, si ha:

$$r_{12} = \frac{(n_1 - n_r) - in_i}{(n_1 + n_r) + in_i} \quad e \quad r_{23} = \frac{(n_r - n_3) + in_i}{(n_r + n_3) + in_i} \quad (5.6.9)$$

Esplicitando  $r_{12}$ , ossia moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore, si ha:

$$\begin{aligned}
 r_{12} &= \frac{[(n_1 - n_r) - in_i] [(n_1 + n_r) - in_i]}{[(n_1 + n_r) + in_i] [(n_1 + n_r) - in_i]} = \\
 &= \frac{(n_1 - n_r)(n_1 + n_r) - n_i^2 - in_i(n_1 - n_r) - in_i(n_1 + n_r)}{(n_1 + n_r)^2 + n_i^2} = \\
 &= \frac{(n_1 - n_r)(n_1 + n_r) - n_i^2 - 2in_in_1}{(n_1 + n_r)^2 + n_i^2} =
 \end{aligned} \tag{5.6.10}$$

Analogamente per  $r_{23}$ :

$$\begin{aligned}
 r_{23} &= \frac{[(n_r - n_3) + in_i] [(n_r + n_3) - in_i]}{[(n_r + n_3) + in_i] [(n_r + n_3) - in_i]} = \\
 &= \frac{(n_r - n_3)(n_r + n_3) + n_i^2 - in_i(n_r - n_3) + in_i(n_r + n_3)}{(n_r + n_3)^2 + n_i^2} = \\
 &= \frac{(n_r - n_3)(n_r + n_3) + n_i^2 + 2in_in_3}{(n_r + n_3)^2 + n_i^2} =
 \end{aligned} \tag{5.6.11}$$

Ne segue:

$$r_{12}^* r_{23} = \frac{[(n_1 - n_r)(n_1 + n_r) - n_i^2 + 2in_in_1] [(n_r - n_3)(n_r + n_3) + n_i^2 + 2in_in_3]}{[(n_1 + n_r)^2 + n_i^2] [(n_r + n_3)^2 + n_i^2]} \tag{5.6.12}$$

$$\Re(r_{12}^* r_{23}) = \frac{[(n_1 - n_r)(n_1 + n_r) - n_i^2] [(n_r - n_3)(n_r + n_3) + n_i^2] - 4n_i^2 n_1 n_3}{[(n_1 + n_r)^2 + n_i^2] [(n_r + n_3)^2 + n_i^2]} \tag{5.6.13}$$

$$\Im(r_{12}^* r_{23}) = \frac{2n_in_3 [(n_1 - n_r)(n_1 + n_r) - n_i^2] + 2n_in_1 [(n_r - n_3)(n_r + n_3) + n_i^2]}{[(n_1 + n_r)^2 + n_i^2] [(n_r + n_3)^2 + n_i^2]} \tag{5.6.14}$$

Analogamente:

$$r_{12} r_{23} = \frac{[(n_1 - n_r)(n_1 + n_r) - n_i^2 - 2in_in_1] [(n_r - n_3)(n_r + n_3) + n_i^2 + 2in_in_3]}{[(n_1 + n_r)^2 + n_i^2] [(n_r + n_3)^2 + n_i^2]} \tag{5.6.15}$$

$$\Re(r_{12} r_{23}) = \frac{[(n_1 - n_r)(n_1 + n_r) - n_i^2] [(n_r - n_3)(n_r + n_3) + n_i^2] + 4n_i^2 n_1 n_3}{[(n_1 + n_r)^2 + n_i^2] [(n_r + n_3)^2 + n_i^2]} \tag{5.6.16}$$

$$\Im(r_{12} r_{23}) = \frac{2n_in_3 [(n_1 - n_r)(n_1 + n_r) - n_i^2] - 2n_in_1 [(n_r - n_3)(n_r + n_3) + n_i^2]}{[(n_1 + n_r)^2 + n_i^2] [(n_r + n_3)^2 + n_i^2]} \tag{5.6.17}$$

Inoltre:

$$\begin{array}{l}
 \Re(r_{12}) = \frac{n_1^2 - n_r^2 - n_i^2}{(n_1 + n_r)^2 + n_i^2} \quad \Re(r_{23}) = \frac{n_r^2 - n_3^2 + n_i^2}{(n_r + n_3)^2 + n_i^2} \\
 \Im(r_{12}) = \frac{-2n_i n_1}{(n_1 + n_r)^2 + n_i^2} \quad \Im(r_{23}) = \frac{2n_i n_3}{(n_r + n_3)^2 + n_i^2} \\
 |r_{12}|^2 = \frac{(n_1 - n_r)^2 + n_i^2}{(n_1 + n_r)^2 + n_i^2} \quad |r_{23}|^2 = \frac{(n_r - n_3)^2 + n_i^2}{(n_r + n_3)^2 + n_i^2}
 \end{array} \tag{5.6.18}$$

Infine, sostituendo nella (5.2.2) e nella (5.2.9) al posto di  $\beta_2$  l'espressione:

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_r \tag{5.6.19}$$

ed al posto di  $\alpha_2$  l'espressione:

$$\alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_i \tag{5.6.20}$$

il coefficiente di riflessione risulta:

$$R = \frac{|r_{12}|^2 + e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)} \left[ 2\Re(r_{12}^* r_{23}) \cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12}^* r_{23}) \sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) \right] + |r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}}{1 + e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)} \left[ 2\Re(r_{12} r_{23}) \cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12} r_{23}) \sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) \right] + |r_{12}|^2 |r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}} \tag{5.6.21}$$

Poiché risulta, in questo caso:

$$\frac{\beta_3 \mu_1}{\beta_1 \mu_3} = \frac{n_3}{n_1} \tag{5.6.22}$$

il coefficiente di trasmissione é:

$$T = \frac{\frac{n_3}{n_1} [1 + 2\Re(r_{12}) + |r_{12}|^2] [1 + 2\Re(r_{23}) + |r_{23}|^2] e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}}{1 + e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)} \left[ 2\Re(r_{12} r_{23}) \cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12} r_{23}) \sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) \right] + |r_{12}|^2 |r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}} \tag{5.6.23}$$

Dalle espressioni (5.6.21) e (5.6.23) si possono graficare delle curve di riflettività e di trasmittività in funzione dello spessore (in unità di lunghezze d'onda) della lamina assorbente (film sottile). All'aumentare dello spessore, l'effetto dell'assorbimento riduce l'ampiezza dei massimi successivi del coefficiente di riflessione. Se l'assorbimento é sufficientemente alto, come nel caso dei metalli nella regione del visibile, il coefficiente di riflessione all'aumentare dello spessore della lamina aumenta, eventualmente oscillando fra

minimi e massimi, e si stabilizza al valore competente alla sola interfaccia dielettrico - metallo. In generale nel caso di un film metallico di poche centinaia di ångstrom di spessore la trasmittività é meno dell'un per cento.

Riportiamo, di seguito, un programma in ambiente matlab che permette il grafico della riflettività e della trasmittività di lamine assorbenti sia con le formule dirette che con quelle sviluppate (5.6.21) e (5.6.23).

Programma LAMINAASSORBENTE.M

```

delete(get(0,'children'));
clf;
clear all;
n1=1;
n3=1.5;
nr=2.5;
ni=0.07;
dsul=0:0.001:2;
%dsul=0.65
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%Formule dirette
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
r12=((n1-nr)-i.*ni)/((n1+nr)+i.*ni);
r23=((nr-n3)+i.*ni)/((nr+n3)+i.*ni);
alfa2=2.*pi.*ni;
beta2=2.*pi.*nr;
beta3=2.*pi.*n3;
RR=(r12+r23.*exp(-2.*alfa2.*dsul).*exp(+2.*i.*beta2.*dsul))./(1+...
r12.*r23.*exp(-2.*alfa2.*dsul).*exp(+2.*i.*beta2.*dsul));
RRAST=conj(RR);
Rifl=RR.*RRAST;
NTT=(1+r12).*(1+r23).*exp(i.*(beta2+i.*alfa2-beta3).*dsul);
DTT=1+r12.*r23.*exp(2.*i.*(beta2+i.*alfa2).*dsul);
TT=NTT./DTT;
TTstar=conj(TT);
Trasm=(n3./n1).*TT.*TTstar;
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%Fine Formule dirette
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%Formule sviluppate
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
NRr12r23=((n1-nr).*(n1+nr)-ni.^2).*((nr-n3).*(nr+n3)+ni.^2)+4.*ni.^2.*n1.*n3;
DRr12r23=((n1+nr).^2+ni.^2).*((nr+n3).^2+ni.^2);
NIr12r23=2.*ni.*n3.*((n1-nr).*(n1+nr)-ni.^2)-2.*ni.*n1.*((nr-n3).*(nr+n3)+ni.^2)

```

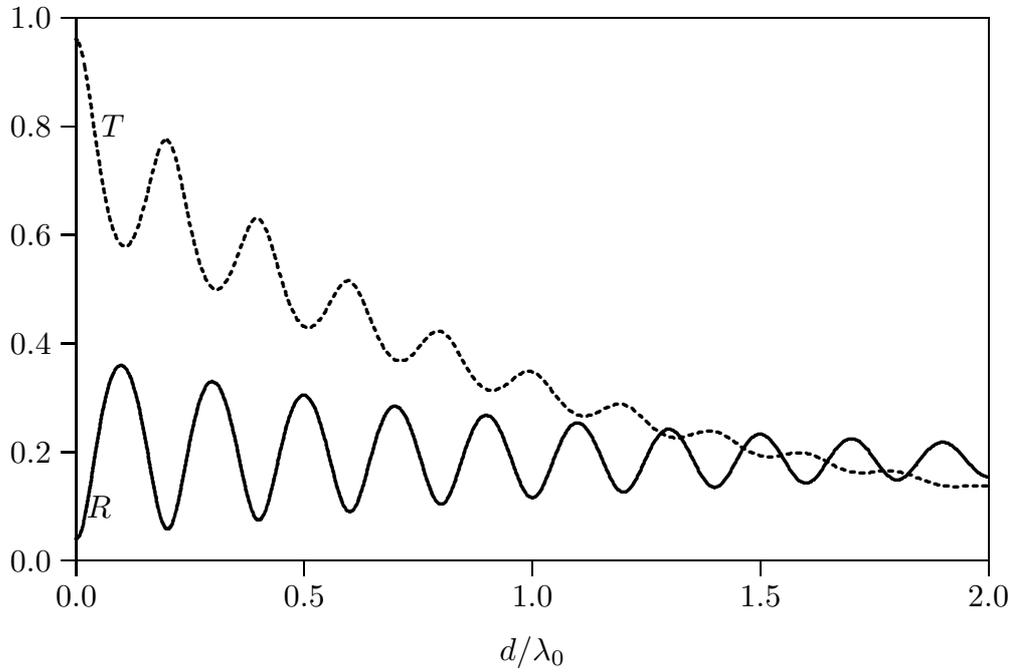
```

DlR12r23=((n1+nr).^2+ni.^2).*((nr+n3).^2+ni.^2);
NRr12astr23=((n1-nr).*(n1+nr)-ni.^2).*((nr-n3).*(nr+n3)+ni.^2)-4.*ni.^2.*n1.*n3
DRr12astr23=((n1+nr).^2+ni.^2).*((nr+n3).^2+ni.^2);
NlR12astr23=2.*ni.*n3.*((n1-nr).*(n1+nr)-ni.^2)+2.*ni.*n1.*((nr-n3)
.*(nr+n3)+ni.^2);
DlR12astr23=((n1+nr).^2+ni.^2).*((nr+n3).^2+ni.^2);
Rr12=(n1.^2-nr.^2-ni.^2)./((n1+nr).^2+ni.^2);
lR12=-2.*ni.*n1./((n1+nr).^2+ni.^2);
Rr23=(nr.^2-n3.^2+ni.^2)./((nr+n3).^2+ni.^2);
lR23=2.*ni.*n3./((nr+n3).^2+ni.^2);
r12modq=((n1-nr).^2+ni.^2)./((n1+nr).^2+ni.^2);
r23modq=((nr-n3).^2+ni.^2)./((nr+n3).^2+ni.^2);
Rr12r23=NRr12r23./DRr12r23;
lR12r23=NlR12r23./DlR12r23;
Rr12astr23=NRr12astr23./DRr12astr23;
lR12astr23=NlR12astr23./DlR12astr23;
A=exp(-4.*pi.*ni.*dsul);
AA=exp(-8.*pi.*ni.*dsul);
B=cos(4.*pi.*nr.*dsul);
BB=sin(4.*pi.*nr.*dsul);
NCoeffRifl=r12modq+A.*(2.*Rr12astr23.*B-2.*lR12astr23.*BB)+r23modq.*AA;
DCoeffRifl=1+A.*(2.*Rr12r23.*B-2.*lR12r23.*BB)+r12modq.*r23modq.*AA;
CoeffRifl=NCoeffRifl./DCoeffRifl;
NCoeffTras=(n3./n1).*(1+2.*Rr12+r12modq).*(1+2.*Rr23+r23modq).*A;
DCoeffTras=1+A.*(2.*Rr12r23.*B-2.*lR12r23.*BB)+r12modq.*r23modq.*AA;
CoeffTras=NCoeffTras./DCoeffTras;
%TOT=CoeffRifl+CoeffTras
plot(dsul,CoeffRifl)
hold on
plot(dsul,CoeffTras)
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%Fine Formule sviluppate
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

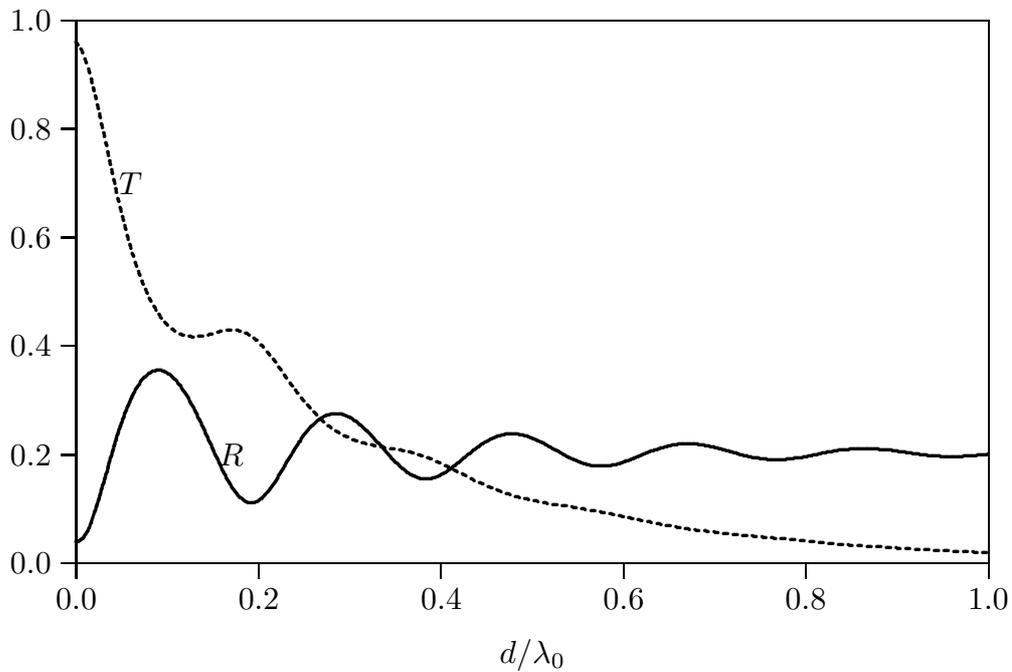
```

### Riflessione e trasmissione di una lamina sottile

$n_1 = 1, n_r = 2.5, n_i = 0.07$  (solfuro di antimonio a  $\lambda_0 = 0.5461 \mu m$ ),  $n_3 = 1.5$



$n_1 = 1, n_r = 2.6, n_i = 0.29$  (solfuro di antimonio a  $\lambda_0 = 0.4360 \mu m$ ),  $n_3 = 1.5$



$n_1 = 1, n_r = 0.05, n_i = 2.87$  (argento a  $\lambda_0 = 0.5 \mu m$ ),  $n_3 = 1.5$

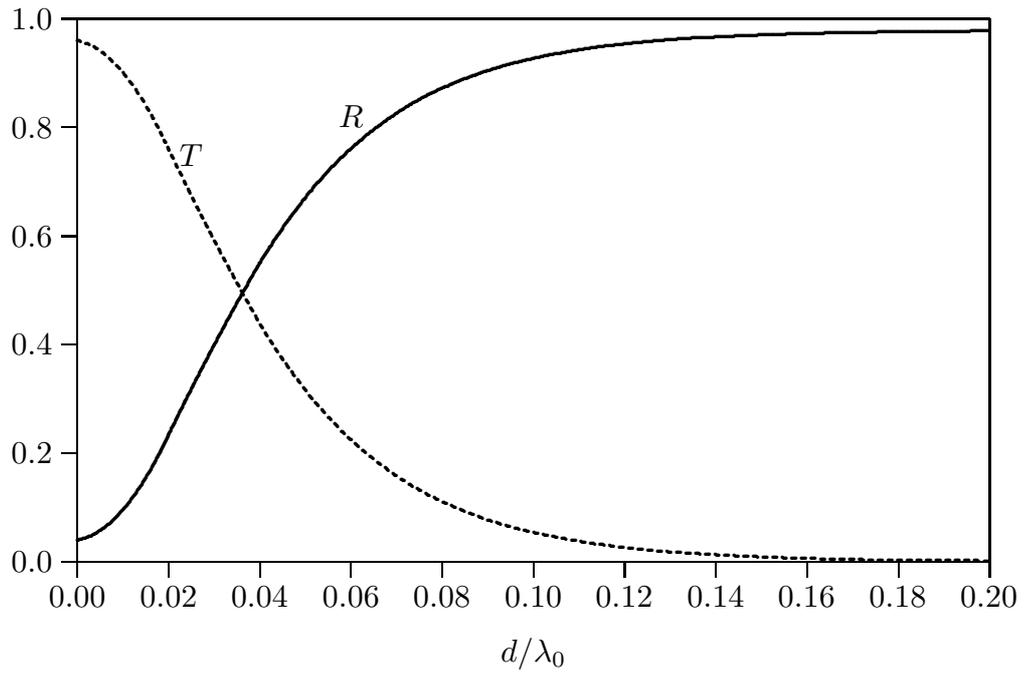


fig.5.6-1

### 5.7 - Teoria delle lamine multistrato

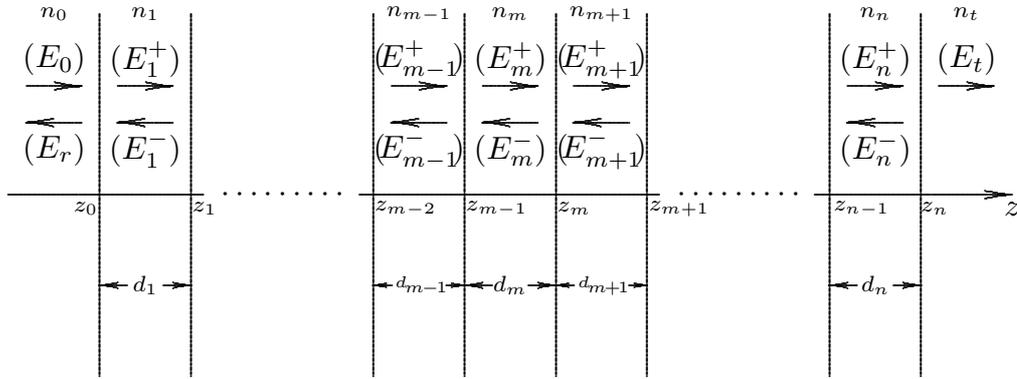


fig.5.7-1

Sia dato un sistema multistrato come in figura (5.7-1).

Consideriamo l'interfaccia fra gli strati  $m$  ed  $m+1$ ; le condizioni al contorno dei campi elettrico e magnetico conducono a:

$$E_m^+ e^{ik_m z_m} + E_m^- e^{-ik_m z_m} = E_{m+1}^+ e^{ik_{m+1} z_m} + E_{m+1}^- e^{-ik_{m+1} z_m} \quad (5.7.1)$$

$$E_m^+ e^{ik_m z_m} - E_m^- e^{-ik_m z_m} = \frac{n_{m+1}}{n_m} E_{m+1}^+ e^{ik_{m+1} z_m} - \frac{n_{m+1}}{n_m} E_{m+1}^- e^{-ik_{m+1} z_m} \quad (5.7.2)$$

L'equazione (5.7.2) si può scrivere:

$$\frac{n_m}{n_{m+1}} E_m^+ e^{ik_m z_m} - \frac{n_m}{n_{m+1}} E_m^- e^{-ik_m z_m} = E_{m+1}^+ e^{ik_{m+1} z_m} - E_{m+1}^- e^{-ik_{m+1} z_m} \quad (5.7.3)$$

Sommando prima e poi sottraendo membro a membro le equazioni (5.7.1) e (5.7.3), si ottiene:

$$\left(1 + \frac{n_m}{n_{m+1}}\right) E_m^+ e^{ik_m z_m} + \left(1 - \frac{n_m}{n_{m+1}}\right) E_m^- e^{-ik_m z_m} = 2E_{m+1}^+ e^{ik_{m+1} z_m} \quad (5.7.4)$$

$$\left(1 - \frac{n_m}{n_{m+1}}\right) E_m^+ e^{ik_m z_m} + \left(1 + \frac{n_m}{n_{m+1}}\right) E_m^- e^{-ik_m z_m} = 2E_{m+1}^- e^{-ik_{m+1} z_m} \quad (5.7.5)$$

ossia:

$$E_{m+1}^+ e^{ik_{m+1} z_m} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_m}{n_{m+1}}\right) E_m^+ e^{ik_m z_m} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_m}{n_{m+1}}\right) E_m^- e^{-ik_m z_m} \quad (5.7.6)$$

$$E_{m+1}^- e^{-ik_{m+1} z_m} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_m}{n_{m+1}}\right) E_m^+ e^{ik_m z_m} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_m}{n_{m+1}}\right) E_m^- e^{-ik_m z_m} \quad (5.7.7)$$

per  $m$  intero da 0 a  $n$ .

Le equazioni (5.7.6) e (5.7.7) si possono scrivere in forma matriciale:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E_{m+1}^+ e^{ik_{m+1}z_m} \\ E_{m+1}^- e^{-ik_{m+1}z_m} \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_m}{n_{m+1}} \right) \begin{pmatrix} 1 & R_{(m+1),m} \\ R_{(m+1),m} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m^+ e^{ik_m z_m} \\ E_m^- e^{-ik_m z_m} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7.8)$$

avendo posto:

$$R_{(m+1),m} = \frac{\left( 1 - \frac{n_m}{n_{m+1}} \right)}{\left( 1 + \frac{n_m}{n_{m+1}} \right)} \quad (5.7.9)$$

Il coefficiente  $R_{(m+1),m}$  é il coefficiente di riflessione alla superficie di separazione fra le regioni  $m + 1$  e  $m$ .

Consideriamo l'ultimo mezzo  $t = n + 1$  e lo strato  $n$ . Nel mezzo  $t$  risulta  $E_t^- = 0$  e  $E_t^+ = E_t$ . Ponendo nell'equazione (5.7.8)  $m = n$  otteniamo la relazione fra i campi elettrici nel mezzo  $t$  e quelli nello strato  $n$ .

$$\begin{pmatrix} E_t^+ e^{ik_t z_n} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_n}{n_t} \right) \begin{pmatrix} 1 & R_{t,n} \\ R_{t,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n^+ e^{ik_n z_n} \\ E_n^- e^{-ik_n z_n} \end{pmatrix} \quad (5.7.10)$$

Posto:

$$\overline{\overline{V}}_{t,n} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_n}{n_t} \right) \begin{pmatrix} 1 & R_{t,n} \\ R_{t,n} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.7.11)$$

l'equazione (5.7.10) si scrive:

$$\begin{pmatrix} E_t^+ e^{ik_t z_n} \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{V}}_{t,n} \cdot \begin{pmatrix} E_n^+ e^{ik_n z_n} \\ E_n^- e^{-ik_n z_n} \end{pmatrix} \quad (5.7.12)$$

Naturalmente é desiderabile correlare il campo elettrico trasmesso nell'ultimo mezzo  $t$  al campo elettrico incidente. Per far questo occorre trovare una relazione ricorrente che lega i campi nei mezzi intermedi.

Moltiplicando ciascun termine dell'equazione (5.7.6) per la quantità:

$$e^{ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} \quad (5.7.13)$$

e ciascun termine della (5.7.7) per la quantità:

$$e^{-ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} \quad (5.7.14)$$

si ha:

$$\begin{aligned} E_{m+1}^+ e^{ik_{m+1}z_{m+1}} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_m}{n_{m+1}} \right) E_m^+ e^{ik_m z_m} e^{ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{n_m}{n_{m+1}} \right) E_m^- e^{-ik_m z_m} e^{ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} \end{aligned} \quad (5.7.15)$$

$$\begin{aligned} E_{m+1}^- e^{-ik_{m+1}z_{m+1}} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{n_m}{n_{m+1}} \right) E_m^+ e^{ik_m z_m} e^{-ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_m}{n_{m+1}} \right) E_m^- e^{-ik_m z_m} e^{-ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} \end{aligned} \quad (5.7.16)$$

**Le equazioni (5.7.15) e (5.7.16) verranno utilizzate per correlare i campi negli strati intermedi fino al mezzo in cui si propaga l'onda incidente ossia per  $0 \leq m \leq n - 1$ .**

In forma matriciale si ha:

$$\begin{pmatrix} E_{m+1}^+ e^{ik_{m+1}z_{m+1}} \\ E_{m+1}^- e^{-ik_{m+1}z_{m+1}} \end{pmatrix} = \overline{\overline{V}}_{(m+1),m} \cdot \begin{pmatrix} E_m^+ e^{ik_m z_m} \\ E_m^- e^{-ik_m z_m} \end{pmatrix} \quad (5.7.17)$$

essendo:

$$\overline{\overline{V}}_{(m+1),m} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_m}{n_{m+1}} \right) \begin{pmatrix} e^{ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} & R_{(m+1),m} e^{ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} \\ R_{(m+1),m} e^{-ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} & e^{-ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} \end{pmatrix} \quad (5.7.18)$$

e, avendo posto come in precedenza:

$$R_{(m+1),m} = \frac{\left( 1 - \frac{n_m}{n_{m+1}} \right)}{\left( 1 + \frac{n_m}{n_{m+1}} \right)} \quad (5.7.19)$$

Ne segue che il campo trasmesso é legato al campo nel mezzo di incidenza dalla espressione:

$$\begin{pmatrix} E_t^+ e^{ik_t z_n} \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{V}}_{t,0} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ E_r \end{pmatrix} \quad (5.7.20)$$

dove:

$$\overline{\overline{V}}_{t,0} = \overline{\overline{V}}_{t,n} \cdot \overline{\overline{V}}_{n,n-1} \cdot \dots \cdot \overline{\overline{V}}_{1,0} \quad (5.7.21)$$

L'equazione matriciale (5.7.20) rappresenta un sistema di due equazioni in due incognite che risolto ci fornisce l'ampiezza del campo trasmesso  $E_t$  e l'ampiezza del campo riflesso  $E_r$  in funzione del campo incidente  $E_0$ . Da essi é possibile avere sia il coefficiente di riflessione  $R$  che quello di trasmissione  $T$ .

$$R = \frac{|E_r|^2}{|E_0|^2}, \quad T = \frac{n_t}{n_0} \frac{|E_t|^2}{|E_0|^2} \quad (5.7.22)$$

Per esplicitare le espressioni di  $R$  e di  $T$ , scriviamo in forma esplicita l'equazione (5.7.20):

$$\begin{pmatrix} E_t^+ e^{ik_t z_n} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{t,0}(1,1) & V_{t,0}(1,2) \\ V_{t,0}(2,1) & V_{t,0}(2,2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ E_r \end{pmatrix} \quad (5.7.23)$$

che é equivalente a:

$$E_t^+ e^{ik_t z_n} = V_{t,0}(1,1)E_0 + V_{t,0}(1,2)E_r \quad (5.7.24)$$

$$0 = V_{t,0}(2,1)E_0 + V_{t,0}(2,2)E_r \quad (5.7.25)$$

Dalla (5.7.25) segue:

$$E_r = -\frac{V_{t,0}(2,1)}{V_{t,0}(2,2)}E_0 \quad (5.7.26)$$

da cui:

$$R = \frac{|E_r|^2}{|E_0|^2} = \frac{|V_{t,0}(2,1)|^2}{|V_{t,0}(2,2)|^2} \quad (5.7.27)$$

Sostituendo l'espressione di  $E_r$  nella (5.7.24) si ottiene;

$$E_t^+ e^{ik_t z_n} = V_{t,0}(1,1)E_0 - V_{t,0}(1,2) \frac{V_{t,0}(2,1)}{V_{t,0}(2,2)}E_0 \quad (5.7.28)$$

da cui:

$$T = \frac{n_t}{n_0} \frac{|E_t^+|^2}{|E_0|^2} = \frac{n_t}{n_0} \left\{ |V_{t,0}(1,1)|^2 - 2\Re \left[ \frac{V_{t,0}(1,1)V_{t,0}^*(1,2)V_{t,0}^*(2,1)}{V_{t,0}^*(2,2)} \right] + \frac{|V_{t,0}(1,2)|^2 |V_{t,0}(2,1)|^2}{|V_{t,0}(2,2)|^2} \right\} \quad (5.7.29)$$

A titolo di esempio applichiamo i risultati trovati al caso di lamina piana. Per questo basta porre  $n = 1$ .

La (5.7.21) diventa:

$$\overline{\overline{V}}_{t,0} = \overline{\overline{V}}_{t,1} \cdot \overline{\overline{V}}_{1,0} \quad (5.7.30)$$

ossia:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{V}}_{t,0} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right) \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) \begin{pmatrix} 1 & R_{t,1} \\ R_{t,1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik_1 z_1} & R_{1,0} e^{ik_1 z_1} \\ R_{1,0} e^{-ik_1 z_1} & e^{-ik_1 z_1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right) \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) \begin{pmatrix} e^{ik_1 z_1} + R_{1,0} R_{t,1} e^{-ik_1 z_1} & R_{1,0} e^{ik_1 z_1} + R_{t,1} e^{-ik_1 z_1} \\ R_{t,1} e^{ik_1 z_1} + R_{1,0} e^{-ik_1 z_1} & R_{1,0} R_{t,1} e^{ik_1 z_1} + e^{-ik_1 z_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7.31)$$

essendo:

$$R_{1,0} = \frac{\left(1 - \frac{n_0}{n_1}\right)}{\left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right)}, \quad R_{t,1} = \frac{\left(1 - \frac{n_1}{n_t}\right)}{\left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right)} \quad (5.7.32)$$

Dalla (5.7.26) si ha:

$$E_r = -\frac{R_{t,1} e^{ik_1 z_1} + R_{1,0} e^{-ik_1 z_1}}{R_{1,0} R_{t,1} e^{ik_1 z_1} + e^{-ik_1 z_1}} E_0 = \frac{R_{1,t} e^{2ik_1 z_1} + R_{0,1}}{1 + R_{0,1} R_{1,t} e^{2ik_1 z_1}} E_0 \quad (5.7.33)$$

che é identica alla (5.1.35).

Dalla (5.7.28) e dalla (5.7.33), si ha: si ha:

$$\begin{aligned} E_t e^{ik_t z_1} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right) \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) \left\{ \left[ e^{ik_1 z_1} + R_{1,0} R_{t,1} e^{-ik_1 z_1} \right] E_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ R_{1,0} e^{ik_1 z_1} + R_{t,1} e^{-ik_1 z_1} \right] \frac{\left[ R_{1,t} e^{2ik_1 z_1} + R_{0,1} \right]}{\left[ 1 + R_{0,1} R_{1,t} e^{2ik_1 z_1} \right]} E_0 \right\} \end{aligned} \quad (5.7.34)$$

che si può scrivere:

$$\begin{aligned} E_t e^{ik_t z_1} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right) \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) \left\{ \left[ 1 + R_{1,0} R_{t,1} e^{-2ik_1 z_1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ R_{1,0} + R_{t,1} e^{-2ik_1 z_1} \right] \frac{\left[ R_{1,t} e^{2ik_1 z_1} + R_{0,1} \right]}{\left[ 1 + R_{0,1} R_{1,t} e^{2ik_1 z_1} \right]} \right\} E_0 e^{ik_1 z_1} \end{aligned} \quad (5.7.35)$$

e, ancora:

$$\begin{aligned} E_t e^{ik_t z_1} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right) \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) \left\{ \frac{\left[ 1 + R_{1,0} R_{t,1} e^{-2ik_1 z_1} \right] \left[ 1 + R_{0,1} R_{1,t} e^{2ik_1 z_1} \right]}{\left[ 1 + R_{0,1} R_{1,t} e^{2ik_1 z_1} \right]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left[ R_{1,0} + R_{t,1} e^{-2ik_1 z_1} \right] \left[ R_{1,t} e^{2ik_1 z_1} + R_{0,1} \right]}{\left[ 1 + R_{0,1} R_{1,t} e^{2ik_1 z_1} \right]} \right\} E_0 e^{ik_1 z_1} \end{aligned} \quad (5.7.36)$$

ossia:

$$E_t = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right) \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) \left\{ \frac{1 + R_{0,1}R_{1,t}e^{2ik_1z_1} + R_{1,0}R_{t,1}e^{-2ik_1z_1} + R_{1,0}R_{0,1}R_{t,1}R_{1,t}}{1 + R_{0,1}R_{1,t}e^{2ik_1z_1}} + \frac{R_{1,0}R_{1,t}e^{2ik_1z_1} + R_{0,1}R_{1,0} + R_{1,t}R_{t,1} + R_{0,1}R_{t,1}e^{-2ik_1z_1}}{1 + R_{0,1}R_{1,t}e^{2ik_1z_1}} \right\} E_0 e^{i(k_1 - k_t)z_1} \quad (5.7.37)$$

La semplificazione dei termini tagliati é dovuta al fatto che:

$$R_{1,0} = -R_{0,1}, \quad R_{1,t} = -R_{t,1} \quad (5.7.38)$$

Segue:

$$E_t = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right) \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) \left\{ \frac{1 + R_{1,0}R_{0,1}R_{t,1}R_{1,t} + R_{0,1}R_{1,0} - R_{1,t}^2}{1 + R_{0,1}R_{1,t}e^{2ik_1z_1}} \right\} E_0 e^{i(k_1 - k_t)z_1} \quad (5.7.39)$$

Il numeratore della frazione fra parentesi della (5.7.39) si può scrivere:

$$1 + R_{0,1}^2 R_{1,t}^2 - R_{0,1}^2 - R_{1,t}^2 = 1 - R_{0,1}^2 - R_{1,t}^2(1 - R_{0,1}^2) = (1 - R_{0,1}^2)(1 - R_{1,t}^2) \quad (5.7.40)$$

Ne segue:

$$E_t = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right) \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) \left\{ \frac{(1 - R_{0,1}^2)(1 - R_{1,t}^2)}{1 + R_{0,1}R_{1,t}e^{2ik_1z_1}} \right\} E_0 e^{i(k_1 - k_t)z_1} \quad (5.7.41)$$

Osservando che:

$$(1 - R_{0,1}^2)(1 - R_{1,t}^2) = \left[1 - \left(\frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n_t - n_1}{n_t + n_1}\right)^2\right] = \frac{4n_1n_0}{(n_1 + n_0)^2} \frac{4n_1n_t}{(n_1 + n_t)^2} = \frac{16n_0n_1^2n_t}{(n_1 + n_0)^2(n_1 + n_t)^2} \quad (5.7.42)$$

e che:

$$\left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right) \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) = \frac{(n_1 + n_t)(n_1 + n_0)}{n_1n_t} \quad (5.7.43)$$

si ha:

$$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_1}{n_t}\right) \left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) (1 - R_{0,1}^2)(1 - R_{1,t}^2) = \frac{4n_0n_1}{(n_1 + n_t)(n_1 + n_0)} = \frac{4}{\left(1 + \frac{n_t}{n_1}\right) \left(1 + \frac{n_1}{n_0}\right)} \quad (5.7.44)$$

Ne segue, quindi, che la (5.7.35) si può scrivere:

$$E_t = \left\{ \frac{4e^{i(k_1 - k_t)z_1}}{\left(1 + \frac{n_t}{n_1}\right) \left(1 + \frac{n_1}{n_0}\right) \left(1 + R_{0,1}R_{1,t}e^{2ik_1z_1}\right)} \right\} E_0 \quad (5.7.45)$$

che é identica alla (5.1.31).

### 5.8 - Mezzi stratificati con permittività alternate alte e basse

Un importante esempio di applicazione del formalismo matriciale é dato da un mezzo periodico costituito da  $2N + 1$  strati dielettrici isotropi con valori alternati di indici di rifrazione alti  $n_h$  e bassi  $n_l$  rispettivamente. Lo spessore di ciascuno strato é un quarto della lunghezza d'onda all'interno del dielettrico. La regione trasmessa é la regione  $t = 2N + 2$  ed ha indice di rifrazione  $n_t$ .

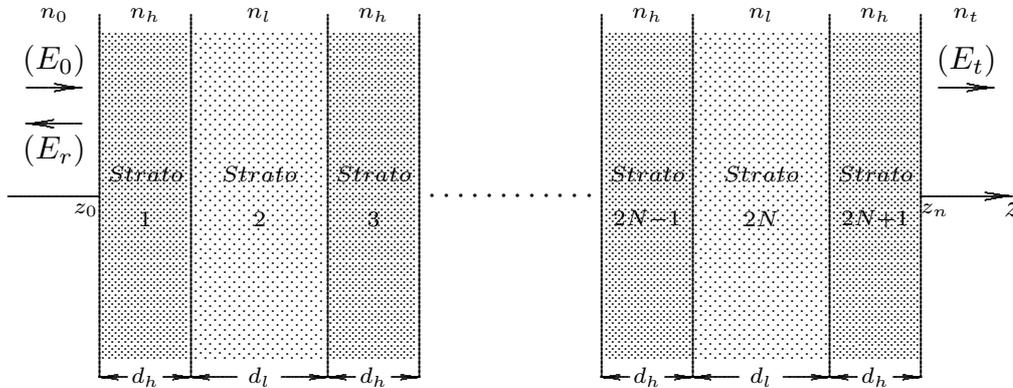


fig.5.8-1

In tal caso la (5.7.20) e la (5.7.21) diventano rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} E_t^+ e^{ik_t z_n} \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{V}}_{t,0} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ E_r \end{pmatrix} \quad (5.8.1)$$

dove:

$$\overline{\overline{V}}_{t,0} = \overline{\overline{V}}_{t,h} \cdot \left( \overline{\overline{V}}_{h,l} \cdot \overline{\overline{V}}_{l,h} \right)^N \cdot \overline{\overline{V}}_{h,0} \quad (5.8.2)$$

$$\overline{\overline{V}}_{t,h} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_h}{n_t} \right) \begin{pmatrix} 1 & R_{t,h} \\ R_{t,h} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8.3)$$

$$\overline{\overline{V}}_{h,l} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_l}{n_h} \right) \begin{pmatrix} e^{ik_h d_h} & R_{h,l} e^{ik_h d_h} \\ R_{h,l} e^{-ik_h d_h} & e^{-ik_h d_h} \end{pmatrix} \quad (5.8.4)$$

$$\overline{\overline{V}}_{l,h} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_h}{n_l} \right) \begin{pmatrix} e^{ik_l d_l} & R_{l,h} e^{ik_l d_l} \\ R_{l,h} e^{-ik_l d_l} & e^{-ik_l d_l} \end{pmatrix} \quad (5.8.5)$$

$$\overline{\overline{V}}_{h,0} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_0}{n_l} \right) \begin{pmatrix} e^{ik_1 d_h} & R_{1,0} e^{ik_1 d_h} \\ R_{1,0} e^{-ik_1 d_h} & e^{-ik_1 d_h} \end{pmatrix} \quad (5.8.6)$$

Poiché abbiamo imposto  $k_h d_h = k_l d_l = \pi/2$ , si ha:

$$\overline{\overline{V}}_{t,h} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_h}{n_t} \right) \begin{pmatrix} 1 & R_{t,h} \\ R_{t,h} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{n_h}{n_t} & 1 - \frac{n_h}{n_t} \\ 1 - \frac{n_h}{n_t} & 1 + \frac{n_h}{n_t} \end{pmatrix} \quad (5.8.7)$$

$$\overline{\overline{V}}_{h,l} = \frac{i}{2} \left( 1 + \frac{n_l}{n_h} \right) \begin{pmatrix} 1 & R_{h,l} \\ -R_{h,l} & -1 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{n_l}{n_h} & 1 - \frac{n_l}{n_h} \\ -\left(1 - \frac{n_l}{n_h}\right) & -\left(1 + \frac{n_l}{n_h}\right) \end{pmatrix} \quad (5.8.8)$$

$$\overline{\overline{V}}_{l,h} = \frac{i}{2} \left( 1 + \frac{n_h}{n_l} \right) \begin{pmatrix} 1 & R_{l,h} \\ -R_{l,h} & -1 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{n_h}{n_l} & 1 - \frac{n_h}{n_l} \\ -\left(1 - \frac{n_h}{n_l}\right) & -\left(1 + \frac{n_h}{n_l}\right) \end{pmatrix} \quad (5.8.9)$$

$$\overline{\overline{V}}_{h,0} = \frac{i}{2} \left( 1 + \frac{n_0}{n_h} \right) \begin{pmatrix} 1 & R_{h,0} \\ -R_{h,0} & -1 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{n_0}{n_h} & 1 - \frac{n_0}{n_h} \\ -1 + \frac{n_0}{n_h} & -1 - \frac{n_0}{n_h} \end{pmatrix} \quad (5.8.10)$$

$$\overline{\overline{V}}_{h,l} \cdot \overline{\overline{V}}_{l,h} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{n_l}{n_h} + \frac{n_h}{n_l} & -\frac{n_h}{n_l} + \frac{n_l}{n_h} \\ -\frac{n_h}{n_l} + \frac{n_l}{n_h} & \frac{n_l}{n_h} + \frac{n_h}{n_l} \end{pmatrix} \quad (5.8.11)$$

La matrice (5.8.11) é del tipo:

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \quad (5.8.12)$$

che si può scrivere:

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8.13)$$

Tenendo conto che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.8.15)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.8.16)$$

si ha:

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}^N = 2^{N-1} \begin{pmatrix} a^N + b^N & a^N - b^N \\ a^N - b^N & a^N + b^N \end{pmatrix} \quad (5.8.17)$$

Ne segue:

$$\left(\overline{\overline{V_{h,l} \cdot V_{l,h}}}\right)^N = \left(-\frac{1}{2}\right)^N 2^{N-1} \begin{pmatrix} \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N + \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N & \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N - \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N \\ \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N - \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N & \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N + \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N \end{pmatrix} \quad (5.8.18)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \overline{\overline{V_{t,0}}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{n_h}{n_t} & 1 - \frac{n_h}{n_t} \\ 1 - \frac{n_h}{n_t} & 1 + \frac{n_h}{n_t} \end{pmatrix} \\ &\cdot (-1)^N \left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N + \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N & \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N - \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N \\ \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N - \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N & \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N + \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N \end{pmatrix} \cdot \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{n_0}{n_h} & 1 - \frac{n_0}{n_h} \\ -1 + \frac{n_0}{n_h} & -1 - \frac{n_0}{n_h} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.8.19)$$

ossia:

$$\overline{\overline{V}}_{t,0} = (-1)^N \left(\frac{i}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 + \frac{n_h}{n_t} & 1 - \frac{n_h}{n_t} \\ 1 - \frac{n_h}{n_t} & 1 + \frac{n_h}{n_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N + \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N \frac{n_0}{n_h} & \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N - \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N \frac{n_0}{n_h} \\ -\left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N + \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N \frac{n_0}{n_h} & -\left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N - \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N \frac{n_0}{n_h} \end{pmatrix} \quad (5.8.20)$$

$$\overline{\overline{V}}_{t,0} = (-1)^N \left(\frac{i}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{n_h}{n_t} \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N & \frac{n_h}{n_t} \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N - \frac{n_0}{n_h} \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N \\ -\frac{n_h}{n_t} \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N & -\frac{n_h}{n_t} \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N - \frac{n_0}{n_h} \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N \end{pmatrix} \quad (5.8.21)$$

$$\begin{pmatrix} E_t^+ e^{iktz_n} \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{V}}_{t,0} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ E_r \end{pmatrix} \quad (5.8.22)$$

Segue subito, dalla (5.7.27), che:

$$R = \frac{|V_{t,0}(2,1)|^2}{|V_{t,0}(2,2)|^2} = \frac{\left| \frac{n_0}{n_h} \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N - \frac{n_h}{n_t} \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N \right|^2}{\left| \frac{n_0}{n_h} \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^N + \frac{n_h}{n_t} \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^N \right|^2} \quad (5.8.23)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per  $\left| \frac{n_h}{n_0} \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^{-N} \right|^2$ , si ha:

$$R = \frac{\left| \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^{2N} - \frac{n_h^2}{n_0 n_t} \right|^2}{\left| \left(\frac{n_l}{n_h}\right)^{2N} + \frac{n_h^2}{n_0 n_t} \right|^2} \quad (5.8.24)$$

La formula (5.8.24) ci fornisce il valore massimo della riflettività di un mezzo multistrato come in figura (5.8.1).

Per determinare il coefficiente di trasmissione conviene valutare prima, dalla (5.7.28), il campo elettrico trasmesso. Quindi:

$$E_t^+ e^{iktz_n} = \left[ \frac{V_{t,0}(1,1)V_{t,0}(2,2) - V_{t,0}(1,2)V_{t,0}(2,1)}{V_{t,0}(2,2)} \right] E_0 =$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^N \left( \frac{i}{2} \right) \frac{- \left[ \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N \right]^2 + \left[ \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N - \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N \right]^2}{- \left[ \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N \right]} E_0 = \\
 &= (-1)^N \left( \frac{i}{2} \right) \frac{- \frac{n_h^2}{n_t^2} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^{2N} - \frac{n_0^2}{n_h^2} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^{2N} - 2 \frac{n_0}{n_t} + \frac{n_h^2}{n_t^2} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^{2N} + \frac{n_0^2}{n_h^2} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^{2N} - 2 \frac{n_0}{n_t}}{- \left[ \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N \right]} E_0 = \\
 &= \frac{(-1)^N 2i \frac{n_0}{n_t}}{\left[ \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N \right]} E_0 \tag{5.8.25}
 \end{aligned}$$

Il coefficiente di trasmissione é dunque:

$$T = \frac{n_t |E_t^+|^2}{n_0 |E_0|^2} = \frac{n_t}{n_0} \left| \frac{(-1)^N 2i \frac{n_0}{n_t}}{\left[ \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N \right]} \right|^2 = \frac{4 \frac{n_0}{n_t}}{\left| \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N \right|^2} \tag{5.8.26}$$

Dalla (5.8.23) e dalla (5.8.26) si ha:

$$\begin{aligned}
 R + T &= \frac{\left| \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N - \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N \right|^2}{\left| \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N + \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N \right|^2} + \frac{4 \frac{n_0}{n_t}}{\left| \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N \right|^2} = \\
 &= \frac{\frac{n_0^2}{n_h^2} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^{2N} + \frac{n_h^2}{n_t^2} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^{2N} - 2 \frac{n_0}{n_t} + 4 \frac{n_0}{n_t}}{\left| \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N \right|^2} = \frac{\frac{n_0^2}{n_h^2} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^{2N} + \frac{n_h^2}{n_t^2} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^{2N} + 2 \frac{n_0}{n_t}}{\left| \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N + \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N \right|^2} = \\
 &= \frac{\left| \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N + \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N \right|^2}{\left| \frac{n_0}{n_h} \left( \frac{n_l}{n_h} \right)^N + \frac{n_h}{n_t} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^N \right|^2} = 1 \tag{5.8.27}
 \end{aligned}$$

Determiniamo alcuni valori per i seguenti dati:

$$n_0 = 1, \quad n_h = 2.32, \quad n_l = 1.38, \quad n_t = 1.52, \quad \lambda_{0c} = 500 \text{ nm}$$

Per  $N = 2 \implies R=0.86808$

Per  $N = 4 \implies R=0.98245$

Per  $N = 8 \implies R=0.99972$

Per  $N \rightarrow \infty \implies R=1$

In figura (5.8.2) riportiamo il grafico della riflettività in funzione della lunghezza d'onda.

Programma Matlab 'LAYER.m'

```

delete(get(0,'children'));
clf;
clear all;
n0=1;%indice di rifrazione mezzo d'ingresso
nt=1.52;%indice di rifrazione mezzo trasmesso
L0c=500;%lunghezza d'onda centrale
nH=2.32;
nL=1.38;
N=8;
LH=0.25*L0c/2.32;
LL=0.25*L0c/1.38;
%____LAMINE MULTISTRATO AD ALTA RIFLETTIVITA'____
n=[nH, repmat([nL,nH], 1, N)];%indice di rifrazione strati (per N=4 sono 9 strati +...
i due mezzi esterni)
d=[LH, repmat([LL,LH], 1, N)];%larghezze strati
%i due vettori precedenti vanno usati per il grafico 5.8-2
%____FILTRI INTERFERENZIALI MULTISTRATO TIPO FABRY-PEROT____
LH2=0.5*L0c/2.32;%spessore lamina centrale
%n=[nL, repmat([nH,nL],1,N),nH, repmat([nL,nH],1, N), nL];%indice di rifrazione...
strati (per N=4 sono 9 strati + i due mezzi esterni)
%d=[LL, repmat([LH,LL],1,N),LH2, repmat([LL,LH],1, N),LL];%larghezze strati
%i due vettori precedenti vanno usati per il grafico 5.9-2
%_____
lambda0=300:.1:800;
nn=length(lambda0);
for ii=1:nn
%____STRATI INTERMEDI____
%Prodotto fra matrici V(m+1),m con m da 1 a n-1
Vmpum=1;
for m=1:length(n)-1;
k(m+1)=(2*pi/lambda0(ii))*n(m+1);
R=(1-n(m)/n(m+1))/(1+n(m)/n(m+1));
V=(1/2)*(1+n(m)/n(m+1))*[exp(i*k(m+1)*d(m+1)), R*exp(i*k(m+1)*d(m+1));...
R*exp(-i*k(m+1)*d(m+1)), exp(-i*k(m+1)*d(m+1))];
Vmpum =V*Vmpum;
end
%____PRIMA INTERFACCIA____
k1=(2*pi/lambda0(ii))*n(1);
R10=(1-n0/n(1))/(1+n0/n(1));
V10=(1/2)*(1+n0/n(1))*[exp(i*k1*d(1)), R10*exp(i*k1*d(1));...
R10*exp(-i*k1*d(1)), exp(-i*k1*d(1))];
%____ULTIMA INTERFACCIA____

```

```

Rtn=(1-n(length(n))/nt)/(1+n(length(n))/nt);
Vtn=(1/2)*(1+n(length(n))/nt)*[1, Rtn; Rtn, 1];
%-----MATRICE FINALE-----
Vt0=Vtn*Vmpum*V10;
%-----CAMPO ELETTRICO RIFLESSO, TRASMESSO E COEFFICIENTI DI...
RIFLESSIONE E DI TRASMISSIONE-----
ER=-Vt0(2,1)/Vt0(2,2);
Rifl(ii)=(abs(ER)).^2; %Coefficiente di riflessione
ET=Vt0(1,1)-Vt0(2,1)/Vt0(2,2)*Vt0(1,2);
Trasm(ii)=(nt/n0)*(abs(ET)).^2;%Coefficiente di trasmissione
end
%-----CALCOLO ANALITICO DELLA RIFLETTIVITA' E DELLA...
TRASMETTIVITA' IN CONDIZIONI DI LAMINE QUARTO D'ONDA-----
Riflmax=max(Rifl)%valore calcolato dal programma da confrontare con il valore...
analitico
Trasmmin=min(Trasm)%valore calcolato dal programma da confrontare con il...
valore analitico
NUM=(nL./nH).^2.*N)-(nH.^2./n0./nt);
DEN=(nL./nH).^2.*N)+(nH.^2./n0./nt);
Riflcalc=(NUM./DEN).^2
%Coefficiente di riflessione calcolato con la formula (5.8.24)
Trasmcalc=4.*n0./nt./((nH./nt).*(nH./nL).^N+(n0./nH).*(nL./nH).^N).^2;
%Coefficiente di trasmissione calcolato con la formula (5.8.26)
%-----GRAFICI-----
plot(lambda0, Rifl)
hold on
plot(lambda0, Trasm,'g')
hold on
plot(lambda0, Rifl+Trasm, 'r')
%-----ISTRUZIONI PER RIPORTARE I VALORI NUMERICI...
IN UN PROGRAMMA TEX-----
B=[lambda0;Rifl];
fid=fopen('pippo.tex','w');
fprintf(fid,'scrivi. \n');
fprintf(fid,'%5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f \n',B);
fclose(fid);

```

$N = 8, n_0 = 1, n_h = 2.32, n_l = 1.38, n_t = 1.52, \lambda_{0c} = 500 \text{ nm}$

Coefficiente di riflessione  $R$ : Linea continua

Coefficiente di trasmissione  $T$ : Linea tratteggiata

$$(R + T = 1)$$

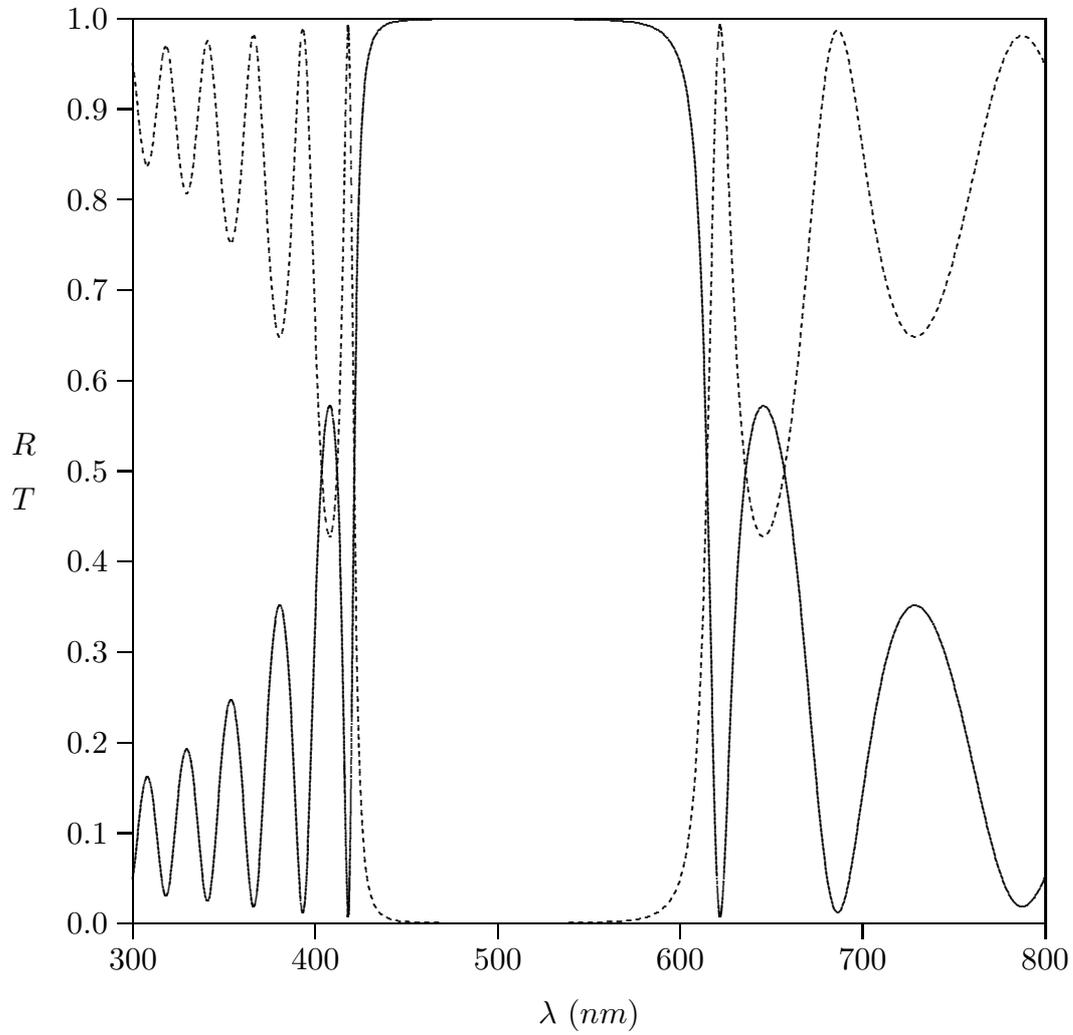


fig.5.8-2

**5.9 - Filtri interferenziali multistrato (tipo Fabry-Perot)**

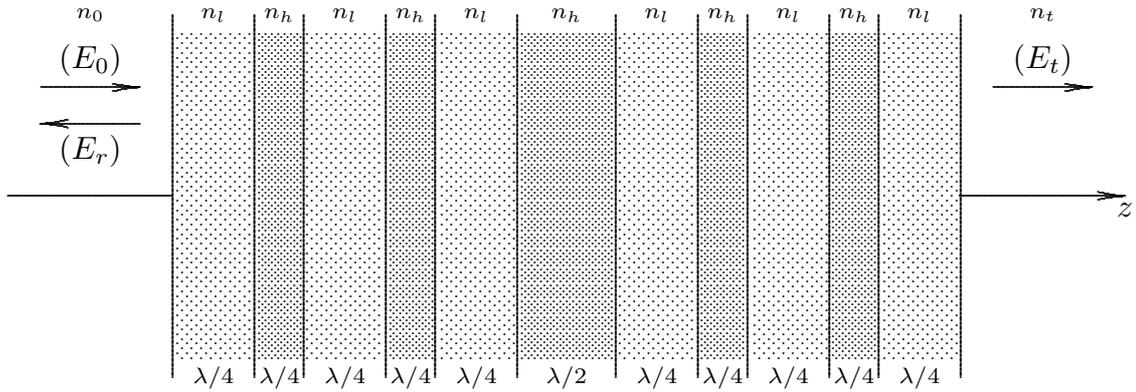


fig.5.9-1

$n_0 = 1, n_l = 1.38, n_h = 2.32, n_t = 1.52, \lambda_{0c} = 500 \text{ nm}$

Coefficiente di trasmissione  $T$

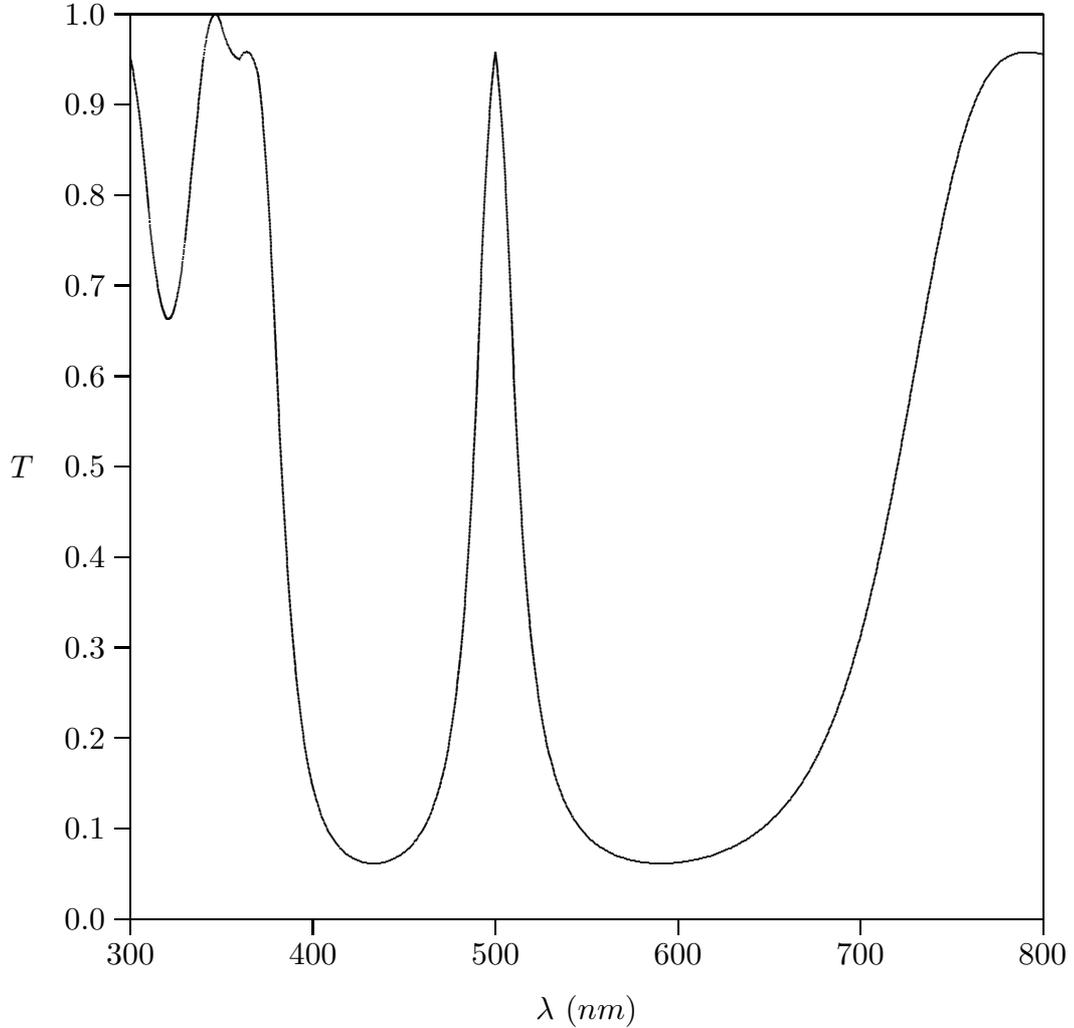


fig.5.9-2

Un filtro di tipo Fabry-Perot consiste di uno strato di dielettrico avente uno spessore di mezza lunghezza d'onda e circondato su entrambi i lati da superfici parzialmente riflettenti. Il risultato é un filtro che ha una curva di trasmissione come la fig.5.9-2.

## Appendice al Cap. 5

### Effetti biologici delle radiazioni a radiofrequenza<sup>1)</sup>

#### 5A.1 - Introduzione

**Una fra le piú importanti applicazioni della teoria delle lamine multistrato é quella della valutazione della potenza elettromagnetica a radiofrequenza assorbita dai vari strati di tessuti costituenti il corpo umano.**

Negli ultimi vent'anni, nel mondo intero, vi é stato un drammatico aumento dell' utilizzazione della tecnologia a radiofrequenza (RF), specialmente nelle comunicazioni personali. Infatti, a causa dell'introduzione dei sistemi wireless commerciali nel 1983, il servizio di telefonia cellulare é stato uno dei piú veloci segmenti di crescita dell'industria delle telecomunicazioni degli Stati Uniti d'America. Alla fine del 1984, il servizio di telefonia cellulare aveva circa 100000 utilizzatori, alla fine del 1991 gli utilizzatori di tale servizio erano circa due milioni. Oggi, soltanto negli Stati Uniti, vi sono piú di 100 milioni di utilizzatori di telefonia cellulare. A causa di questo drammatico aumento nell'utilizzazioni di dispositivi a radiofrequenza vi é un aumentato interesse sugli effetti biologici delle radiazioni a radiofrequenza emesse da dispositivi di comunicazione personale wireless; quindi é prudente effettuare uno studio sugli effetti sulla salute. Il gran numero di utilizzatori di telefoni cellulari porterá ad un'attenzione maggiore ai problemi di salute se esiste anche un minimo rischio. In questo capitolo si presenta una panoramica sugli effetti biologici della radiazione a radiofrequenza includendo regole e norme di sicurezza.

É spiegata l'interazione fra antenne e tessuti biologici quantificata dal tasso di assorbimento specifico (SAR). É anche presentata una discussione sui rischi della salute associati all'esposizione alle radiofrequenze.

Le onde elettromagnetiche sono distinguibili per la loro lunghezza d'onda ( $\lambda$ ) **nel vuoto** o la loro frequenza ( $f$ ) correlata a  $\lambda$  dalla relazione

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (5A.1.1)$$

La porzione a radiofrequenza dello spettro elettromagnetico é generalmente definita come quella parte dello spettro dove le onde elettromagnetiche hanno frequenze comprese fra 3  $KHz$  e 300  $GHz$ .

La regione delle microonde (da diverse centinaia di  $MHz$  a diverse  $GHz$ ) dello spettro é importante per i dispositivi commerciali utilizzati nelle telecomunicazioni.

Le onde elettromagnetiche possono dividersi in due categorie: radiazioni non ionizzanti e radiazioni ionizzanti. La ionizzazione é il processo per cui elettroni sono strappati da atomi e molecole. Questo processo puó produrre cambiamenti molecolari che danneggiano i tessuti biologici, includendo effetti sul DNA. Per questo si richiedono energie corrispondenti a raggi  $X$  e  $\gamma$  per poter ionizzare materiale biologico. **I livelli di energia associati a radiazioni RF e microonde non sono sufficientemente alti da**

---

<sup>1)</sup> Microwave Journal - June 2004 vol. 47, n.6, pag.22

causare la ionizzazione di atomi e per questo sono classificati come radiazioni non ionizzanti.

Spesso il termine radiazione é applicato alle radiazioni ionizzanti quali quelle associate agli impianti di potenza nucleari. Le radiazioni ionizzanti non dovrebbero essere confuse con quelle a piú basse energia non ionizzanti rispetto a possibili effetti biologici, poiché i loro meccanismi sono molto diversi. In questo capitolo ci si occupa di radiazioni non ionizzanti.

### 5A.2 - Effetti biologici e problemi di salute

Il meccanismo dell'interazione delle radiazioni elettromagnetiche non ionizzanti con i sistemi biologici é raggruppato in due classi principali: effetti termici ed effetti non termici (o atermici) a seconda di come viene depositato il calore o per interazione diretta del campo elettromagnetico con i tessuti.

**Gli effetti termici possono aversi nei tessuti come risultato dell' assorbimento di campi EM nei tessuti dissipativi.** Le radiofrequenze causano alla molecole d'acqua e agli ioni dissolti a vibrare causando assorbimento. Il contenuto d'acqua é allora un importante parametro nel determinare le proprietaá dielettriche dei tessuti biologici. Una equivalente conducibilitá di un tessuto  $\sigma$  é correlata alla parte immaginaria della permeabilitá dielettrica  $\epsilon''$  come:

$$\sigma = 2\pi f \epsilon'' [S/m] \quad (5A.2.1)$$

essendo  $f$  la frequenza delle operazioni.

Particolarmente nella banda delle microonde i tessuti aventi un grande contenuto d'acqua mostra una conducibilitá che aumenta con la frequenza. La potenza assorbita per unitá di volume ( $P_a$ ) é proporzionale al campo elettrico nel materiale ed alla sua conducibilitá:

$$P_a = \frac{1}{2} \sigma |\vec{E}|^2 [W/m^3] \quad (5A.2.2)$$

essendo  $|\vec{E}|$  l'ampiezza del campo elettrico.

L'energia a radiofrequenza effettivamente assorbita dai tessuti é quantificata utilizzando il tasso specifico di assorbimento **SAR, la potenza assorbita per unitá di massa del tessuto.**  $SAR$  é il parametro primario utilizzato quando si discute del rischio della salute dovuto alla potenza elettromagnetica assorbito dal corpo ed é definito da:

$$SAR = \frac{P_a}{\rho} = \frac{\sigma}{2\rho} |\vec{E}|^2 [W/Kg] \quad (5A.2.3)$$

essendo  $\rho$  la densitá del materiale in  $Kg/m^3$ .

Gli effetti non termici, d'altra parte, non sono causate dal calore, ma sono dovute all'interazione diretta del campo a radiofrequenza con molecole e componenti del tessuto; le particelle tendono ad orientarsi lungo il campo elettrico tale che la loro energia potenziale diventi minima. Effetti non termici non sono molto ben capiti e le loro conseguenze sulla salute umana sono ancora sotto investigazione.

Un effetto biologico accade quando una variazione biologica é misurata in risposta ad uno stimolo. Tuttavia, l'osservazione di un effetto biologico non necessariamente suggerisce l'esistenza di un rischio biologico.

Vi sono molti report pubblicati nella letteratura scientifica concernenti possibili effetti biologici risultanti da esposizione a radiazioni a radiofrequenza. Questi studi possono essere suddivisi in tre categorie: studio sulle cellule, studi sugli animali e studi epidemiologici. Gli studi sulle cellule sono focalizzati su singole cellule, su celle multiple, o organi che sono esposti a energia a radiofrequenza esposti in un luogo altamente controllato. Gli studi su animali osservano variazione sulla salute o effetti chimici in animali esposti a energie a radio frequenza. Studi epidemiologici esaminano un segmento della popolazione umana per ottenere una relazione fra effetti sulla salute ed esposizione a RF. Studi sulle cellule possono produrre risultati accurati, ma é difficile estrapolare conclusioni da risposte cellulari a effetti su animali. Studi sugli animali e studi epidemiologici sono soggetti a questioni circa il controllo durante tali studi e l'estrazione di specifiche relazioni causa-effetto.

Gli effetti termici dovuti a radiazione a RF sono stati studiati estensivamente in cellule ed animali, ed é stato noto per molti anni che l'esposizione a molti alti livelli di radiazione ad alta frequenza puó essere nocivo poiché la radiazione a RF puó riscaldare i tessuti biologici. Infatti il forno a microonde cuoce i cibi basandosi sugli effetti termici a RF. L'esposizione a campi a radiofrequenza molto intensi produce riscaldamento dei tessuti biologici, puó aumentare la temperatura del corpo. Fortunatamente, l'intensità della radiazione dei dispositivi portatili é molto bassa per causare tali effetti. Effetti non termici dovuti a bassi livelli di radiazione a radiofrequenza sono stati anche investigati negli ultimi vent'anni. Tuttavia evidenza di effetti biologici nocivi é ambigua perché i risultati di questi studi sono spesso inconsistenti o non riproducibili. Gli studi procedono regolarmente.

### 5A.3 - Sicurezza e regolamenti

Vi sono due parametri comunemente usati nei regolamenti sulle radiazioni *RF*: *SAR* e esposizione massima permessa (*MPE*). Come discusso nel paragrafo precedente, *SAR* é correlata all'assorbimento della radiazione *RF* nei tessuti biologici. *MPE* é il limite superiore della densità di potenza ( $mW/cm^2$ ) della radiazione *RF* alla quale possono essere esposti i tessuti biologici. Lo standard di esposizione alla *RF* é stato sviluppato da varie organizzazioni e da vari paesi. Questi standards raccomandano livelli di sicurezza nell'esposizione per il pubblico e per i lavoratori. I livelli di sicurezza raccomandati sono stati abbassati diverse volte negli anni recenti, ma non tutte le istituzioni scientifiche sono d'accordo sui livelli di sicurezza. Negli Stati Uniti, la Federal Communications Commission (FCC) ha adottato e utilizzato linee guida per la valutazione dell'esposizione alla *RF* sin dal 1985. Gli standards di esposizione sono largamente basati sugli effetti termici e sono derivati dall'assorbimento delle onde piane dall'uomo o da animali da laboratorio. Gli standard usualmente raccomandati dei limiti di esposizione alla *RF* sono due: livelli controllati e livelli non controllati. Per il caso di livelli controllati, i livelli di energia sono conosciuti e ognuno nell'area di esposizione é solo in presenza di campi elettromagnetici (EMF). Anche le persone si aspettano di ricevere istruzioni sulla sicurezza alle radiazioni e hanno vestiti protettivi o vi é occupazione limitata in termini di tempo e di distanza

dell'area. Per i livelli non controllati (o la popolazione in generale), i livelli di energia non sono conosciuti. La durata dell'esposizione può anche essere sostanzialmente differente in entrambi i gruppi. Le più popolari raccomandazioni sono le linee guida *ANSI/IEEE* e le *ICNIRP/CENELEC*.

Per ambienti non controllati lo standard *ANSI/IEEEC95.1 – 1992* suggerisce che: a) la densità di potenza ( $mW/cm^2$ ) nella banda delle frequenze delle microonde, da  $300 MHz$  a  $15 GHz$  deve restare sotto  $f/1500$  essendo  $f$  la frequenza delle operazioni in  $MHz$ ; b) il *SAR* mediato sull'intero corpo per trenta minuti o più dovrebbe rimanere sotto  $0.08 mW/g$ ; e c) il *SAR* mediato su un grammo di tessuto per 30 minuti o più deve rimanere sotto  $1.6mW/g$ . Questi livelli raccomandati di esposizione dovrebbe far alzare la temperatura del tessuto di non più di  $1^{\circ} C$ . Tuttavia, l'aumento di temperatura raramente raggiunge  $1^{\circ} C$  a causa della termoregolazione nel corpo umano e non presenta un inaccettabile carico termico, evitando effetti avversi sul funzionamento del corpo umano. Lo standard non è sviluppato per proteggere contro possibili rischi da esposizione di lunga durata a bassi livelli di radiazione *RF* in quanto tali rischi non sono ben capiti.

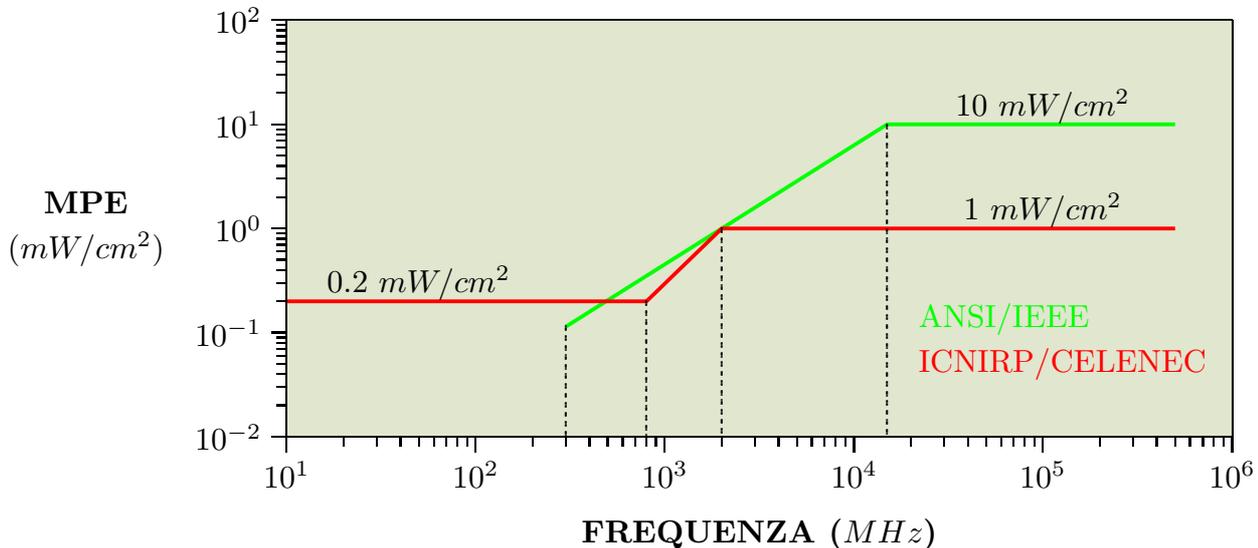


fig.5A.2-1

La figura 5A.2-1 mostra la massima possibile esposizione permessa in termini di densità di potenza incidente su un corpo umano per un ambiente non controllato nel range di frequenza fra  $100 MHz$  e  $300 GHz$  raccomandato dallo standard *ANSI/IEEE* e dallo standard europeo *ICNIRP/CELENEC*.

Misure, analisi computazionali utilizzando modelli della testa del corpo umano e altri studi di distribuzione *SAR* per telefonini portatili hanno mostrato che, in generale, il limite di  $16 mW/g$  può essere eccedente sotto normali condizioni di utilizzo del telefono.

#### 5A.4 - L'influenza dell'operatore umano sulla performance di un dispositivo portatile

Vi sono due ragioni per capire gli effetti dei campi elettromagnetici irradiati da telefonini portatili in presenza della testa e delle mani dell'utilizzatore. La prima ragione è

correlata al disegno dell'antenna ricevitore perché la presenza di un utilizzatore influenza le caratteristiche di radiazione di un telefono mobile. La presenza della mano e della testa può essere presa in conto ad uno stadio iniziale del disegno del telefono. La seconda ragione per capire gli effetti di interazione è per conformità con gli standard di sicurezza esaminando aspetti di dosimetria per valutare la *SAR* all'interno della testa ed all'interno della mano che sono poi comparati con i livelli permessi. Gli studi di interazione possono essere svolti sia per mezzo di calcoli computazionali sia mediante misurazioni. Vi sono diversi metodi computazionali per seguire studi numerici. Il metodo computazionale nel dominio del tempo alle differenze finite è spesso usato per tale processo numerico e la sua implementazione è brevemente discussa nel prossimo paragrafo.

### **5A.5 - Simulazione computazionale**

Il metodo numerico *FDTD* di simulazione computazionale...ed è largamente usato per analizzare l'accoppiamento dell'apparecchio di comunicazione mobile e la testa umana che si trova in prossimità. *FDTD* è basato direttamente sulla forma differenziale delle equazioni di Maxwell nel dominio del tempo e dei parametri costitutivi  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  che sono rispettivamente la permeabilità elettrica, magnetica e la conducibilità dipendenti dalle coordinate spaziali.

**TABELLA I-A** <sup>2)</sup>

**Permettività relativa  $\epsilon_r$ , Conducibilità elettrica  $\sigma$  (Siemens/m) e  
Densità  $\rho$  in  $Kg/m^3$  dei tessuti del corpo umano**

<i>Frequenza(MHz)</i>		<i>Pelle</i>	<i>Tessuto Adiposo Sottocutaneo (SAT)</i>	<i>Tessuto Mammario</i>	<i>Muscolo</i>	<i>Ossso</i>	<i>Nervi</i>	<i>Fluido Cerebro Spinale (CSF)</i>	<i>Cuore</i>
236	$\epsilon_r$	53.0	11.9	5.57	59.3	13.7	38.5	74.9	72.6
	$\sigma$	0.61	0.07	0.03	0.75	0.08	0.4	2.2	0.86
450	$\epsilon_r$	45.8	11.6	5.5	56.8	13.0	34.9	70.5	65.0
	$\sigma$	0.71	0.08	0.04	0.81	0.1	0.46	2.26	0.99
900	$\epsilon_r$	41.4	11.3	5.42	55.0	12.5	32.5	68.6	59.9
	$\sigma$	0.87	0.11	0.05	0.94	0.14	0.57	2.41	1.23
1500	$\epsilon_r$	39.4	11.1	5.23	54.0	12.0	31.3	67.6	57.2
	$\sigma$	1.07	0.16	0.08	1.19	0.23	0.74	2.72	1.57
1800	$\epsilon_r$	38.9	11.0	5.27	53.6	11.8	30.9	67.2	56.3
	$\sigma$	1.18	0.19	0.09	1.34	0.28	0.84	2.92	1.77
2450	$\epsilon_r$	38.0	10.8	5.15	52.7	11.4	30.2	66.2	54.8
	$\sigma$	1.46	0.27	0.14	1.74	0.39	1.09	3.46	2.26
5800	$\epsilon_r$	35.1	9.86	4.5	48.5	9.67	27.2	60.5	49.0
	$\sigma$	3.72	0.83	0.42	4.5	1.15	2.94	7.84	5.86
	$\rho$	1100	916	928	1041	1990	1038	1007	1060

**TABELLA I-B** <sup>2)</sup>

**Permettività relativa  $\epsilon_r$ , Conducibilità elettrica  $\sigma$  (Siemens/m) e  
Densità  $\rho$  in  $Kg/m^3$  dei tessuti del corpo umano**

<i>Frequenza(MHz)</i>		<i>Polmone</i>	<i>Timo</i>	<i>Fegato</i>	<i>Intestini</i>	<i>Rene</i>	<i>Milza</i>	<i>HTSL</i>	<i>BTSL</i>
236	$\epsilon_r$	41.8	63.4	55.8	70.6	74.6	69.9	48.3	59.8
	$\sigma$	0.48	0.83	0.58	1.29	0.97	0.93	0.82	0.85
450	$\epsilon_r$	38.8	61.2	50.4	63.3	65.0	62.1	43.5	56.7
	$\sigma$	0.54	0.89	0.67	1.41	1.13	1.05	0.87	0.94
900	$\epsilon_r$	36.7	59.7	46.8	58.7	58.7	57.2	41.5	55.0
	$\sigma$	0.66	1.04	0.85	1.62	1.39	1.27	0.97	1.05
1500	$\epsilon_r$	35.6	58.6	44.9	56.3	55.4	54.7	40.5	54.0
	$\sigma$	0.84	1.32	1.13	1.95	1.75	1.6	1.2	1.33
1800	$\epsilon_r$	35.2	58.1	44.2	55.5	54.4	53.9	40.0	53.3
	$\sigma$	0.96	1.5	1.29	2.14	1.95	1.78	1.40	1.52
2450	$\epsilon_r$	34.4	57.2	43.0	54.2	52.7	52.5	39.2	52.7
	$\sigma$	1.24	1.97	1.69	2.61	2.43	2.24	1.80	1.95
5800	$\epsilon_r$	31.1	52.1	38.1	48.6	46.8	46.9	35.3	48.2
	$\sigma$	3.45	5.72	4.64	6.16	5.9	5.67	5.27	6.00
	$\rho$	655	1026	1050	1044	1047	1054	1000	1000

<sup>2)</sup> Andreas Christ, Anja Klingenböck, Theodoros Samaras, Cristian Goiceanu, and Niels Kuster: The Dependence of Electromagnetic Far-Field Absorption on Body Tissue Composition in the Frequency Range From 300 MHz to 6 GHz - IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 54, No. 5, May 2006.

TABELLA II <sup>2)</sup>

Spessore dello strato di tessuto delle differenti regioni del corpo umano  
Tutte le dimensioni sono in millimetri

<i>Tessuto</i>	<i>Torace Frontale</i>		<i>Addome Frontale</i>		<i>Torace Posteriore</i>		<i>Addome Posteriore</i>		<i>Colonna Vertebrale</i>		<i>Arti</i>	
	<i>Bambino Adulto</i>		<i>Bambino Adulto</i>		<i>Bambino Adulto</i>		<i>Bambino Adulto</i>		<i>Bambino Adulto</i>		<i>Bambino Adulto</i>	
<i>Pelle</i>	0.6-1.0	0.8-2.6	0.6-0.8	1.0-2.6	0.4-1.0	1.4-2.6	0.4-1.0	1.4-2.6	0.4-1.0	1.4-2.6	0.4-1.0	0.6-2.0
<i>SAT</i>	0.0-16.0	1.4-23.2	0.0-16.2	1.6-22.2	0.0-10.8	0.6-15.0	0.0-13.2	2.4-21.2	0.0-13.2	2.4-21.2	0.0-13.8	0.4-20.6
<i>Tessuto Mammario</i>	---	0.0-30.0	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
<i>Muscolo</i>	0.0-30.0	0.0-30.0	0.0-30.0	0.0-30.0	0.0-30.0	0.0-30.0	0.0-30.0	0.0-30.0	---	---	0.0-30.0	0.0-30.0
<i>Ossso</i>	4.4-4.8	5.6-6.6	---	---	4.4-4.8	5.6-6.6	4.4-4.8	5.6-6.6	17.0-17.6	24.4-30.4	---	---
<i>CSF</i>	---	---	---	---	---	---	---	---	2.6-6.4	2.6-6.4	---	---

Di seguito riportiamo alcuni grafici rappresentanti le costanti dielettriche e le conducibilità di alcuni tessuti del corpo umano, in parte riportate nelle tabelle precedenti.<sup>3)</sup>

### Permittività elettrica relativa di alcuni tessuti del corpo umano in funzione della frequenza

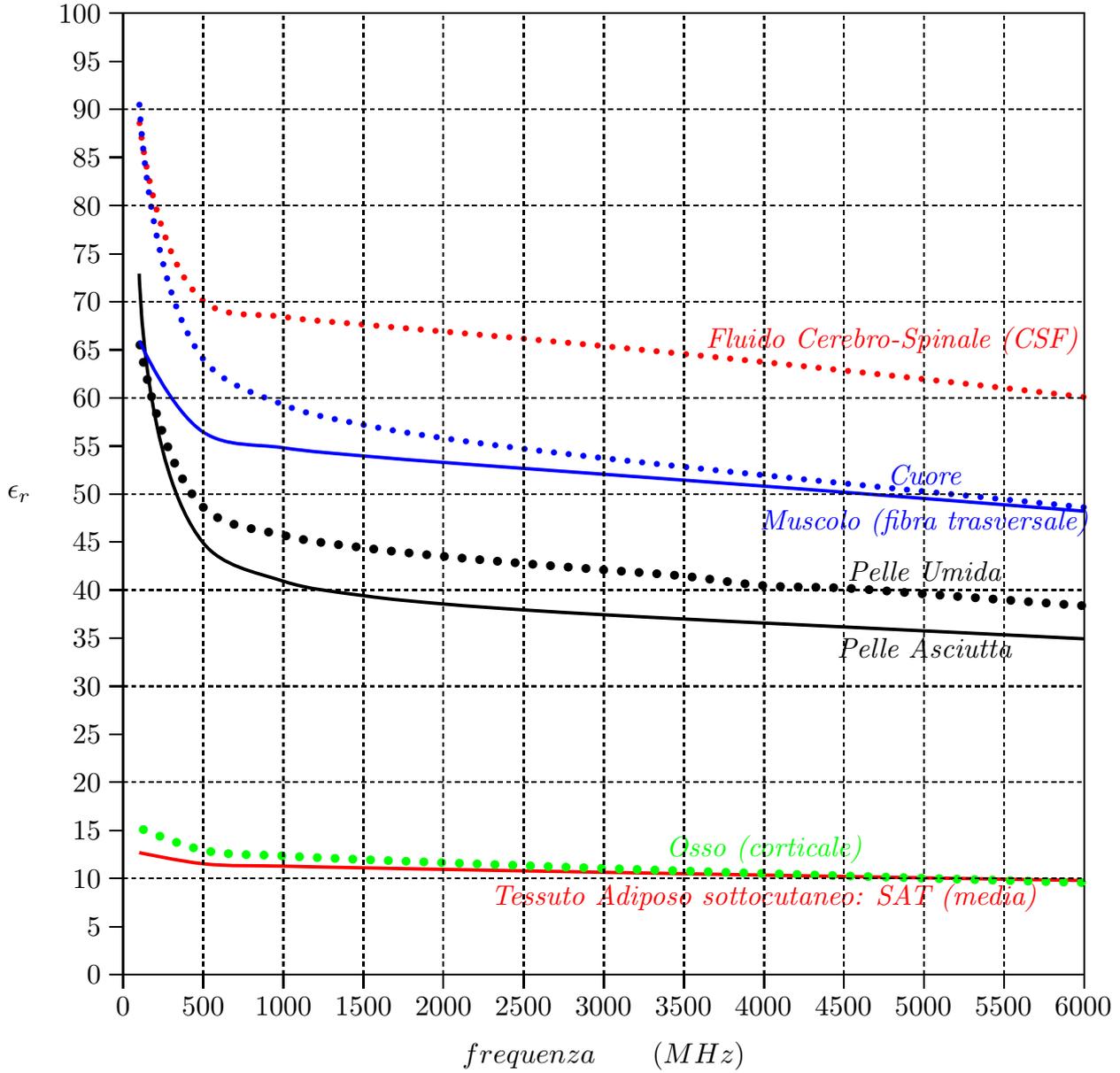


fig.5A.5-1

<sup>3)</sup> <http://www.fcc.gov/fcc-bin/dielc.sh>

### Conducibilità elettrica di alcuni tessuti del corpo umano in funzione della frequenza

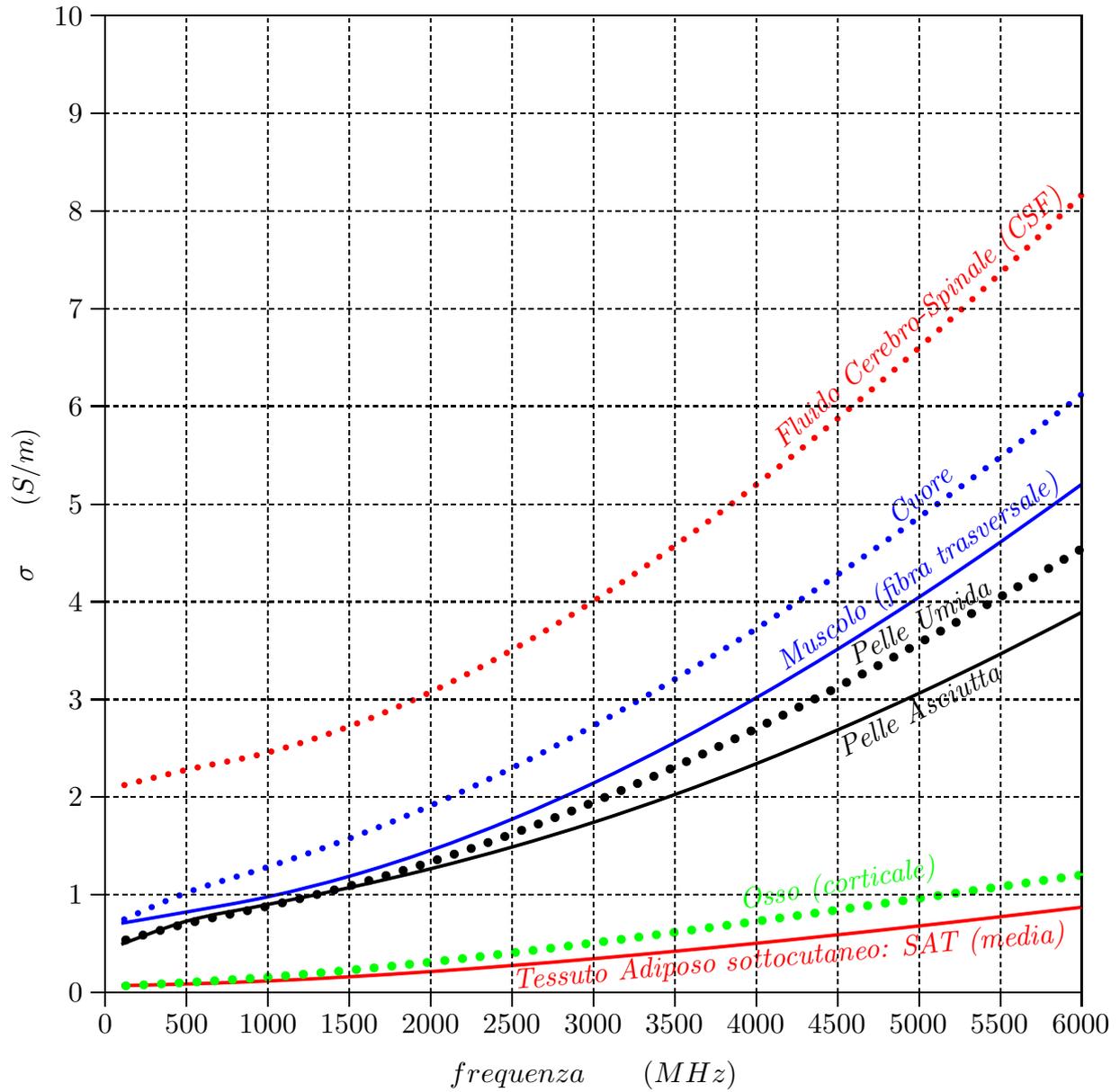


fig.5A.5-2

Coefficiente di attenuazione  $\alpha$  dell'ampiezza della radiazione elettromagnetica viaggiante in alcuni tessuti del corpo umano in funzione della frequenza

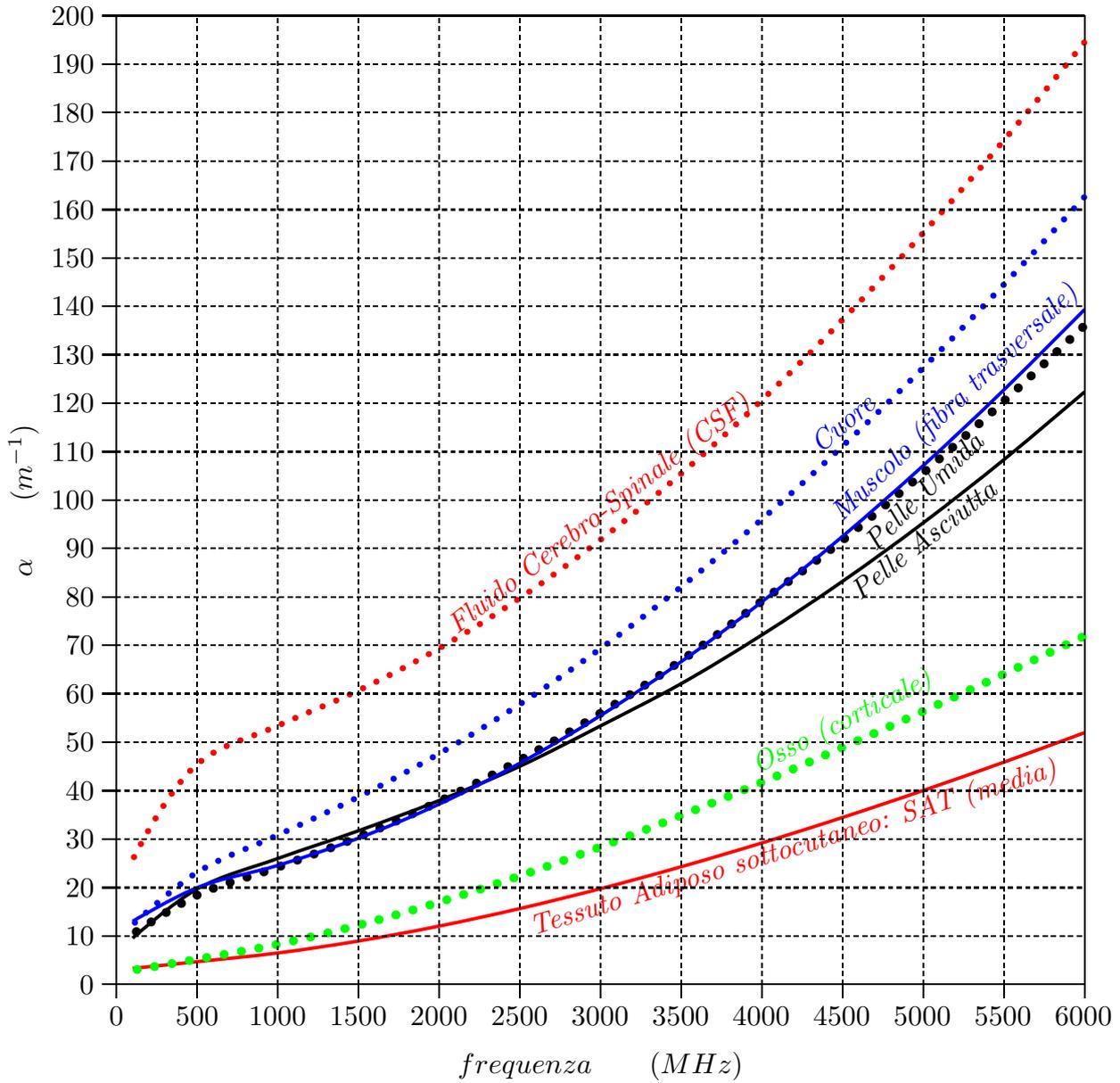


fig.5A.5-3

Profondità di penetrazione  $\delta = 1/\alpha$  dell'ampiezza della radiazione elettromagnetica viaggiante in alcuni tessuti del corpo umano in funzione della frequenza

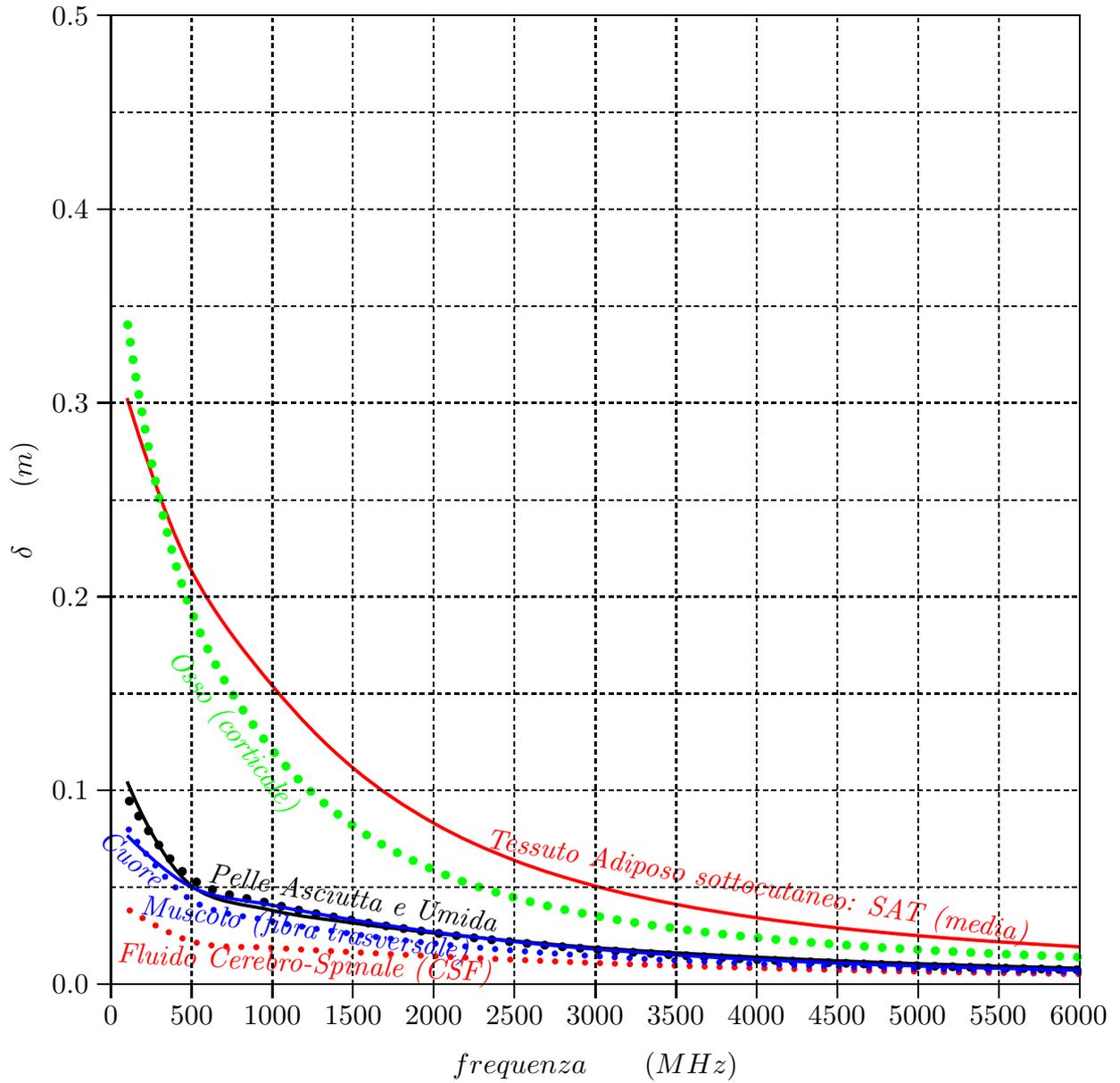
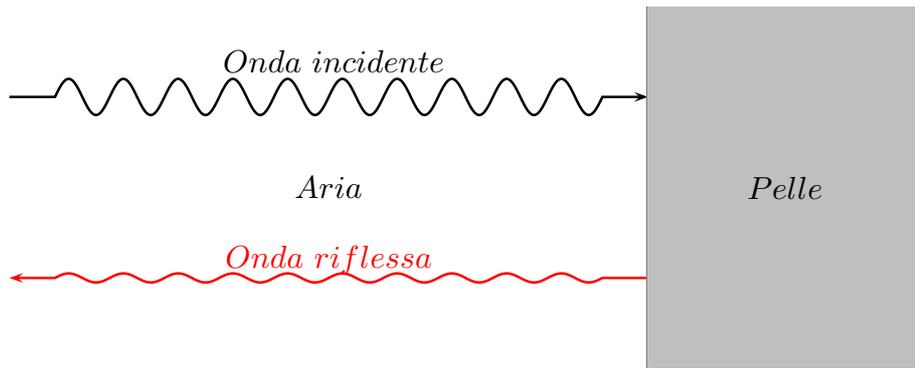


fig.5A.5-4



**Coefficiente di riflessione  $R$  della radiazione elettromagnetica viaggiante in aria e penetrante, con incidenza normale, sulla pelle asciutta (supposta infinitamente estesa) del corpo umano in funzione della frequenza**

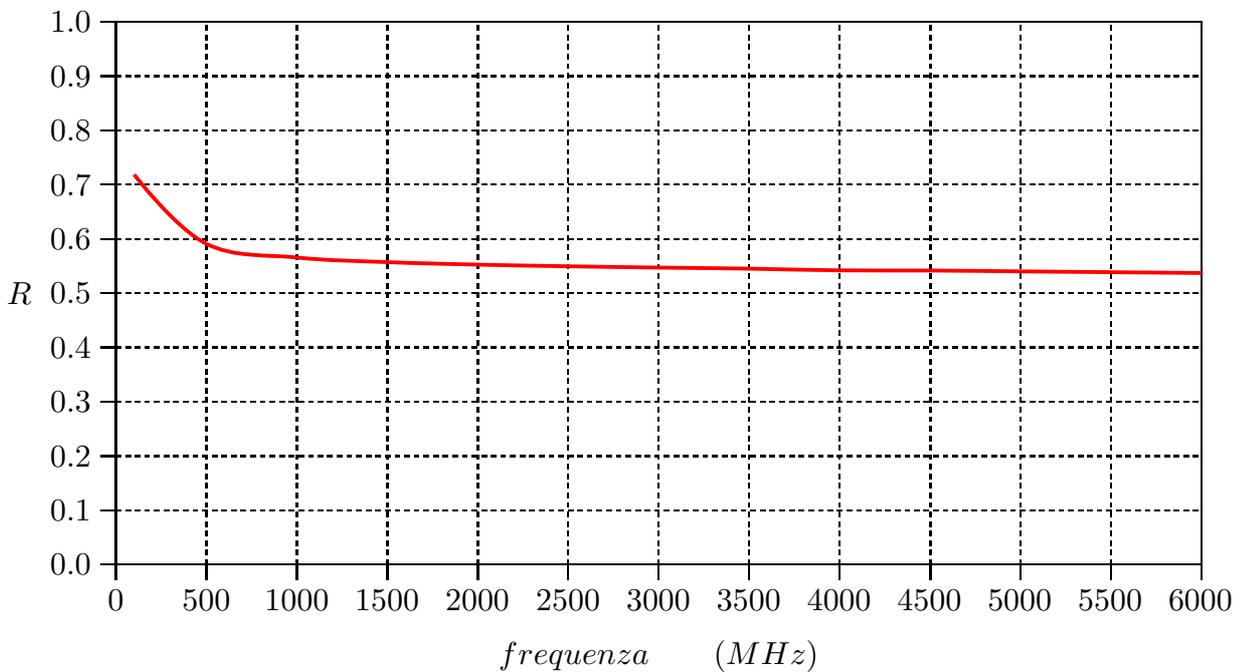
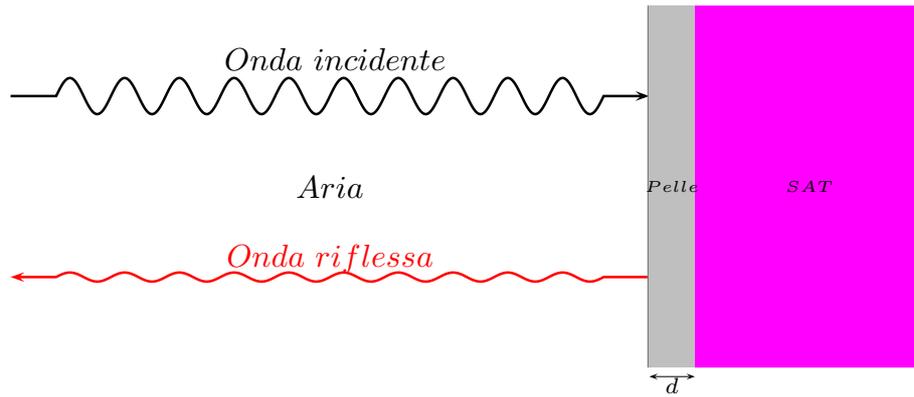


fig.5A.5-5



**Coefficiente di riflessione  $R$  e di trasmissione  $T$  della radiazione elettromagnetica viaggiante in aria e penetrante, con incidenza normale, sulla pelle asciutta ricoprente un tessuto adiposo sottocutaneo (supposto infinitamente esteso) del corpo umano in funzione della frequenza**

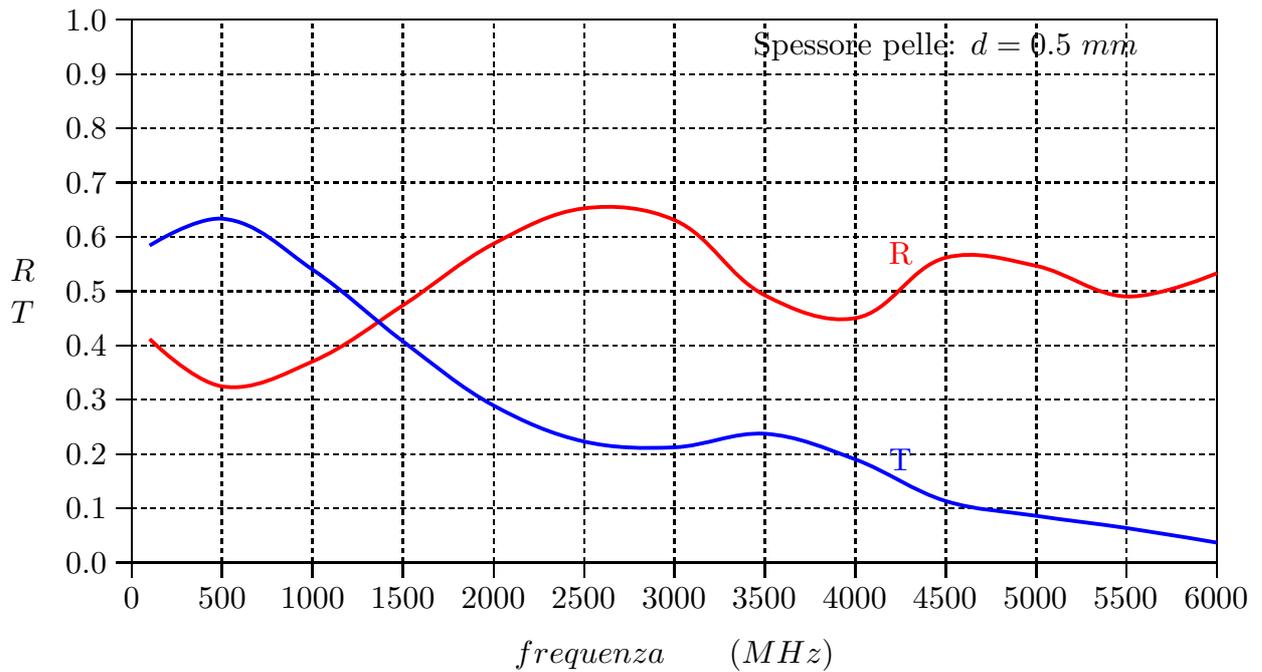
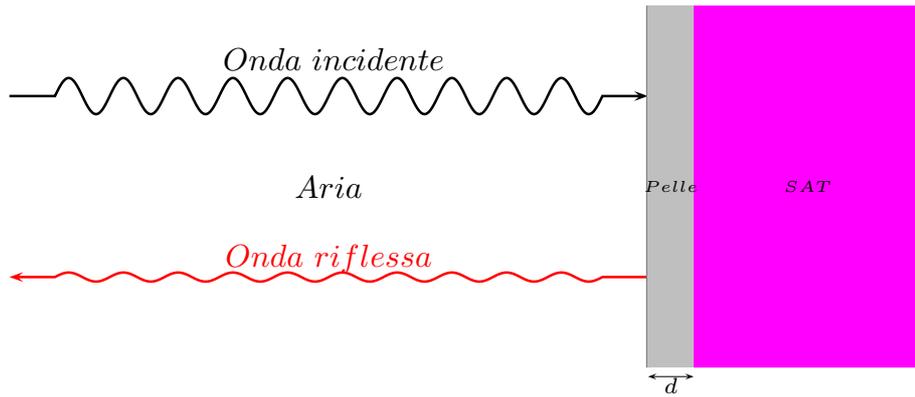


fig.5A.5-6



**Coefficiente di riflessione  $R$  e di trasmissione  $T$  della radiazione elettromagnetica viaggiante in aria e penetrante, con incidenza normale, sulla pelle asciutta ricoprente un tessuto adiposo sottocutaneo (supposto infinitamente esteso) del corpo umano in funzione della frequenza**

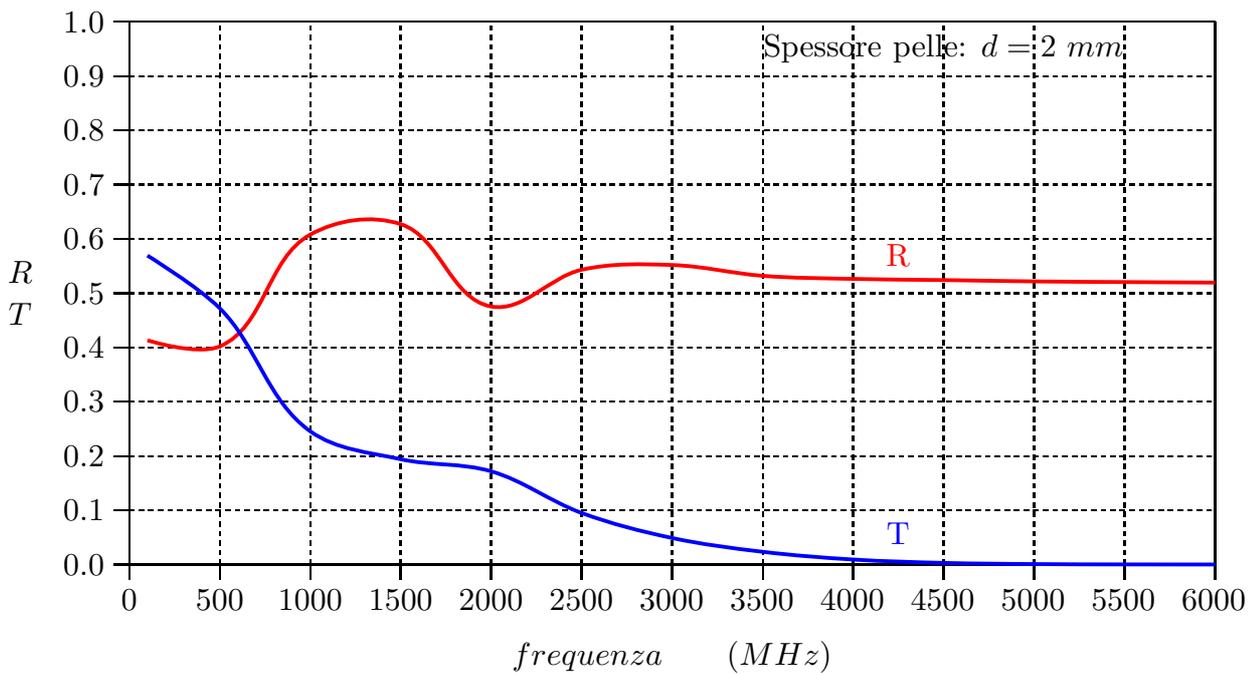
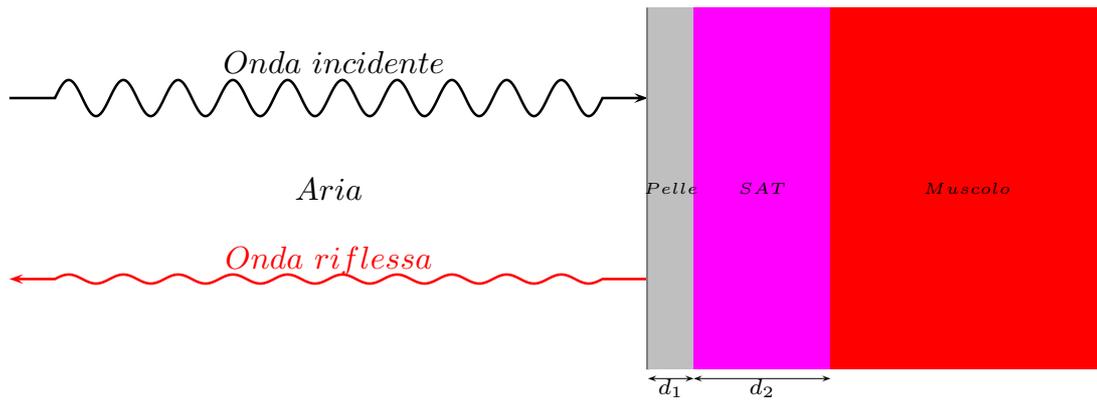
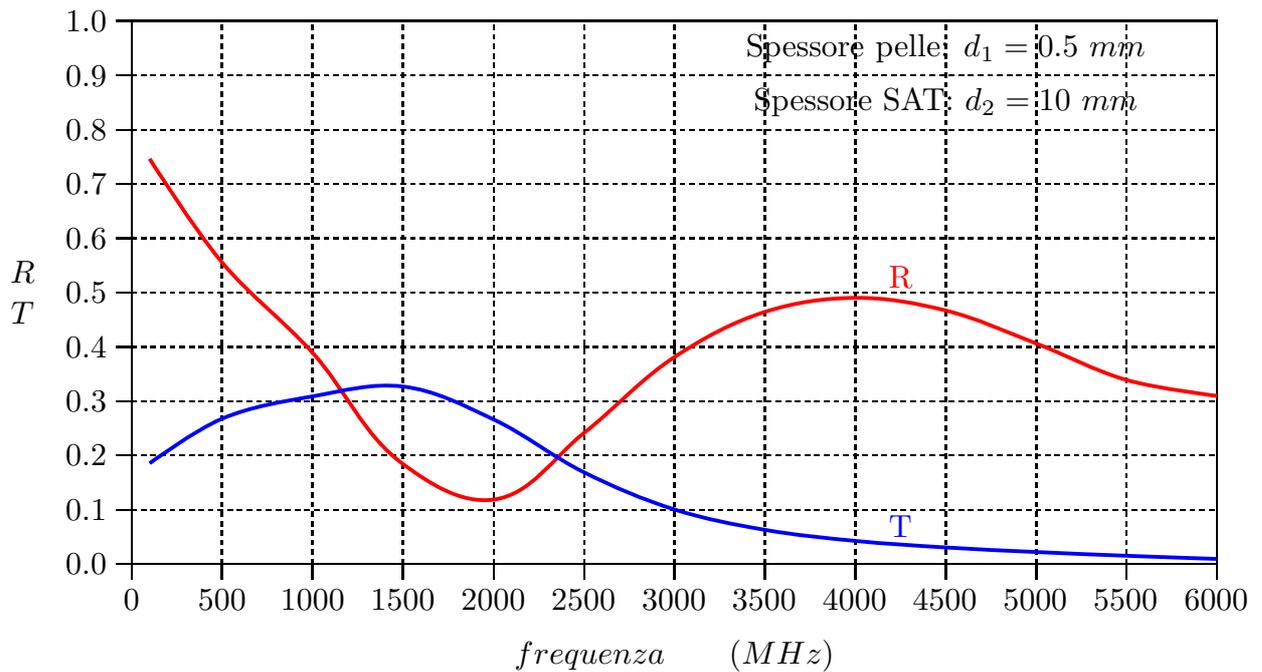
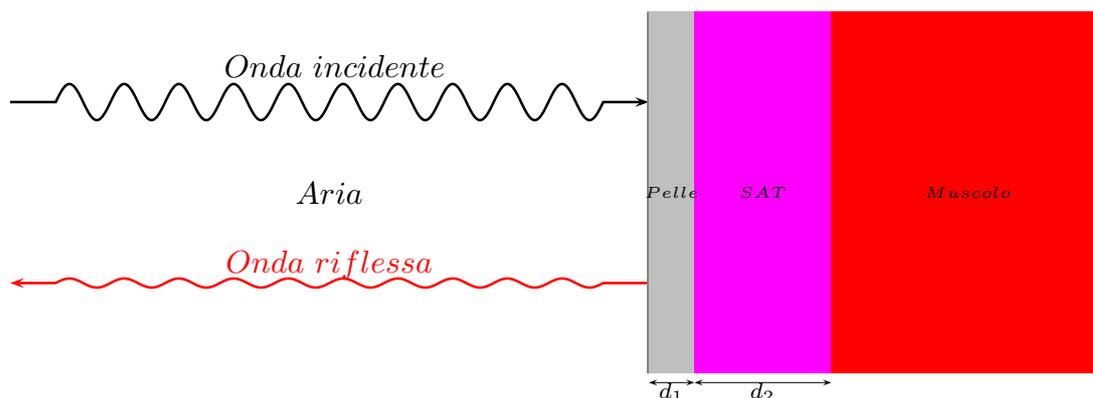


fig.5A.5-7



**Coefficiente di riflessione  $R$  e di trasmissione  $T$  della radiazione elettromagnetica viaggiante in aria e penetrante, con incidenza normale, sulla pelle asciutta ricoprente un tessuto adiposo sottocutaneo che a sua volta ricopre un tessuto muscolare (supposto infinitamente esteso) del corpo umano in funzione della frequenza**





**Coefficiente di riflessione  $R$  e di trasmissione  $T$  della radiazione elettromagnetica viaggiante in aria e penetrante, con incidenza normale, sulla pelle asciutta ricoprente un tessuto adiposo sottocutaneo che a sua volta ricopre un tessuto muscolare (supposto infinitamente esteso) del corpo umano in funzione della frequenza**

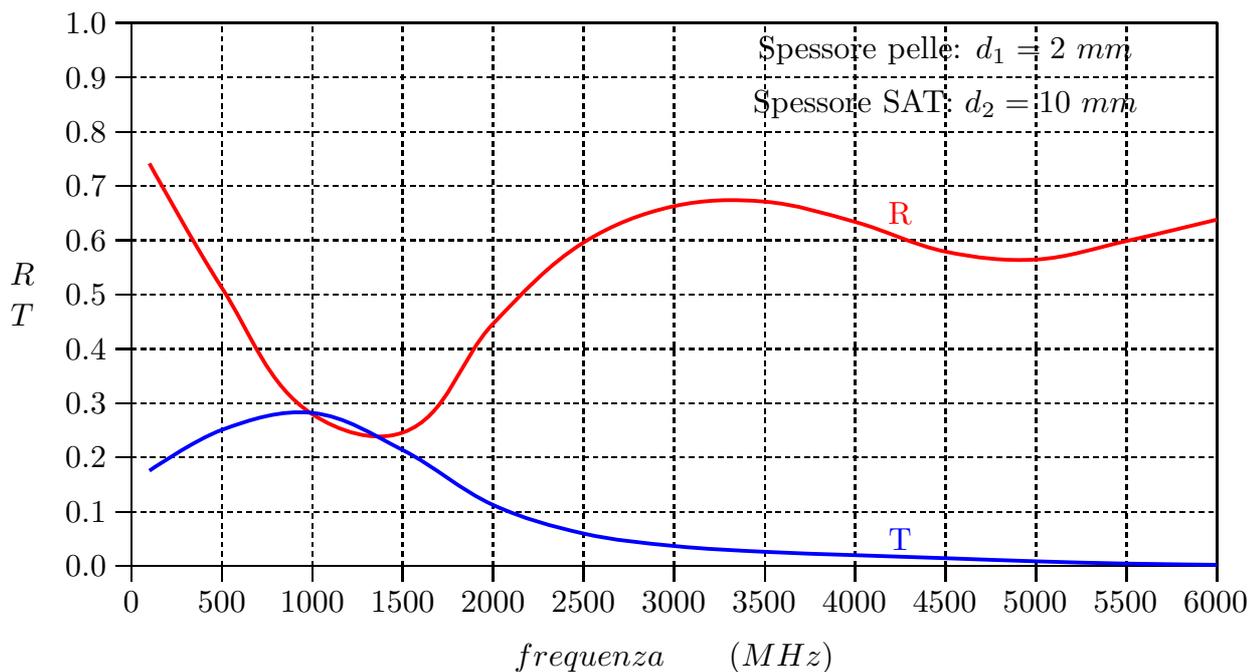
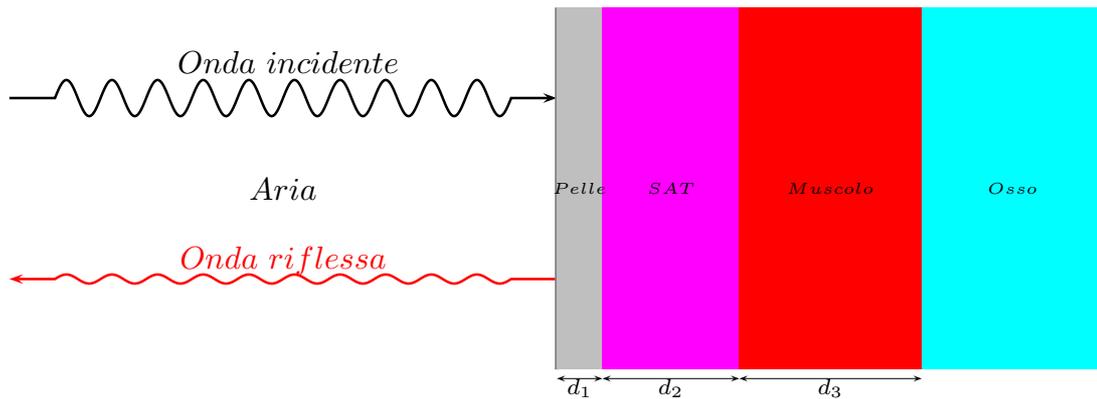


fig.5A.5-9



Coefficiente di riflessione  $R$  e di trasmissione  $T$  della radiazione elettromagnetica viaggiante in aria e penetrante, con incidenza normale, sulla pelle asciutta ricoprente un tessuto adiposo sottocutaneo che a sua volta ricopre un tessuto muscolare legato ad un osso (supposto infinitamente esteso) del corpo umano in funzione della frequenza

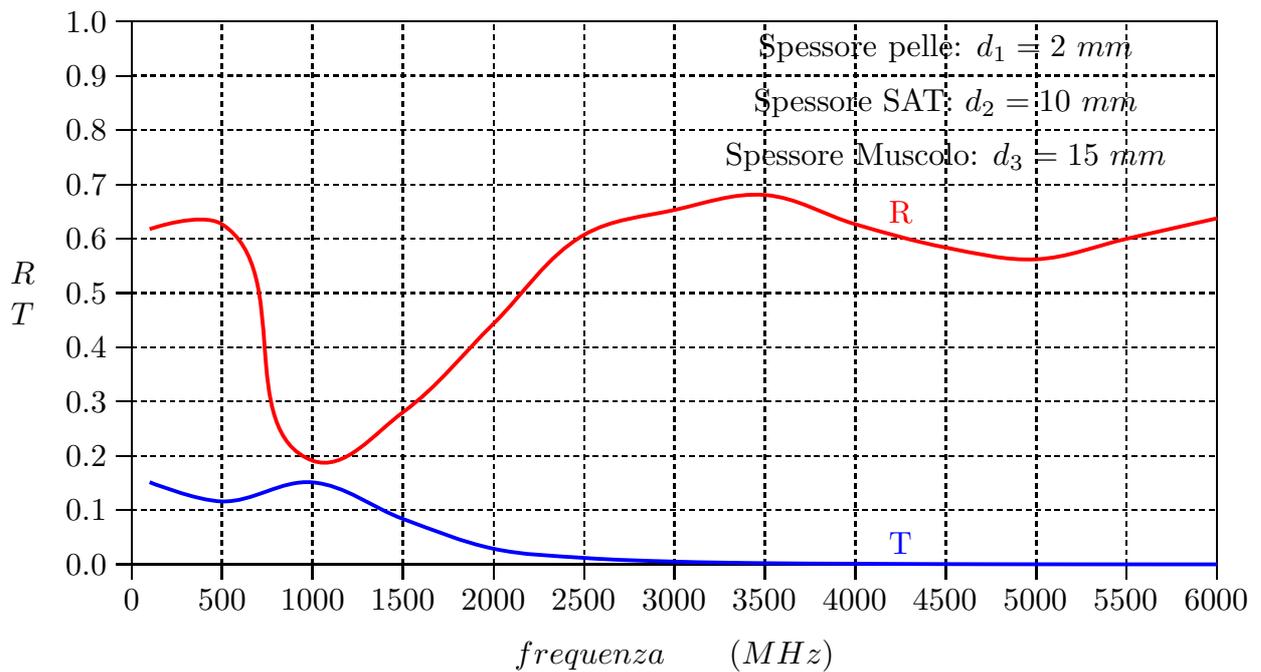
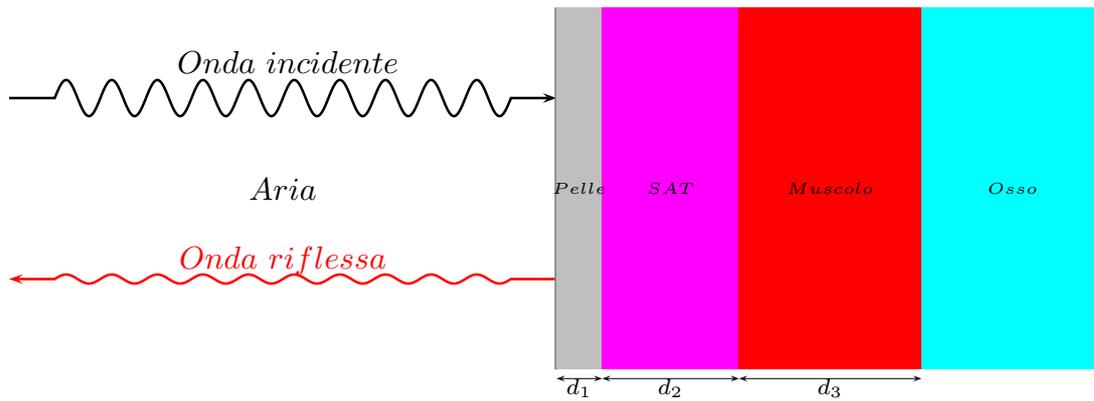


fig.5A.5-10



$SAR_{max}/10^{-6}/E_0^2$  sulla frontiera del tessuto osseo in funzione della frequenza

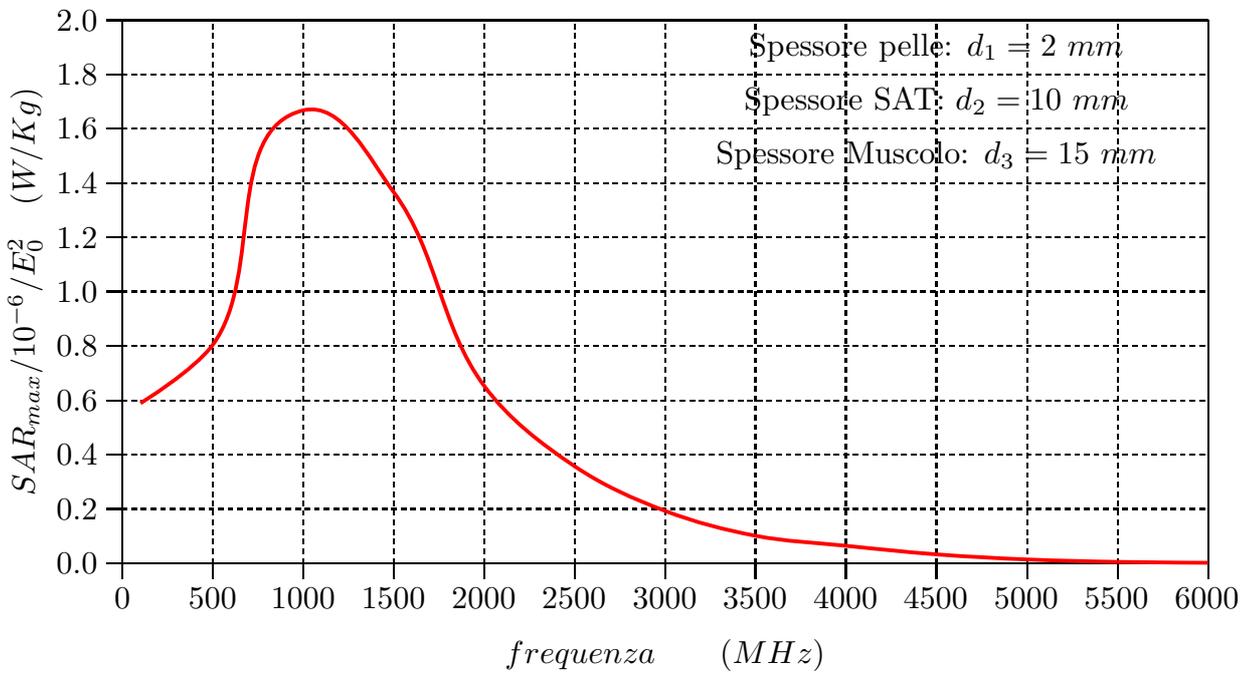


fig.5A.5-11

## Programma MATLAB

```
01 delete(get(0,'children'));
02 clf;
03 clear all;
04 epsilon0=8.854e-12;
05 mu0=4*pi*1e-7;
06 c=3e8;
07 %%% Aria-Pelle-SAT-Muscolo-Osso %%%
08 epsilonr1=1;
09 %%% I vettori epsilon2, epsilon3, epsilon4, epsilon5
10 %%% contengono i valori delle costanti dielettriche
11 %%% corrispondenti agli strati per i valori di frequenze: 100, 500,
12 %%% 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500, 5000, 5500, 6000 (MHz).
13 %epsilon2=[72.930298,44.915192,40.936264,39.433430,38.567902,37.951584,...
14 %          37.450352,37.005447,36.587315,36.179790,35.773590,35.363293,...
15 %          34.945808];
16 %epsilon3=[12.701341,11.540033,11.294223,11.118369,10.958710,10.805321,...
17 %          10.655297,10.507666,10.362132,10.218661,10.077327,9.938239,...
18 %          9.801509];
19 %epsilon4=[65.972076,56.445396,54.811028,53.963032,53.290001,52.668186,...
20 %          52.057980,51.444214,50.820927,50.186165,49.539925,48.883156,...
21 %          48.217293];
22 %epsilon5=[15.282458,12.945738,12.363424,11.981126,11.653735,11.351856,...
23 %          11.066273,10.793475,10.531953,10.280967,10.040088,9.809001,...
24 %          9.587420];
25 epsilon2=34.945808;
26 epsilon3=9.801509;
27 epsilon4=48.217293;
28 epsilon5=9.587420;
29 epsilon1=epsilon0*epsilon1;
30 epsilon2=epsilon0*epsilon2;
31 epsilon3=epsilon0*epsilon3;
32 epsilon4=epsilon0*epsilon4;
33 epsilon5=epsilon0*epsilon5;
34 mur=1;
35 mu=mu0*mur;
36 sigma1=0;
37 %%% I vettori sigma1, sigma2, sigma3, sigma4, sigma5
38 %%% contengono i valori delle costanti dielettriche
39 %%% corrispondenti agli strati per i valori di frequenze: 100, 500,
40 %%% 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500, 5000, 5500, 6000 (MHz).
41 %sigma2=[0.491243,0.728431,0.899814,1.071685,1.265463,1.487656,1.740625,...
42 %          2.024992,2.340467,2.686195,3.060949,3.463232,3.891352];
```

```

43 %sigma3=[0.068407,0.085340,0.116371,0.159292,0.212486,0.274519,0.344170,...
44 %      0.420387,0.502257,0.588976,0.679838,0.774215,0.871551];
45 %sigma4=[0.707594,0.822447,0.978189,1.188080,1.453851,1.773004,2.142127,...
46 %      2.557556,3.015586,3.512554,4.044887,4.609127,5.201952];
47 %sigma5=[0.064312,0.100466,0.155647,0.226363,0.310047,0.404078,0.506200,...
48 %      0.614521,0.727466,0.843729,0.962229,1.082074,1.202533]
49 sigma2=3.891352;
50 sigma3=0.871551;
51 sigma4=5.201952;
52 sigma5=1.202533;
53 %freq=[100e6,500e6,1000e6,1500e6,2000e6,2500e6,3000e6,3500e6,4000e6,...
54 %      4500e6,5000e6,5500e6,6000e6];
55 freq=6000e6;
56 omega=2*pi*freq;
57 lambda=c/freq;
58 d1=2e-3;
59 d2=170e-3;
60 d3=15e-3;
61 dsul1=d1/lambda;
62 dsul2=d2/lambda;
63 dsul3=d3/lambda;
64 alpha1=0;
65 alpha2=omega*sqrt(mu*epsilon/2*(sqrt(1+sigma2^2/epsilon^2/omega^2)-1));
66 alpha3=omega*sqrt(mu*epsilon/2*(sqrt(1+sigma3^2/epsilon^2/omega^2)-1));
67 alpha4=omega*sqrt(mu*epsilon/2*(sqrt(1+sigma4^2/epsilon^2/omega^2)-1));
68 alpha5=omega*sqrt(mu*epsilon/2*(sqrt(1+sigma5^2/epsilon^2/omega^2)-1));
69 beta1=omega/3e8*sqrt(epsilon*r1);
70 beta2=omega*sqrt(mu*epsilon/2*(sqrt(1+sigma2^2/epsilon^2/omega^2)+1));
71 beta3=omega*sqrt(mu*epsilon/2*(sqrt(1+sigma3^2/epsilon^2/omega^2)+1));
72 beta4=omega*sqrt(mu*epsilon/2*(sqrt(1+sigma4^2/epsilon^2/omega^2)+1));
73 beta5=omega*sqrt(mu*epsilon/2*(sqrt(1+sigma5^2/epsilon^2/omega^2)+1));
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
74 %Formule dirette
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
75 k1=beta1+i*alpha1;
76 k2=beta2+i*alpha2;
77 k3=beta3+i*alpha3;
78 k4=beta4+i*alpha4;
79 k5=beta5+i*alpha5;
80 R54=(1-k4/k5)/(1+k4/k5);
81 R43=(1-k3/k4)/(1+k3/k4);
82 R32=(1-k2/k3)/(1+k2/k3);
83 R21=(1-k1/k2)/(1+k1/k2);
84 V54=(1/2)*(1+k4/k5)*[1, R54; R54, 1];

```

```
85 V43=(1/2)*(1+k3/k4)*[exp(i*k4*(d3)), R43*exp(i*k4*(d3));R43*exp(-i*k4*(d3)),
    exp(-i*k4*(d3))];
86 V32=(1/2)*(1+k2/k3)*[exp(i*k3*(d2)), R32*exp(i*k3*(d2));R32*exp(-i*k3*(d2)),
    exp(-i*k3*(d2))];
87 V21=(1/2)*(1+k1/k2)*[exp(i*k2*d1), R21*exp(i*k2*d1);R21*exp(-i*k2*d1),
    exp(-i*k2*d1)];
88 Vt0=V54*V43*V32*V21;
89 ER=-Vt0(2,1)/Vt0(2,2);
90 Rifl=ER.*conj(ER);
91 ET=Vt0(1,1)-Vt0(2,1)/Vt0(2,2)*Vt0(1,2);
92 Trasm=(beta5/beta1)*exp(-2*alpha5*(d1+d2+d3))*ET*conj(ET);
93 ro=1990;
94 Campo=ET*conj(ET)*exp(-2*alpha5*(d1+d2+d3));
95 SAR=0.5*sigma5*Campo/ro
```

---

Fine del Cap.5