

Cap. 4

Riflessione totale - Riflessione e rifrazione in un mezzo conduttore

4.1 - Riflessione totale

Consideriamo due mezzi dielettrici perfetti. Un'onda elettromagnetica piana, viaggiante nel mezzo (1), incide sulla superficie di separazione fra il mezzo (1) ed il mezzo (2). Sia θ_0 l'angolo di incidenza rispetto alla normale orientata, come al solito dal mezzo (2) al mezzo (1). Sia ϵ_{r_1} la costante dielettrica relativa del mezzo (1) e ϵ_{r_2} la costante dielettrica relativa del mezzo (2). La legge di Snell si scrive:

$$\sqrt{\epsilon_{r_1}} \sin \theta_0 = \sqrt{\epsilon_{r_2}} \sin \theta_2 \quad (4.1.1)$$

ossia:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \sin \theta_0 \quad (4.1.2)$$

Consideriamo adesso il caso in cui la costante dielettrica relativa del mezzo (1) ϵ_{r_1} sia maggiore della costante dielettrica relativa del mezzo (2) ϵ_{r_2} . Sia, cioè $\epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_2}$ ossia:

$$\frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} > 1 \quad (4.1.3)$$

Allora, dalla (4.1.2) risulta che **se la radiazione passa da un mezzo piú rifrangente ad un mezzo meno rifrangente (per es: acqua-aria), il raggio trasmesso si allontana dalla normale, risultando, quindi $\theta_2 > \theta_0$.**

Tuttavia all'aumentare dell'angolo θ_0 , si arriverá ad un certo valore di esso, diciamo θ_L , per cui $\sin \theta_2 = 1$.

θ_L prende il nome di **angolo limite**.

Per $\theta_0 > \theta_L$ risulterebbe $\sin \theta_2 > 1$; in questo caso l'onda viene totalmente riflessa, come dimostreremo, ed il fenomeno prende il nome di **riflessione totale**.

L'angolo limite é dato dalla relazione:

$$\frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \sin \theta_L = 1 \quad (\epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_2}) \quad (4.1.4)$$

$$\sin \theta_L = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} \quad (\epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_2}) \quad (4.1.5)$$

$\theta_L = \arcsin \left(\frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} \right) \quad (\epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_2}) \quad (4.1.6)$

Per un sistema acqua-aria si ha: per la radiofrequenza $\theta_L = 6^{\circ}.38$, per la luce $\theta_L = 48^{\circ}.6$.

Anche se può sembrare incredibile, il fatto che $\sin \theta_2 > 1$, conduce a fatti fisici importanti ed ampiamente provati sperimentalmente.

Sia $\sin \theta_2 > 1$, ossia $\theta_0 > \theta_L$.

Consideriamo la (3.2.13):

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_0} \quad (4.1.7)$$

Dalla (4.1.7) si ha che per $\theta_0 > \theta_L$ e per $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$ l'espressione dentro radice nella è negativa; si ha pertanto:

$$\cos \theta_2 = i \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} \sqrt{\epsilon_{r1} \sin^2 \theta_0 - \epsilon_{r2}} = i \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_0 - 1} \quad (4.1.8)$$

Consideriamo il seguente sistema di riferimento:

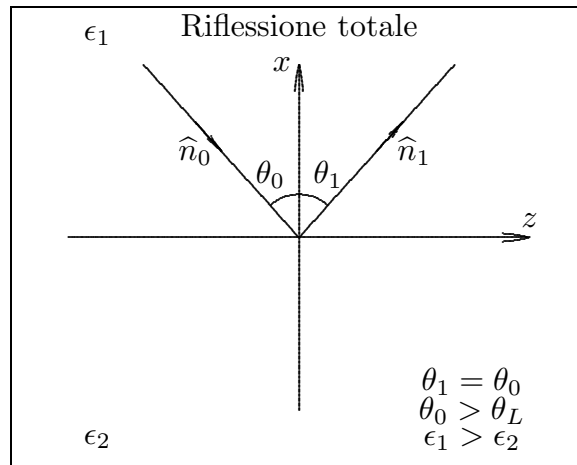


fig.4.1-1

L'onda trasmessa ha la seguente espressione:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{ik_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad (4.1.9)$$

$$\hat{n}_2 \cdot \vec{r} = n_{2x}x + n_{2z}z = x(-\cos \theta_2) + z \sin \theta_2 \quad (4.1.10)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{i\omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} (-x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2)} e^{-i\omega t} \quad (4.1.11)$$

Si ha ancora:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{i\omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \left[-xi \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_0 - 1} + z \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} \sin \theta_0 \right]} e^{-i\omega t} \quad (4.1.12)$$

che é della forma:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{\beta_1 x + i\alpha z} e^{-i\omega t} \quad (4.1.13)$$

essendo:

$$\alpha = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_0 \quad (\mu_2 \simeq \mu_1) \quad (4.1.14)$$

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (4.1.15)$$

Ricordiamo che: $\omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} = \frac{\omega}{v_{f1}} = \frac{2\pi}{\lambda_1}$.

La (4.1.13) rappresenta un'onda che si propaga lungo la direzione z e cioé lungo la superficie di separazione fra i due mezzi; si ha cioé **un'onda superficiale**.

4.2 - Onde superficiali

Abbiamo visto che l'espressione del campo trasmesso nel mezzo 2, quando l'angolo di incidenza é maggiore dell'angolo limite, si può scrivere:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{\beta_1 x + i\alpha z} e^{-i\omega t} \quad (x < 0) \quad (\theta_0 > \theta_L) \quad (4.2.1)$$

Calcoliamo, ora, il vettore di Poynting complesso associato all'onda trasmessa:

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2} \left(\vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \right) \quad (4.2.2)$$

Consideriamo il caso di polarizzazione perpendicolare per il campo elettrico. Si ha, allora, omettendo il termine $e^{-i\omega t}$:

$$\vec{E}_t = \hat{y} T'_\perp E_{0\perp} e^{\beta_1 x} e^{i\alpha z} \quad (4.2.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_t &= \frac{k_2}{\omega \mu_2} \hat{n}_2 \times \vec{E}_t = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (-\hat{x} \cos \theta_2 + \hat{z} \sin \theta_2) \times \vec{E}_t = \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (-\hat{x} \cos \theta_2 + \hat{z} \sin \theta_2) \times \hat{y} T'_\perp E_{0\perp} e^{\beta_1 x} e^{i\alpha z} = \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (-\hat{z} \cos \theta_2 - \hat{x} \sin \theta_2) T'_\perp E_{0\perp} e^{\beta_1 x} e^{i\alpha z} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

essendo T'_\perp il coefficiente di Fresnel.

Si ha, quindi:

$$\begin{aligned} \vec{S}_c &= \frac{1}{2} (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\hat{y} T'_\perp E_{0\perp} e^{\beta_1 x} e^{i\alpha z} \times \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (-\hat{z} \cos \theta_2 - \hat{x} \sin \theta_2)^* T'^*_\perp E^*_{0\perp} e^{\beta_1 x} e^{-i\alpha z} \right] \\ \vec{S}_c &= \frac{1}{2} \left\{ [-\hat{x} (\cos \theta_2)^* + \hat{z} (\sin \theta_2)^*] \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} |T'_\perp|^2 |E_{0\perp}|^2 e^{2\beta_1 x} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Ricordiamo che:

$$\cos \theta_2 = i \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2 \theta_0 - 1} \quad (4.2.6)$$

$$(\cos \theta_2)^* = -i \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2 \theta_0 - 1} \quad (4.2.7)$$

$$\sin \theta_2 = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_0 \quad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned} \vec{S}_c = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_0 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} |T'_\perp|^2 |E_{0\perp}|^2 e^{2\beta_1 x} \hat{z} + \\ & + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \sin^2 \theta_0 - 1 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} |T'_\perp|^2 |E_{0\perp}|^2 e^{2\beta_1 x} \hat{x} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Non vi é quindi nessuna potenza reale trasferita attraverso l'interfaccia in direzione ortogonale alla superficie di separazione.

Analogamente si puó calcolare \vec{S}_c nel caso di polarizzazione parallela.

Dalla (4.2.1) si deduce che l'onda superficiale viaggiante nel mezzo 2 lungo l'interfaccia é un'onda che viaggia con una velocità di fase:

$$v_{f_2} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_0} \quad (4.2.10)$$

Poiché $\theta_0 > \theta_L$ e $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$ ne segue che $\sqrt{\epsilon_{r1} \mu_{r1}} \sin \theta_0$ é $> \sqrt{\epsilon_{r2} \mu_{r2}}$, quindi v_{f_2} é piú piccola di quella di un'onda ordinaria nello stesso mezzo.

Quest'onda si attenua rapidamente nella direzione normale all'interfaccia ed é praticamente circoscritta sulla superficie. Prende, quindi, il nome di **onda superficiale lenta**.

L'analisi delle onde superficiali che abbiamo fatto non ci spiega la provenienza di questa energia. La difficoltà nasce dal fatto che stiamo utilizzando campi ad estensione infinita. Quando si tiene conto delle dimensioni finite del fascio incidente, questo fatto viene spiegato. Tuttavia l'analisi fatta spiega molto bene alcuni risultati sperimentali.

É importante calcolare la profondità di penetrazione dell'onda superficiale nel mezzo meno rifrangente in funzione dell'angolo di incidenza. Per questo riconsideriamo la formula (4.1.8) del coefficiente di attenuazione lungo l'asse x :

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{\omega}{c} n_1 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} \quad (\theta_L < \theta_0 < 90^\circ) \quad (4.2.11)$$

essendo λ_0 la lunghezza d'onda, relativa al vuoto, dell'onda incidente.

La profondità di penetrazione dell'onda superficiale nel mezzo meno rifrangente é:

$$\delta = \frac{1}{\beta_1} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{1}{n_1 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}} \quad (4.2.12)$$

che in unità di lunghezza d'onda diventa:

$$\frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi n_1 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}} \quad (\theta_L < \theta_0 < 90^\circ) \quad (4.2.13)$$

Supponiamo che l'onda elettromagnetica incida sulla superficie di separazione fra il vetro e l'aria (nel caso della luce) o equivalentemente fra la paraffina e l'aria (nel caso di microonde). Si ha allora, per esempio:

$$n_1 = 1.5, n_2 = 1, \theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.5}\right) \simeq 0.7297 \text{ rad} \simeq 41^{\circ}.81 \quad (4.2.14)$$

**Profondità di penetrazione dell'onda superficiale
nel mezzo meno rifrangente**

$\theta_L = 41^{\circ}.81, n_1 = 1.5, n_2 = 1$

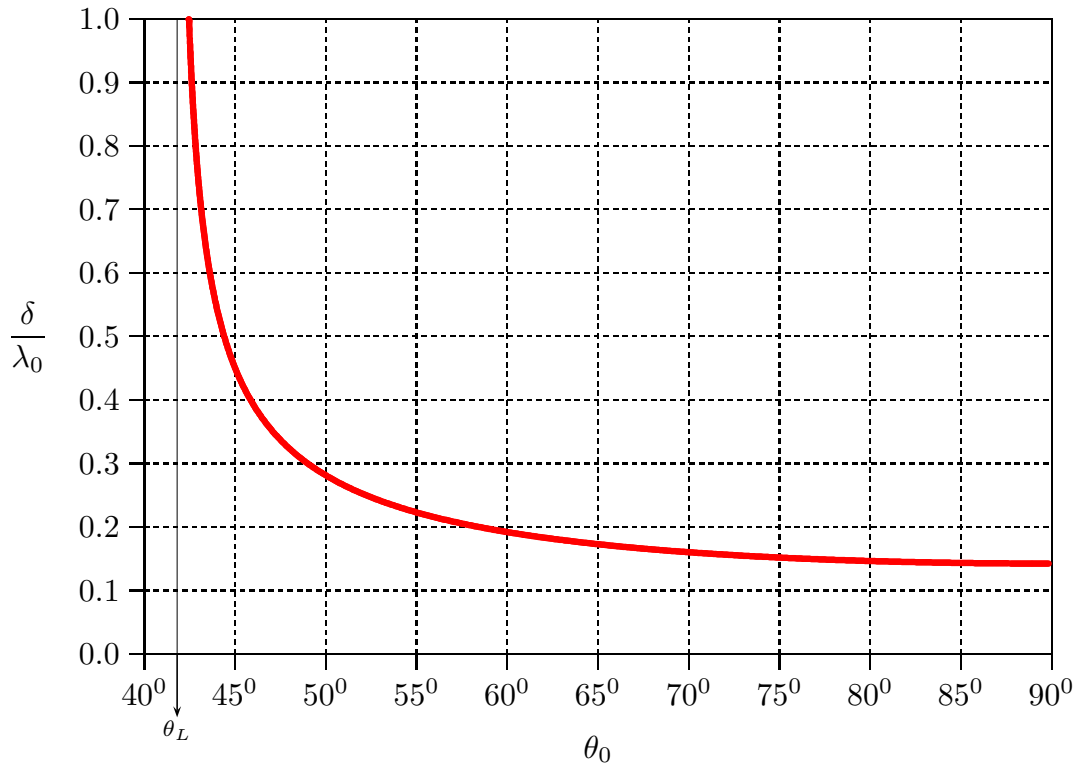


fig.4.2-1

4.3 - Calcolo dei coefficienti di riflessione e di trasmissione nel caso di riflessione totale $\theta_0 \geq \theta_L$ - Goos and Hänchen shift

Dalla (3.8.11) si ha:

$$R_{\perp} = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 - i \sqrt{\epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0 - \epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 + i \sqrt{\epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0 - \epsilon_{r_2}}} \right|^2 = 1 \quad (\epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_2}; \theta_0 \geq \theta_L) \quad (4.3.1)$$

Dalla (3.8.12) si ha:

$$\begin{aligned}
 T_{\perp} &= \frac{4i\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}}\cos\theta_0}{\left|\sqrt{\epsilon_{r_1}}\cos\theta_0 + i\sqrt{\epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}}\right|^2} = \frac{4i\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}}\cos\theta_0}{\epsilon_{r_1}\cos^2\theta_0 + \epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}} = \\
 &= \frac{4i\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}}\cos\theta_0}{\epsilon_{r_1} - \epsilon_{r_2}} \quad (\epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_2}; \theta_0 \geq \theta_L)
 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Analogamente dalla (3.8.13) si ha:

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\epsilon_{r_2}\cos\theta_0 - i\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}}}{\epsilon_{r_2}\cos\theta_0 + i\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}}} \right|^2 = 1 \quad (\epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_2}; \theta_0 \geq \theta_L) \tag{4.3.3}$$

Dalla (3.8.16) si ha:

$$\begin{aligned}
 T_{\parallel} &= \frac{4i\epsilon_{r_2}\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}}\cos\theta_0}{\left|\epsilon_{r_2}\cos\theta_0 + i\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}}\right|^2} = \\
 &= \frac{4i\epsilon_{r_2}\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}}\cos\theta_0}{\epsilon_{r_2}^2\cos^2\theta_0 + \epsilon_{r_1}^2\sin^2\theta_0 - \epsilon_{r_2}\epsilon_{r_1}} \quad (\epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_2}; \theta_0 \geq \theta_L)
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Goos and Hänchen dimostrarono sperimentalmente, nel 1943, che, nel piano di incidenza, un fascio di luce linearmente polarizzata, riflessa totalmente é spostato parallelamente al raggio che sarebbe dovuto essere riflesso geometricamente all'interfaccia fra due mezzi isotropi, omogenei e otticamente trasparenti. Essi conclusero, come già aveva ipotizzato **Newton** circa trecento anni or sono, che, addirittura alla riflessione totale, **il fascio incidente penetra all'interno del mezzo meno rifrangente per poi riemergere nel mezzo otticamente piú rifrangente**; in altre parole, che il fascio é riflesso in qualche superficie virtuale situata a poca distanza all'interno del mezzo meno rifrangente. Questo fenomeno, illustrato dalla figura 4.3-1, fu chiamato **Goos-Hänchen effect** dal Professor

H.Walter.

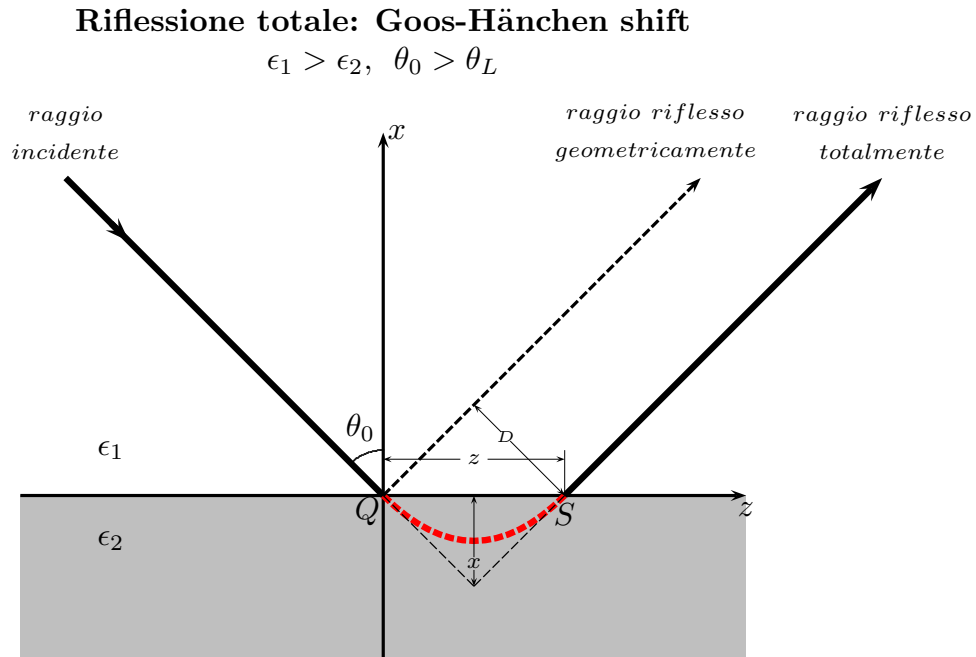


fig.4.3-1: Rappresentazione schematica del percorso assunto da un raggio di luce in riflessione totale. Il raggio incidente non è riflesso geometricamente ma totalmente con uno spostamento D . Il percorso nel mezzo meno rifrangente da Q a S può, secondo Newton, essere visualizzato da una parabola, come indicato dalla linea tratteggiata di colore rosso. Lo shift del centro della riflessione è indicato con z e la profondità di penetrazione nel mezzo meno rifrangente con x .

Newton anticipò che la riflessione totale non avviene all'interfaccia fisica fra i due mezzi. Egli ipotizzò che il percorso di un raggio di luce è una parabola, il vertice essendo all'interno del mezzo meno rifrangente. Questo problema è stato investigato sperimentalmente per molti decenni, ma con poco successo. Il metodo è stato sempre quello di misurare in qualche modo il flusso di energia luminosa all'interno del mezzo meno rifrangente. Tuttavia l'energia non può essere misurata a meno che essa è estratta dal processo fisico. Quindi sembra impossibile misurare il flusso di energia all'interno del mezzo meno rifrangente senza disturbare il meccanismo della riflessione totale. Finalmente nel 1943 **Goos** and **Hänchen** depositarono una striscia di argento sul retro della superficie di un prisma sul quale avveniva la riflessione totale. La parte del fascio incidente che incide sulla striscia metallizzata è metallicamente riflesso e serve come riferimento per misurare lo spostamento della **porzione totalmente riflessa del fascio**. In modo da ingrandire il piccolo spostamento, **Goos** and **Hänchen** utilizzarono uno schema che implicava riflessioni totali multiple (fino a 133) fra due piani interfacce piane e parallele.

Lo spostamento del fascio è generalmente piccolo nell'intero range angolare in cui avviene la riflessione totale, eccetto nell'immediato intorno dell'angolo limite per la riflessione totale (fig.4.2-1). Esso, infatti, aumenta piuttosto rapidamente man mano che l'angolo di incidenza si avvicina all'angolo limite. Conseguentemente, la profondità del piano virtuale di riflessione e così la profondità di penetrazione della luce nel mezzo meno

rifrangente, é importante solo nell'immediato intorno dell'angolo limite per la riflessione totale.

4.4 - Studio delle fasi dell'onda riflessa quando $\theta_0 > \theta_L$

Le componenti ortogonali dei campi riflessi quando θ_0 é $>$ di θ_L , sono:

$$\vec{E}_{1\perp} = \frac{\cos \theta_0 - i\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_0 + i\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \vec{E}_{0\perp} \quad (4.4.1)$$

$$\vec{H}_{1\perp} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_0 - i\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_0 + i\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \vec{H}_{0\perp} \quad (4.4.2)$$

Essendo:

$$\vec{H}_{1\perp} = \frac{k_1}{\omega\mu_1} \hat{n}_1 \times \vec{E}_{1\parallel} \quad e \quad \vec{H}_{0\perp} = \frac{k_1}{\omega\mu_1} \hat{n}_0 \times \vec{E}_{0\parallel}$$

la (4.4.2) si scrive:

$$\hat{n}_1 \times \vec{E}_{1\parallel} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_0 - i\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_0 + i\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \hat{n}_0 \times \vec{E}_{0\parallel} \quad (4.4.3)$$

I coefficienti complessi che moltiplicano i campi $\vec{E}_{0\perp}$ e $\vec{H}_{0\perp}$ hanno, come si può facilmente verificare, il modulo unitario; pertanto, si può porre:

$$\frac{\cos \theta_0 - i\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_0 + i\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = e^{-i\delta_{\perp}} \quad (4.4.4)$$

$$\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_0 - i\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_0 + i\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = e^{-i\delta_{\parallel}} \quad (4.4.5)$$

Le (4.4.4) e le (4.4.5) derivano dal fatto che, dato il numero complesso $a - ib$, si ha:

$$a - ib = \sqrt{(a^2 + b^2)} e^{-i\phi} \quad (4.4.6)$$

per cui: $a = \sqrt{(a^2 + b^2)} \cos \phi$, $b = \sqrt{(a^2 + b^2)} \sin \phi$, $\tan \phi = \frac{b}{a}$

Consideriamo il coefficiente (4.4.4):

$$\frac{\cos \theta_0 - i \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_0 + i \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

esso é del tipo

$$\frac{Ae^{-i\alpha}}{Ae^{+i\alpha}} = e^{-i2\alpha} \quad \text{con} \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_0}$$

ne segue, posto $\delta_{\perp} = 2\alpha$

$$\tan \frac{\delta_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_0} \quad (4.4.7)$$

Analogamente:

$$\tan \frac{\delta_{\parallel}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_0} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \tan \frac{\delta_{\perp}}{2} \quad (4.4.8)$$

Le due componenti riflesse sono quindi differentemente sfasate rispetto alle corrispondenti componenti incidenti.

Supponiamo, ora, che l'onda incidente sia polarizzata linearmente in una direzione né parallela né normale al piano di incidenza.

Al solito, scomponiamola in componenti e osserviamo che l'onda riflessa risulta composta da due oscillazioni armoniche giacenti su piani perpendicolari e sfasate della quantità $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$ che in generale é diversa da zero.

Ne segue, quindi, che l'onda riflessa é polarizzata ellitticamente.

Si ha:

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{\delta}{2} &= \frac{\tan \frac{\delta_{\parallel}}{2} - \tan \frac{\delta_{\perp}}{2}}{1 + \tan \frac{\delta_{\parallel}}{2} \tan \frac{\delta_{\perp}}{2}} = \frac{\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1\right) \tan \frac{\delta_{\perp}}{2}}{1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} \tan^2 \frac{\delta_{\perp}}{2}} = \frac{\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1\right) \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_0}}{1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\cos^2 \theta_0}} = \\
 &= \frac{(n_1^2 - n_2^2) \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{n_2^2 \cos \theta_0}}{\frac{n_2^2 \cos^2 \theta_0 + n_1^2 \sin^2 \theta_0 - n_2^2}{n_2^2 \cos^2 \theta_0}} = \frac{(n_1^2 - n_2^2) \cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{n_2^2 \cos^2 \theta_0 + n_1^2 \sin^2 \theta_0 - n_2^2} = \\
 &= \frac{(n_1^2 - n_2^2) \cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cancel{n_2^2} - n_2^2 \sin^2 \theta_0 + n_1^2 \sin^2 \theta_0 - \cancel{n_2^2}} = \frac{(n_1^2 - n_2^2) \cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{(n_1^2 - n_2^2) \sin^2 \theta_0} \quad (4.4.9)
 \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\tan \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^2 \theta_0} \quad (4.4.10)$$

Analogamente possiamo ricavare il valore dell'angolo di incidenza affinché le componenti dell'onda riflessa siano sfasate di un angolo δ . Questo si ottiene invertendo la (4.4.10). Elevando al quadrato:

$$\tan^2 \frac{\delta}{2} = \frac{\cos^2 \theta_0 \left[\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \right]}{\sin^4 \theta_0} \quad (4.4.11)$$

$$\tan^2 \frac{\delta}{2} = \frac{(1 - \sin^2 \theta_0) \left[\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \right]}{\sin^4 \theta_0} \quad (4.4.12)$$

$$\sin^4 \theta_0 \tan^2 \frac{\delta}{2} = \sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^4 \theta_0 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 \theta_0 \quad (4.4.13)$$

Ordinando:

$$\left(1 + \tan^2 \frac{\delta}{2}\right) \sin^4 \theta_0 - \left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \sin^2 \theta_0 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = 0 \quad (4.4.14)$$

da cui:

$$\sin^2 \theta_0 = \frac{\left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \pm \sqrt{\left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^2 - 4 \left(1 + \tan^2 \frac{\delta}{2}\right) \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{2 \left(1 + \tan^2 \frac{\delta}{2}\right)} \quad (4.4.15)$$

Dalla (4.4.10) segue che $\tan \frac{\delta}{2}$ (e quindi δ) si annulla per incidenza radente $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ("grazing incidence") e in corrispondenza dell'angolo limite $\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$.

Fra questi due valori la differenza di fase relativa assume un massimo determinato dalla equazione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta_0} \left(\tan \frac{\delta}{2} \right) &= \\ \frac{[-\sin \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} + \cos \theta_0 \frac{2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{2 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}] \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^4 \theta_0} &= \\ = \frac{-\sin^2 \theta_0 \left[\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \right] + \cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta_0 - 2 \cos^2 \theta_0 \left[\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \right]}{\sin^3 \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} &= \\ = \frac{-\sin^4 \theta_0 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 + 2 \cos^2 \theta_0 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\sin^3 \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} &= \\ = \frac{-\sin^4 \theta_0 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 + 2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 \theta_0}{\sin^3 \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} &= \\ = \frac{-\sin^2 \theta_0 (\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0) + 2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 \theta_0}{\sin^3 \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = \frac{2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_0 \left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]}{\sin^3 \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = 0 \end{aligned}$$

che é soddisfatta per:

$$\sin^2 \theta_{0_{max}} = \frac{2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \quad (4.4.16)$$

che sostituito nella (4.4.10) comporta:

$$\tan \frac{\delta_{max}}{2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\frac{2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = \quad (4.4.17)$$

$$= \frac{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

Questa proprietà dell'onda totalmente riflessa fu utilizzata da Fresnel per produrre luce polarizzata circolarmente.

Per questo occorre che le ampiezze delle componenti della luce incidente siano eguali; quindi è prima necessario che l'onda incidente sia polarizzata linearmente, in una direzione formante un angolo di 45° con la normale al piano di incidenza. Inoltre si devono scegliere $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ e θ_0 in modo tale che risulti $\delta = \frac{\pi}{2}$ cioè che $\tan \frac{\delta}{2} = 1$. Perché questo sia possibile occorre che $\tan \frac{\delta_{max}}{2} \geq 1$ cioè:

$$\frac{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{2\frac{n_2}{n_1}} \geq 1 \quad (4.4.18)$$

e quindi:

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + 2\left(\frac{n_2}{n_1}\right) - 1 \leq 0 \quad (4.4.19)$$

che è soddisfatta per

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \leq -1 + \sqrt{2} = 0.414 \quad (4.4.20)$$

Nello spettro visibile questa diseuguaglianza non è in generale soddisfatta; per esempio se consideriamo il sistema acqua-aria, vetro-aria si ha $n_1 \simeq 1.5$ e $n_2 = 1$ e quindi $\frac{n_2}{n_1} \simeq 0.67$.

Nello spettro a radiofrequenza l'indice di rifrazione può raggiungere valori molto maggiori, per esempio, nel caso di una superficie di separazione fra acqua e aria si ha: $n_1 = 9$ e $n_2 = 1$ quindi $\frac{n_2}{n_1} \simeq 0.11$ e la diseuguaglianza è soddisfatta.

Gli angoli θ_0 corrispondenti a $\tan \frac{\delta}{2} = 1$ si calcolano dalla (4.4.15):

$$(\sin^2 \theta_0)_{(\delta = \pi/2)} = \frac{\left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \pm \sqrt{\left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^2 - 8\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{4} \quad (4.4.21)$$

da cui per $\frac{n_2}{n_1} = 0.11$, si ha:

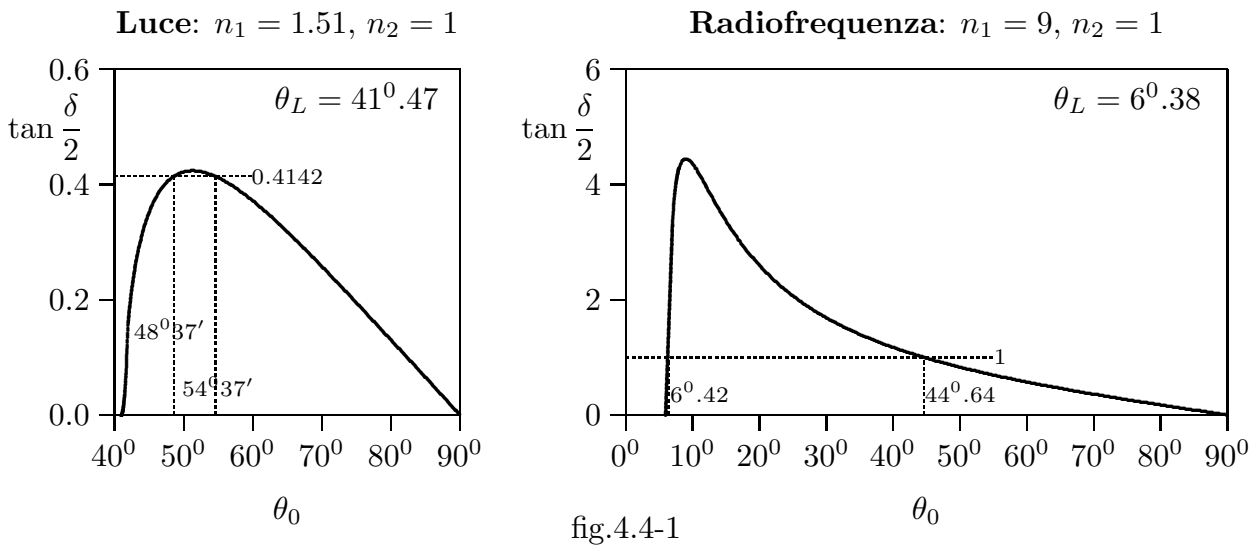
$$\sin^2 \theta'_0 = 0.4938 \qquad \sin^2 \theta''_0 = 0.01225$$

$$\sin \theta'_0 = 0.7027 \qquad \sin \theta''_0 = 0.1107$$

$$\theta'_0 = 44^{\circ}.64 \qquad \theta''_0 = 6^{\circ}.42$$

che effettivamente verificano la nostra equazione.

In fig.4.4-1 riportiamo l'andamento di $\tan \frac{\delta}{2}$ in funzione di θ_0 come dalla formula (4.4.9) evidenziando nei grafici i valori degli angoli calcolati.



Fresnel é riuscito a polarizzare la luce visibile facendo subire ad un fascetto di luce due riflessioni totali fra le superfici interne di un parallelepipedo di vetro i cui angoli avevano valori opportuni.

Questo dispositivo prende il nome di **rombo di Fresnel** ed é ancora oggi molto usato per produrre luce polarizzata circolarmente.

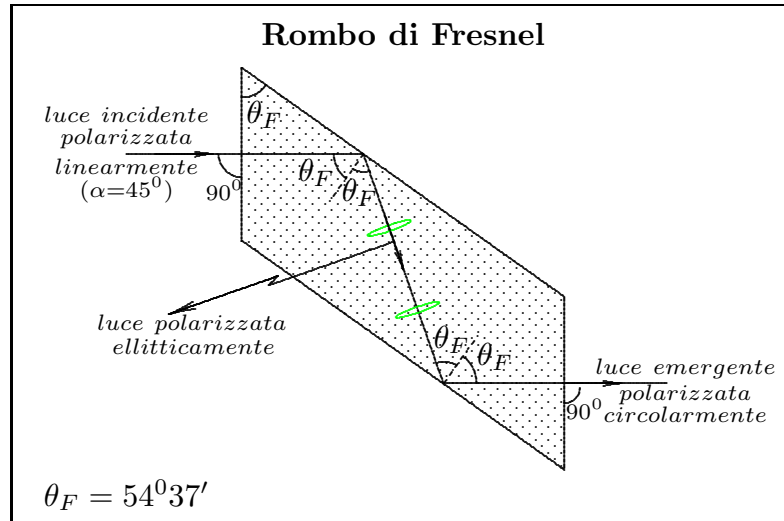


fig.4.4-2

Infatti:

La luce polarizzata linearmente entra secondo la normale dentro un parallelepipedo di vetro di indice di rifrazione $n_1 = 1.51$ cui corrisponde un angolo limite $\theta_L = 41^\circ.47$. La luce giunta sull'altra faccia con un angolo di incidenza maggiore di θ_L subisce riflessione totale.

In particolare (e vediamo se é possibile) facciamo incidere la luce con un angolo tale che il valore δ della differenza di fase delle componenti dell'onda riflessa internamente sia 45° . Per questo basta porre al posto di $\tan \frac{\delta}{2}$ nella (4.4.15), $\tan \frac{45^\circ}{2} = 0.4142$. Si ha:

$$(\sin^2 \theta_0)_{(\delta = \pi/4)} = \frac{\left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \pm \sqrt{\left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^2 - 4[1 + (0.4142)^2] \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{2[1 + (0.4142)^2]} \quad (4.4.22)$$

Per $n_1 = 1.51$ e $n_2 = 1$, ossia per $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \simeq 0.4386$, la (4.4.22) diventa:

$$(\sin^2 \theta_0)_{(\delta = \pi/4)} = \frac{(1 + 0.4386) \pm \sqrt{(1 + 0.4386)^2 - 4[1 + (0.4142)^2] 0.4386}}{2[1 + (0.4142)^2]} \quad (4.4.23)$$

ossia:

$$(\sin^2 \theta_0)_{(\delta = \pi/4)} \simeq \begin{cases} 0.6648 \\ 0.5631 \end{cases} \implies (\sin \theta_0)_{(\delta = \pi/4)} \simeq \begin{cases} 0.8154 \\ 0.7504 \end{cases} \quad (4.4.24)$$

Risultano, quindi, $\theta'_0 = 48^0.625$ e $\theta''_0 = 54^0.627$ come é mostrato in figura 4.4-1. Nella costruzione del rombo di Fresnel si utilizza l'angolo maggiore in quanto, come si può dimostrare, un errore di costruzione sull'angolo maggiore si ripercuote in maniera minore sulla fase fra le due componenti.

Calcoliamo il valore di δ_{max} competente al valore dell'indice di rifrazione dato ($n_1 = 1.51$ e $n_2 = 1$)

Si ha:

$$\tan \frac{\delta_{max}}{2} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1.51}\right)^2}{2 \left(\frac{1}{1.51}\right)} = 0.42 \quad (4.4.25)$$

da cui: $\frac{\delta_{max}}{2} = 22^0.78 \rightarrow \delta_{max} = 45^0.56$ a cui corrisponde un angolo di incidenza dato da:

$$\sin^2 \theta_{0_{max}} = \frac{2 \left(\frac{1}{1.51}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{1.51}\right)^2} = 0.6097 \quad (4.4.26)$$

da cui $\sin \theta_{0_{max}} = 0.7808 \rightarrow \theta_{0_{max}} = 51^0 20'$, come illustrato in figura 4.4-1.

Giunto il fascetto nella faccia inferiore del parallelepipedo, sempre allo stesso angolo di incidenza, viene riflesso totalmente subendo un altro sfasamento di 45^0 fra le due componenti riflesse. Quindi la seconda onda riflessa é polarizzata circolarmente.

Il rombo di Fresnel può, naturalmente essere anche usato per produrre luce polarizzata ellitticamente; in questo caso é sufficiente che l'onda incidente sia polarizzata linearmente, in una direzione formante un angolo diverso da 45^0 con la normale al piano di incidenza.

Naturalmente il procedimento si può invertire nel senso che si può produrre luce polarizzata linearmente da luce polarizzata ellitticamente.

4.5 - Rifrazione in un mezzo conduttore

I fenomeni di riflessione e di rifrazione sono modificati notevolmente se la conducibilità di uno dei due mezzi non é nulla.

Le leggi di Snell e le equazioni di Fresnel sono ancora valide in modo formale, ma, come nel caso della riflessione totale, l'esistenza di valori complessi dell'angolo θ_2 conduce ad una interpretazione fisica molto diversa.

Supponiamo che il mezzo (1) sia ancora un dielettrico perfetto ma che il mezzo (2) rifrangente sia conduttore; si ha:

$$k_2^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_2 + i\omega \sigma_2 \mu_2 \qquad k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \qquad (4.5.1)$$

Poniamo, al solito $k_2 = \beta_2 + i\alpha_2$ e $k_1 = \beta_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}$; α_2 e β_2 sono espresse in funzione di ϵ_2 , μ_2 e σ_2 per mezzo delle formule studiate nel capitolo della propagazione nei mezzi conduttori.

Per la legge di Snell si ha:

$$\sin \theta_2 = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_0 = \frac{\beta_1}{\beta_2 + i\alpha_2} \sin \theta_0 \qquad (4.5.2)$$

Il coseno complesso si scrive:

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \frac{1}{k_2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0} \qquad (4.5.3)$$

Il calcolo del coseno complesso ci é utile per esplicitare la fase dell'onda rifratta (esattamente come é stato fatto nello studio della riflessione totale).

La fase dell'onda rifratta é:

$$k_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{r} = k_2 (-x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2) = -xk_2 \cos \theta_2 + zk_2 \sin \theta_2 = -xk_2 \cos \theta_2 + zk_1 \sin \theta_0 \qquad (4.5.4)$$

Posto:

$$k_2 \cos \theta_2 = q + ip \qquad (4.5.5)$$

si ha:

$$k_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{r} = -xq - ixp + z\beta_1 \sin \theta_0 \qquad (4.5.6)$$

Ne segue, quindi, che nell'interno del mezzo conduttore l'onda trasmessa é rappresentata dalla:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{ik_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{r} - i\omega t} = \vec{E}_2 e^{px + i(-qx + \beta_1 z \sin \theta_0 - \omega t)} \quad (x < 0) \qquad (4.5.7)$$

Sia \vec{k}_t il vettore propagazione nel mezzo 2; si ha dalla figura:

$$\vec{k}_t = -k_{tx} \hat{x} + k_{tz} \hat{z} \qquad (4.5.8)$$

Confrontando la (4.5.8) con la (4.5.7), si ha:

$$k_{t_x} = q, \quad k_{t_z} = \beta_1 \sin \theta_0 \quad (4.5.9)$$

Poiché:

$$k_{t_z} = k_{t_x} \tan \psi \quad (4.5.10)$$

ne segue:

$$\boxed{\tan \psi = \frac{\beta_1 \sin \theta_0}{q}} \quad (4.5.11)$$

L'angolo ψ é il vero angolo di rifrazione.

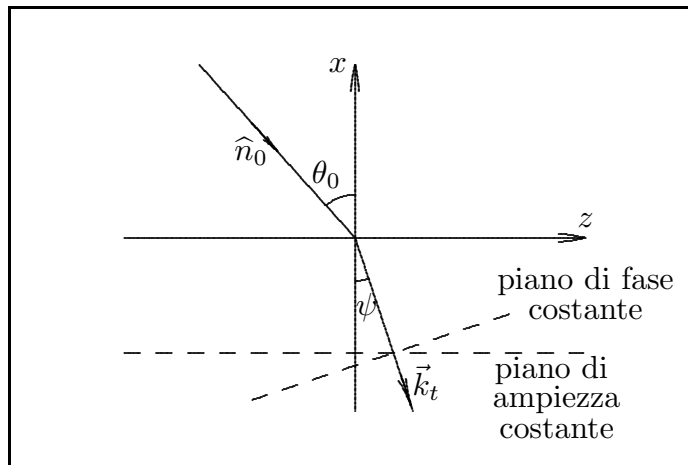


fig.4.5-1

L'onda trasmessa ha delle particolari peculiarità.

Le superfici di ampiezza costante sono i piani $px = costante$. Le superfici di fase costante sono i piani $-qx + \beta_1 z \sin \theta_0 = costante$. Le due famiglie di piani in generale non coincidono.

Nel mezzo 2 il campo é rappresentato da un sistema di onde piane non omogenee come nel caso della riflessione totale: i piani di ampiezza costante sono paralleli alla superficie riflettente S, mentre la direzione di propagazione é determinata dalla normale ai piani di fase costante. L'angolo ψ fatto da questa normale con la normale alla superficie di separazione (che nel nostro esempio coincide con l'asse x negativo) é il vero angolo di rifrazione ed é definito dalla:

$$-x \cos \psi + z \sin \psi = costante \quad (4.5.12)$$

I coseni direttori $\cos \psi$ e $\sin \psi$ della retta data dalla (4.5.8) si calcolano imponendo che essa sia ortogonale al piano di fase costante cioè al piano dato dall'equazione:

$$-qx + \beta_1 z \sin \theta_0 = C \quad (4.5.13)$$

Essi, quindi, sono:¹⁾

$$\cos \psi = \frac{q}{\sqrt{q^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0}} \quad (4.5.14)$$

$$\sin \psi = \frac{\beta_1 \sin \theta_0}{\sqrt{q^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0}} \quad (4.5.15)$$

Il rapporto fra la (4.5.15) e la (4.5.14) fornisce la tangente dell'angolo ψ data dalla (4.5.11).

Si può quindi definire una legge di Snell modificata per angoli reali che è espressa da:

$$n(\theta_0) = \frac{\sin \theta_0}{\sin \psi} = \frac{1}{\beta_1} \sqrt{q^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0} \quad (4.5.16)$$

dove la quantità $n(\theta_0)$ rappresenta un indice di rifrazione reale, che risulta funzione dell'angolo di incidenza e questo fatto costituisce una notevole deviazione della legge di rifrazione nei mezzi non assorbenti.

La velocità di fase, definita come velocità di propagazione dei piani di fase costante, è:

$$v_{f_2}(\theta_0) = \frac{v_{f_1}}{n(\theta_0)} = \frac{\omega}{\beta_1 n(\theta_0)} = \frac{\omega}{\sqrt{q^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0}} \quad (4.5.17)$$

Non soltanto questa velocità dipende dall'angolo di incidenza, ma vi sono anche delle componenti dell'intensità del campo nella direzione di propagazione, come nel caso della riflessione totale. Il campo nell'interno del conduttore non è rigorosamente trasversale.

Il calcolo di p , q ed n in funzione delle costanti dei mezzi e dell'angolo di incidenza è svolto in Appendice e conduce a:

$$p^2(\theta_0) = \frac{1}{2} \left[-\beta_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2 \alpha_2^2 + (\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0)^2} \right] \quad (4.5.18)$$

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2} \left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2 \alpha_2^2 + (\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0)^2} \right] \quad (4.5.19)$$

$$\beta_1^2 n^2(\theta_0) = \frac{1}{2} \left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2 \alpha_2^2 + (\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0)^2} \right] \quad (4.5.20)$$

¹⁾ Dato il piano di equazione: $ax + by + cz = d$, i coseni direttori della generica retta normale a tale piano sono: $r = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, $s = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, $t = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

dalle quali si deriva facilmente un gruppo di relazioni ausiliarie, note come equazioni di Ketteler:

$$\beta_1^2 n^2(\theta_0) - p^2(\theta_0) = \beta_2^2 - \alpha_2^2 \quad (4.5.21)$$

$$p(\theta_0) q(\theta_0) = \beta_2 \alpha_2 \quad (4.5.22)$$

$$\beta_1 n(\theta_0) p(\theta_0) = \frac{\beta_2 \alpha_2}{\cos \psi} \quad (4.5.23)$$

Vogliamo calcolare i parametri p , q e n nell'ipotesi in cui la corrente di conduzione nel mezzo sia molto maggiore della corrente di spostamento, cioè:

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \gg 1 \quad (4.5.24)$$

In queste condizioni si ha:

$$\beta_2 \simeq \alpha_2 \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2}} \quad (4.5.25)$$

Pertanto la formula del parametro p diventa:

$$p^2 \simeq \frac{1}{2} \left[\beta_1^2 \sin^2 \theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2 \alpha_2^2 + \beta_1^4 \sin^4 \theta_0} \right] \quad (4.5.26)$$

Sostituendo:

$$\beta_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \quad e \quad \beta_2^2 = \alpha_2^2 = \frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2} \quad (4.5.27)$$

si ha:

$$\begin{aligned} p^2(\theta_0) &\simeq \frac{1}{2} \left[\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_0 + \sqrt{\omega^2 \mu_2^2 \sigma_2^2 + \omega^4 \epsilon_1^2 \mu_1^2 \sin^4 \theta_0} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_0 + \sqrt{\omega^4 \epsilon_1^2 \mu_1^2 \left(\frac{\mu_2^2 \sigma_2^2}{\omega^2 \epsilon_1^2 \mu_1^2} + \sin^4 \theta_0 \right)} \right] = \\ &= \frac{\omega^2 \epsilon_1 \mu_1}{2} \left(\sin^2 \theta_0 + \sqrt{\frac{\mu_2^2 \sigma_2^2}{\omega^2 \epsilon_1^2 \mu_1^2} + \sin^4 \theta_0} \right) \end{aligned} \quad (4.5.28)$$

Analogamente risulta:

$$q^2(\theta_0) \simeq \frac{\omega^2 \epsilon_1 \mu_1}{2} \left(-\sin^2 \theta_0 + \sqrt{\frac{\mu_2^2 \sigma_2^2}{\omega^2 \epsilon_1^2 \mu_1^2} + \sin^4 \theta_0} \right) \quad (4.5.29)$$

$$n^2 \simeq \frac{1}{2} \left(\sin^2 \theta_0 + \sqrt{\frac{\mu_2^2 \sigma_2^2}{\omega^2 \epsilon_1^2 \mu_1^2} + \sin^4 \theta_0} \right) \quad (4.5.30)$$

Poiché $\frac{\sigma_2^2}{\epsilon_2^2 \omega^2} \gg 1$ e poiché ϵ_2 non differisce molto da ϵ_1 si hanno le seguenti formule approssimate:

$$p \simeq q \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2}}, \quad n \simeq \sqrt{\frac{\mu_2 \sigma_2}{2 \omega \mu_1 \epsilon_1}} \quad (4.5.31)$$

Ne segue quindi che al tendere di $\sigma_2 \rightarrow \infty$ oppure di $\omega \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$.

Calcoliamo, ora, in queste ipotesi, l'angolo di rifrazione ψ .

Dalla (4.5.13) si ha:

$$\sin \psi = \frac{\sin \theta_0}{n(\theta_0)} \quad (4.5.32)$$

Sostituendo ad essa la seconda delle (4.5.31), segue:

$$\sin \psi \simeq \sqrt{\frac{2 \omega \epsilon_1 \mu_1}{\mu_2 \sigma_2}} \sin \theta_0 \quad (4.5.33)$$

Conseguentemente: **Al crescere della conduttività e al diminuire della frequenza i piani di fase costante tendono a disporsi parallelamente ai piani di ampiezza costante, e la propagazione nel conduttore avviene in direzione normale alla superficie;** cioè per $\sigma_2 \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow 0$.

Si può verificare che nel caso del rame ($\sigma_2 = 5.8 \cdot 10^7$ S/m) l'angolo ψ è praticamente nullo.

Nel caso dei metalli, cioè, qualunque sia l'angolo di incidenza, l'onda trasmessa si propaga praticamente in direzione della normale alla superficie.

Nel caso dell'acqua di mare, per radiofrequenze, si ha: $\sigma_2 = 3$ (S/m) ed $\epsilon_2 = 81 \epsilon_0$, per cui:

$$\frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} = \frac{6.7 \cdot 10^8}{\nu}, \quad n = \frac{1.64 \cdot 10^5}{\sqrt{\nu}}$$

Per $\nu = 1$ MHz si ha: $\frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} = 670$ e $n = 164$, per cui: $\sin \psi \simeq 0.006 \sin \theta_0$ cioè $\psi < 0^\circ.35$.

Questa approssimazione è ancora valida per $\nu = 100$ MHz; si ha infatti $\left(\frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2}\right)^2 = 45 \gg 1$ e in questo caso $n = 16,4$ e $\psi < 3^\circ.5$.

4.6 - Riflessione da una superficie conduttrice

Esamineremo, ora, la fase e l'ampiezza dell'onda riflessa dalla superficie di separazione fra un dielettrico e un conduttore.

Consideriamo le formule di Fresnel per la riflessione nel caso di \vec{E}_0 **normale al piano di incidenza**.

Si ha:

$$\vec{E}_{1\perp} = \frac{\mu_2 k_1 \cos \theta_0 - \mu_1 k_2 \cos \theta_2}{\mu_2 k_1 \cos \theta_1 + \mu_1 k_2 \cos \theta_2} \vec{E}_{0\perp} \quad (4.6.1)$$

Per la legge della riflessione si ha $\theta_1 = \theta_0$.

Sostituendo la (4.5.5) nella (4.6.1) si ha:

$$\vec{E}_{1\perp} = \frac{\mu_2 \beta_1 \cos \theta_0 - \mu_1 (q + ip)}{\mu_2 \beta_1 \cos \theta_0 + \mu_1 (q + ip)} \vec{E}_{0\perp} \quad (4.6.2)$$

Il modulo quadro del coefficiente di Fresnel é, quindi:

$$\rho_{\perp}^2 = \frac{[\mu_1 q - \mu_2 \beta_1 \cos \theta_0]^2 + \mu_1^2 p^2}{[\mu_1 q + \mu_2 \beta_1 \cos \theta_0]^2 + \mu_1^2 p^2} \quad (4.6.3)$$

L'angolo di fase é dato da:

$$\tan \delta_{\perp} = \frac{2\mu_1 \mu_2 \beta_1 p \cos \theta_0}{\mu_2^2 \beta_1^2 \cos^2 \theta_0 - \mu_1^2 (q^2 + p^2)} \quad (4.6.4)$$

Consideriamo il caso di \vec{E}_0 **parallelo al piano di incidenza**.

Si ha:

$$\vec{H}_{1\perp} = \frac{\mu_1 k_2 \cos \theta_0 - \mu_2 k_1 \cos \theta_2}{\mu_1 k_2 \cos \theta_1 + \mu_2 k_1 \cos \theta_2} \vec{H}_{0\perp} \quad (4.6.5)$$

Sostituendo θ_1 con θ_0 , moltiplicando numeratore e denominatore per k_2 e ricordando che: $k_2^2 = (\beta_2 + i\alpha_2)^2 = \beta_2^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2\beta_2$ e che $k_1 = \beta_1$, si ha:

$$\vec{H}_{1\perp} = \frac{\mu_1 \cos \theta_0 [\beta_2^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2\beta_2] - \mu_2 \beta_1 (q + ip)}{\mu_1 \cos \theta_0 [\beta_2^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2\beta_2] + \mu_2 \beta_1 (q + ip)} \vec{H}_{0\perp} \quad (4.6.6)$$

Ricordando che: $\vec{H}_{1\perp} = (\hat{n}_1 \times \vec{E}_{1\parallel}) \frac{k_1}{\omega \mu_1}$ e che $\vec{H}_{0\perp} = (\hat{n}_0 \times \vec{E}_{0\parallel}) \frac{k_1}{\omega \mu_1}$ possiamo scrivere:

$$\hat{n}_1 \times \vec{E}_{1\parallel} = \rho_{\parallel} e^{-i\delta_{\parallel}} \hat{n}_0 \times \vec{E}_{0\parallel} \quad (4.6.7)$$

Il modulo quadro del coefficiente di Fresnel é, quindi:

$$\rho_{\parallel}^2 = \frac{[\mu_1 (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos \theta_0 - \mu_2 \beta_1 q]^2 + [2\mu_1 \beta_2 \alpha_2 \cos \theta_0 - \mu_2 \beta_1 p]^2}{[\mu_1 (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos \theta_0 + \mu_2 \beta_1 q]^2 + [2\mu_1 \beta_2 \alpha_2 \cos \theta_0 + \mu_2 \beta_1 p]^2} \quad (4.6.8)$$

L'angolo di fase é dato da:

$$\tan \delta_{\parallel} = \frac{2\mu_1\mu_2\beta_1p (q^2 + p^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0}{\mu_2^2\beta_1^2 (q^2 + p^2) - \mu_1^2 (\beta_2^2 + \alpha_2^2)^2 \cos^2 \theta_0} \quad (4.6.9)$$

Ne segue che: **come nel caso della riflessione totale, le due componenti normale e parallela sono riflesse differientemente dalla superficie conduttrice.** Di conseguenza un'onda incidente polarizzata linearmente, la cui direzione di polarizzazione non sia né normale né parallela al piano di incidenza, viene **polarizzata ellitticamente** per riflessione.

Se il conduttore é non magnetico ($\mu_1 \simeq \mu_2$), i coefficienti di riflessione si possono notevolmente semplificare.

Dalla (4.6.3) segue immediatamente:

$$\rho_{\perp}^2 = \frac{(q - \beta_1 \cos \theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \cos \theta_0)^2 + p^2} \quad (\mu_1 \simeq \mu_2) \quad (4.6.10)$$

É dimostrato in Appendice che:

$$\rho_{\parallel}^2 = \frac{(q - \beta_1 \cos \theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \cos \theta_0)^2 + p^2} \cdot \frac{(q - \beta_1 \sin \theta_0 \tan \theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \sin \theta_0 \tan \theta_0)^2 + p^2} \quad (\mu_1 \simeq \mu_2) \quad (4.6.11)$$

ossia:

$$\rho_{\parallel}^2 = \rho_{\perp}^2 \frac{(q - \beta_1 \sin \theta_0 \tan \theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \sin \theta_0 \tan \theta_0)^2 + p^2} \quad (\mu_1 \simeq \mu_2)$$

La polarizzazione é determinata dal rapporto:

$$\frac{\rho_{\parallel}}{\rho_{\perp}} e^{-i(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp})} = \rho e^{-i\delta} \quad (4.6.12)$$

Se $\mu_1 = \mu_2$ si trova dalla (4.6.11):

$$\rho^2 = \frac{(q - \beta_1 \sin \theta_0 \tan \theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \sin \theta_0 \tan \theta_0)^2 + p^2} \quad (\mu_1 \simeq \mu_2) \quad (4.6.13)$$

$$\tan \delta = \frac{2\beta_1 p \sin \theta_0 \tan \theta_0}{\beta_1^2 \sin^2 \theta_0 \tan^2 \theta_0 - (p^2 + q^2)} \quad (\mu_1 \simeq \mu_2) \quad (4.6.14)$$

I coefficienti di riflessione sono sempre definiti come il rapporto dei flussi di energia delle onde incidente e riflessa.

Per quanto detto prima:

$$R_{\perp} = \rho_{\perp}^2 \quad R_{\parallel} = \rho_{\parallel}^2 \quad (4.6.15)$$

Se l'incidenza é normale, si ha:

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = R \quad (4.6.16)$$

Si definisce **grado di polarizzazione** la quantità:

$$s = \frac{|E_{1\perp}|^2 - |E_{1\parallel}|^2}{|E_{1\perp}|^2 + |E_{1\parallel}|^2} = \frac{1 - \frac{|E_{1\parallel}|^2}{|E_{1\perp}|^2}}{1 + \frac{|E_{1\parallel}|^2}{|E_{1\perp}|^2}} = \frac{1 - \frac{\rho_{\parallel}^2 |E_{0\parallel}|^2}{\rho_{\perp}^2 |E_{0\perp}|^2}}{1 + \frac{\rho_{\parallel}^2 |E_{0\parallel}|^2}{\rho_{\perp}^2 |E_{0\perp}|^2}} = \frac{1 - g^2 \rho^2}{1 + g^2 \rho^2} \quad (4.6.17)$$

essendo:

$$g^2 = \frac{|E_{0\parallel}|^2}{|E_{0\perp}|^2} \quad (4.6.18)$$

Per trovare i coefficienti di riflessione in funzione dei parametri dei mezzi, basta sostituire le espressioni di p e di q . Le formule diventano troppo complicate perché il loro significato fisico sia evidente a prima vista. Consideriamo pertanto i soliti casi limite.

Caso I: $\frac{\sigma_2^2}{\omega^2 \epsilon_2^2} \gg 1$

In questo caso, come già sappiamo:

$$\alpha_2 \simeq \beta_2 \simeq q \simeq p \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2}}$$

e quindi:

$$\rho_{\perp}^2 = \frac{[\mu_1 q - \mu_2 \beta_1 \cos \theta_0]^2 + \mu_1^2 p^2}{[\mu_1 q + \mu_2 \beta_1 \cos \theta_0]^2 + \mu_1^2 p^2} = \frac{\left[1 - \frac{\mu_2 \beta_1}{\mu_1 q} \cos \theta_0\right]^2 + \frac{\mu_1^2 p^2}{\mu_1^2 q^2}}{\left[1 + \frac{\mu_2 \beta_1}{\mu_1 q} \cos \theta_0\right]^2 + \frac{\mu_1^2 p^2}{\mu_1^2 q^2}} \simeq \frac{\left[1 - \frac{\mu_2 \beta_1}{\mu_1 q} \cos \theta_0\right]^2 + 1}{\left[1 + \frac{\mu_2 \beta_1}{\mu_1 q} \cos \theta_0\right]^2 + 1} \quad (4.6.19)$$

$$\begin{aligned} \tan \delta_{\perp} &= \frac{2\mu_1 \mu_2 \beta_1 p \cos \theta_0}{\mu_2^2 \beta_1^2 \cos^2 \theta_0 - \mu_1^2 (q^2 + p^2)} \simeq \frac{2\mu_1 \mu_2 \beta_1 \beta_2 \cos \theta_0}{\mu_2^2 \beta_1^2 \cos^2 \theta_0 - \mu_1^2 2\beta_2^2} = \\ &= \frac{2 \cos \theta_0}{\frac{\mu_2^2 \beta_1^2 \cos^2 \theta_0}{\mu_1^2 \beta_2^2} - \frac{2\mu_1^2 \beta_2^2}{\mu_1^2 \beta_2^2}} \left(\frac{\mu_2 \beta_1}{\mu_1 \beta_2}\right) = \frac{2 \cos \theta_0}{\frac{\mu_2^2 \beta_1^2 \cos^2 \theta_0}{\mu_1^2 \beta_2^2} - 2} \left(\frac{\mu_2 \beta_1}{\mu_1 \beta_2}\right) \end{aligned} \quad (4.6.20)$$

Si ha d'altra parte:

$$\frac{\mu_2 \beta_1}{\mu_1 \beta_2} = \frac{\mu_2 \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\mu_1 \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega \epsilon_1 \mu_2}{\mu_1 \sigma_2}} \quad (4.6.21)$$

Nel caso di conduttori metallici (σ_2 elevato) risulta: $\frac{\mu_2\beta_1}{\mu_1\beta_2} \ll 1$ e, posto $x = \frac{\mu_2\beta_1}{\mu_1\beta_2}$ si ha:

$$\rho_{\perp}^2 = \frac{(1 - x \cos \theta_0)^2 + 1}{(1 + x \cos \theta_0)^2 + 1} \simeq \frac{2 - 2x \cos \theta_0}{2 + 2x \cos \theta_0} \simeq (1 - x \cos \theta_0)^2 \simeq 1 - 2x \cos \theta_0 \quad (4.6.22)$$

avendo posto $\frac{1}{1+y} \simeq 1-y$

Analogamente:

$$\tan \delta_{\perp} = \frac{2x \cos \theta_0}{x^2 \cos^2 \theta_0 - 2} \simeq -x \cos \theta_0 \quad (4.6.23)$$

Analogamente, nel caso dell'onda polarizzata parallelamente al piano di incidenza, si ha:

$$\rho_{\parallel}^2 = \frac{[\mu_1 (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos \theta_0 - \mu_2 \beta_1 q]^2 + [2\mu_1 \beta_2 \alpha_2 \cos \theta_0 - \mu_2 \beta_1 p]^2}{[\mu_1 (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos \theta_0 + \mu_2 \beta_1 q]^2 + [2\mu_1 \beta_2 \alpha_2 \cos \theta_0 + \mu_2 \beta_1 p]^2} \quad (4.6.24)$$

Nell'ipotesi $\frac{\sigma_2^2}{\omega^2 \epsilon_2^2} \gg 1$ ossia $\alpha_2 \simeq \beta_2 \simeq q \simeq p \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2}}$, risulta:

$$\begin{aligned} \rho_{\parallel}^2 &= \frac{[\mu_1 (\beta_2^2 - \beta_2^2) \cos \theta_0 - \mu_2 \beta_1 q]^2 + [2\mu_1 \beta_2 q \cos \theta_0 - \mu_2 \beta_1 q]^2}{[\mu_1 (\beta_2^2 - \beta_2^2) \cos \theta_0 + \mu_2 \beta_1 q]^2 + [2\mu_1 \beta_2 q \cos \theta_0 + \mu_2 \beta_1 q]^2} = \\ &= \frac{\mu_2^2 \beta_1^2 q^2 + 4\mu_1^2 \beta_2^2 q^2 \cos^2 \theta_0 + \mu_2^2 \beta_1^2 q^2 - 4\mu_1 \mu_2 \beta_1 \beta_2 q^2 \cos \theta_0}{\mu_2^2 \beta_1^2 q^2 + 4\mu_1^2 \beta_2^2 q^2 \cos^2 \theta_0 + \mu_2^2 \beta_1^2 q^2 + 4\mu_1 \mu_2 \beta_1 \beta_2 q^2 \cos \theta_0} \end{aligned} \quad (4.6.25)$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\mu_1^2 \beta_2^2$ e ponendo $x = \frac{\mu_2 \beta_1}{\mu_1 \beta_2}$, si trova:

$$\rho_{\parallel}^2 = \frac{2x^2 + 4 \cos^2 \theta_0 - 4x \cos \theta_0}{2x^2 + 4 \cos^2 \theta_0 + 4x \cos \theta_0} = \frac{2 \cos^2 \theta_0 - 2x \cos \theta_0 + x^2}{2 \cos^2 \theta_0 + 2x \cos \theta_0 + x^2} \quad (4.6.26)$$

In questa formula compare anche il termine x^2 , poiché in corrispondenza di un certo valore θ_0 il numeratore di ρ_{\parallel}^2 diventa molto piccolo. Questo angolo critico é evidentemente l'analogo dell'angolo di Brewster. **Esso spesso prende il nome di angolo pseudo-Brewster.** Il valore minimo di ρ_{\parallel}^2 corrisponde ad un angolo di incidenza per il quale si annulla la sua derivata prima.

Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{\parallel}^2}{d\theta_0} &= \frac{(-4 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + 2x \sin \theta_0)(2 \cos^2 \theta_0 + 2x \cos \theta_0 + x^2)}{(2 \cos^2 \theta_0 + 2x \cos \theta_0 + x^2)^2} - \\ &- \frac{(-4 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - 2x \sin \theta_0)(2 \cos^2 \theta_0 - 2x \cos \theta_0 + x^2)}{(2 \cos^2 \theta_0 + 2x \cos \theta_0 + x^2)^2} = \\ &= \frac{(-16x \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 + 8x \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 + 4x^3 \sin \theta_0)}{(2 \cos^2 \theta_0 + 2x \cos \theta_0 + x^2)^2} = \\ &= \frac{4x \sin \theta_0 (-2 \cos^2 \theta_0 + x^2)}{(2 \cos^2 \theta_0 + 2x \cos \theta_0 + x^2)^2} \end{aligned} \quad (4.6.27)$$

La derivata si annulla per il valore dell'angolo θ_0 che soddisfa alla relazione:

$$x = \sqrt{2} \cos \theta_{pB} \quad (4.6.28)$$

A tale angolo corrisponde il valore minimo di ρ_{\parallel}^2 dato da:

$$\left(\rho_{\parallel}^2\right) = \frac{x^2 - \frac{2x^2}{\sqrt{2}} + x^2}{x^2 + \frac{2x^2}{\sqrt{2}} + x^2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \simeq 0.1715728 \quad (4.6.29)$$

Per quanto riguarda la fase δ_{\parallel} , si ha:

$$\tan \delta_{\parallel} = \frac{2\mu_1\mu_2\beta_1p(q^2 + p^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0}{\mu_2^2\beta_1^2(q^2 + p^2) - \mu_1^2(\beta_2^2 + \alpha_2^2)^2 \cos^2 \theta_0} \quad (4.6.30)$$

Nell'ipotesi $\frac{\sigma_2^2}{\omega^2\epsilon_2^2} \gg 1$ ossia $\alpha_2 \simeq \beta_2 \simeq q \simeq p \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}$, risulta:

$$\tan \delta_{\parallel} = \frac{2\mu_1\mu_2\beta_1\beta_2(2\beta_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0}{2\mu_2^2\beta_1^2\beta_2^2 - 4\mu_1^2\beta_2^4 \cos^2 \theta_0} \quad (4.6.31)$$

Poiché, come si deduce dalle (4.5.18) e (4.5.19), si ha $q^2 - p^2 = \beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0$, risulta evidente che nell'ipotesi $\frac{\sigma_2^2}{\omega^2\epsilon_2^2} \gg 1$, si può scrivere:

$$\beta_1^2 \sin^2 \theta_0 \simeq 0 \quad \left(\frac{\sigma_2^2}{\omega^2\epsilon_2^2} \gg 1\right) \quad (4.6.32)$$

e, quindi, risulta:

$$\tan \delta_{\parallel} = \frac{4\mu_1\mu_2\beta_1\beta_2^3 \cos \theta_0}{2\mu_2^2\beta_1^2\beta_2^2 - 4\mu_1^2\beta_2^4 \cos^2 \theta_0} = \frac{2\mu_1\mu_2\beta_1\beta_2 \cos \theta_0}{\mu_2^2\beta_1^2 - 2\mu_1^2\beta_2^2 \cos^2 \theta_0} \quad (4.6.33)$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\mu_1^2\beta_2^2$ e ponendo $x = \frac{\mu_2\beta_1}{\mu_1\beta_2}$, si trova:

$$\tan \delta_{\parallel} = \frac{2x \cos \theta_0}{x^2 - 2 \cos^2 \theta_0} \quad (4.6.34)$$

Coefficienti di riflessione R_{\perp} e R_{\parallel} per superfici conduttrici con $x = .05$

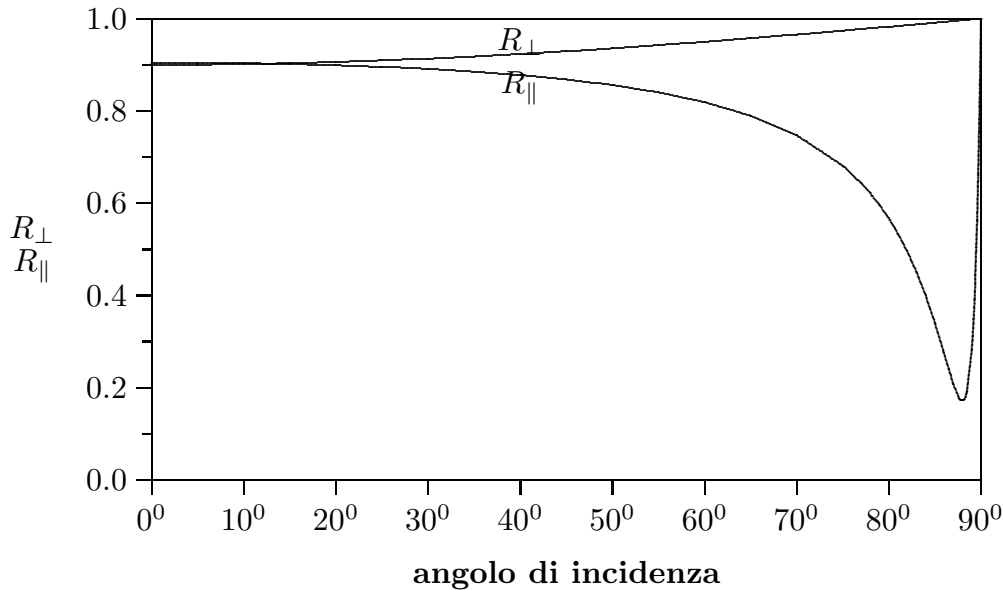


fig.4.6-1

Sempre nel caso dei metalli si ha che $R_{\perp} = 1 - 2x \cos \theta_0$, anche alle frequenze radio piú elevate si mantiene prossimo all'unitá, risultando praticamente indipendente dall'angolo di incidenza.

Per una superficie di separazione aria-rame si ha: $\epsilon_1 \simeq \epsilon_0$, $\mu_1 \simeq \mu_2$, $\sigma_2 = 5.8 \cdot 10^7$ S/m.

Quindi $x_{rame} = 1.38 \cdot 10^{-9} \sqrt{\nu}$.

Nel caso del ferro, la conduttivitá é circa un decimo di quella del rame e la permeabilitá magnetica puó essere dell'ordine di 10^3 , pertanto $x_{ferro} = 1.38 \cdot 10^{-7} \sqrt{\nu}$ che é sempre molto piccolo, anche per lunghezze d'onda centimetriche.

A titolo di esempio consideriamo il sistema aria-mare.

Si noterá che R_{\perp} é maggiore di R_{\parallel} e che per un angolo di incidenza prossimo a 90° il coefficiente R_{\parallel} raggiunge il valore minimo. Quindi, se il vettore elettrico dell'onda incidente é polarizzato linearmente in una direzione che non sia né normale né parallela al piano di incidenza, l'onda riflessa dalla superficie del mare sará polarizzata ellitticamente. Inoltre, se l'antenna trasmittente é verticale, l'onda sará polarizzata nel piano di incidenza, e quindi, se essa incontra il mare con incidenza radente, puó venire quasi completamente assorbita. Se aumentiamo la frequenza, o se l'onda incide su acqua pura o sulla terra, per le quali la conduttivitá é di solito dell'ordine di 10^{-4} o anche minore, non sono piú valide le approssimazioni che abbiamo fatto prima.

Consideriamo, pertanto, il Caso II: $\frac{\sigma^2}{\epsilon_2^2 \omega^2} \ll 1$ e riprendiamo le formule studiate in precedenza; si ha:

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\sigma_2^2}{\epsilon_2^2 \omega^2} \right) \simeq \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r_2}} \quad (\mu_{r_2} \simeq 1) \quad (4.6.35)$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_2}{2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = 188.3 \frac{\sigma_2}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \quad (\mu_{r_2} \simeq 1) \quad (4.6.36)$$

Se la frequenza é sufficientemente elevata possiamo avere $\beta_2 \gg \alpha_2$ e i coefficienti p e q si riducono a:

$$p^2 \simeq 0, \quad q^2 \simeq \beta_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 \quad (4.6.37)$$

e quindi:

$$\rho_{\perp}^2 = \frac{(\mu_1 q - \mu_2 \beta_1 \cos \theta_0)^2 + \mu_1^2 p^2}{(\mu_1 q + \mu_2 \beta_1 \cos \theta_0)^2 + \mu_1^2 p^2} \quad (4.6.38)$$

Nell'ipotesi che $\mu_1 \simeq \mu_2$ e ricordando che $\beta_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r_1}}$ e $\mu_{r_1} \simeq 1$ si ha:

$$\begin{aligned} \rho_{\perp}^2 &\simeq \frac{\left(q - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 \right)^2}{\left(q + \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 \right)^2} \simeq \frac{\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r_2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 \right)^2}{\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r_2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} + \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 \right)^2} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} - \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 \right)^2}{\left(\sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} + \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 \right)^2} \end{aligned} \quad (4.6.39)$$

Analogamente:

$$\rho_{\parallel}^2 \simeq \left(\frac{\epsilon_{r_2} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_{r_1}} (\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}}}{\epsilon_{r_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_1}} (\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \quad (4.6.40)$$

In questo grado di approssimazione hanno influenza solo le proprietà dielettriche del mezzo e la ρ_{\parallel}^2 si identifica con la formula calcolata per i mezzi dielettrici.

Consideriamo per esempio una superficie di separazione aria-acqua pura; si ha: $\epsilon_{r_2} = 81$, $\epsilon_{r_1} = 1$, $\sigma_2 = 2 \cdot 10^{-4}$.

Ne segue:

$$\frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} = \frac{4.44 \cdot 10^4}{\nu}, \quad \beta_2 \simeq 1.88 \cdot 10^{-7} \nu \quad \alpha_2 \simeq 4.18 \cdot 10^{-3}$$

Pertanto le approssimazioni precedenti sono valide se $\nu > 10^6 Hz$.

Le costanti per la terra e la roccia variano notevolmente, ma si può considerare come tipico il caso $\epsilon_{r_2} = 6$, $\sigma_2 \simeq 10^{-5}$. Allora:

$$\frac{\sigma_2}{\omega\epsilon_2} = \frac{3 \cdot 10^4}{\nu}, \quad \beta_2 \simeq 5.1 \cdot 10^{-8} \nu \quad \alpha_2 \simeq 7.7 \cdot 10^{-4}$$

Anche in questo caso le approssimazioni precedenti valgono per $\nu > 10^6 Hz$.

Per frequenze maggiori di $10^6 Hz$ l'acqua pura e la terra asciutta o le rocce si comportano come dielettrici per quanto si riferisce alle loro proprietà riflettenti. L'onda trasmessa si attenua rapidamente a causa del fattore α_2 .

Appendice al Cap. 4

4A.1 - Calcolo esplicito dei parametri relativi alle formule del Cap.4: Rifrazione in un mezzo conduttore e riflessione da una superficie conduttrice

Nella valutazione dei coefficienti di riflessione intervengono i parametri p e q di cui abbiamo dato le formule senza dimostrazione.

Ci proponiamo di ricavare tali formule.

Si ha:

$$k_2 \cos \theta_2 = k_2 \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2 \theta_0} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0} = \sqrt{\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 + 2i\alpha_2\beta_2} \quad (4A.1.1)$$

che, per la (4.5.5), si può scrivere:

$$q + ip = \sqrt{\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 + 2i\alpha_2\beta_2} \quad (4A.1.2)$$

che é equivalente a:

$$\begin{aligned} q^2 - p^2 &= \beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 \\ pq &= \alpha_2\beta_2 \end{aligned} \quad (4A.1.3)$$

Dividendo membro a membro si ottiene:

$$\frac{q}{p} - \frac{p}{q} = \frac{\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0}{\alpha_2\beta_2} \quad (4A.1.4)$$

Moltiplicando ambo i membri per $\frac{q}{p}$ si ottiene:

$$\frac{q^2}{p^2} - \left(\frac{\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0}{\alpha_2\beta_2} \right) \frac{q}{p} - 1 = 0 \quad (4A.1.5)$$

Essendo il secondo membro della seconda equazione delle (4A.1.3) positivo anche il rapporto $\left(\frac{q}{p}\right)$ deve essere positivo e pertanto dobbiamo prendere solo la soluzione positiva della (4A.1.5).

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0}{\alpha_2\beta_2} + \sqrt{\frac{(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0)^2}{\alpha_2^2\beta_2^2} + 4} \right] \quad (4A.1.6)$$

Moltiplichiamo la (4A.1.6) per la seconda equazione (4A.1.3):

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2} \left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 + \sqrt{(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0)^2 + 4\alpha_2^2\beta_2^2} \right] \quad (4A.1.7)$$

Dalla prima equazione delle (4A.1.3) segue immediatamente:

$$p^2(\theta_0) = \frac{1}{2} \left[-\beta_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 + \sqrt{4\alpha_2^2 \beta_2^2 + (\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0)^2} \right] \quad (4A.1.8)$$

Ovviamente per:

$$\beta_1^2 n^2(\theta_0) = q^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0$$

si ha, facilmente:

$$\beta_1^2 n^2(\theta_0) = \frac{1}{2} \left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 + \sqrt{(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0)^2 + 4\alpha_2^2 \beta_2^2} \right] \quad (4A.1.9)$$

Per quanto riguarda le equazioni di Ketteler (4.5.21)÷(4.5.23), la prima é ovvia:

$$\beta_1^2 n^2(\theta_0) - p^2(\theta_0) = \beta_2^2 - \alpha_2^2 \quad (4A.1.10)$$

e la seconda é data dalla seconda equazione delle (4A.1.3).

Per quanto riguarda la terza relazione ausiliaria di Ketteler, dalle formule (4.5.16) e (4.5.14) del testo si ha:

$$\beta_1 n(\theta_0) = \frac{q}{\cos \psi} \quad \text{ne segue} \quad \beta_1 n(\theta_0) p = \frac{qp}{\cos \psi}$$

e, per la seconda equazione delle (4A.1.3):

$$\beta_1 n(\theta_0) p(\theta_0) = \frac{\beta_2 \alpha_2}{\cos \psi} \quad (4A.1.11)$$

Si verifica inoltre che sommando la (4A.1.8) e la (4A.1.7) si ottiene:

$$p^2 + q^2 = \sqrt{4\alpha_2^2 \beta_2^2 + (\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0)^2} \quad (4A.1.12)$$

4A.2 - Calcolo della fase δ_{\perp}

La (4.6.1) può essere posta nella forma:

$$\vec{E}_{1\perp} = \rho_{\perp} e^{-i\delta_{\perp}} \vec{E}_{0\perp} = (a - ib) \vec{E}_{0\perp} \quad (4A.2.1)$$

da cui:

$$\rho_{\perp} \cos \delta_{\perp} = a, \quad \rho_{\perp} \sin \delta_{\perp} = b \quad e \quad \tan \delta_{\perp} = \frac{b}{a} \quad (4A.2.2)$$

Dobbiamo, pertanto, calcolare la parte reale e la parte immaginaria, razionalizzando la (4A.2.1). Moltiplichiamo, quindi, numeratore e denominatore per $(\mu_2\beta_1 \cos \theta_0 + \mu_1q) - i\mu_1p$

Si ha:

$$\begin{aligned} \rho_{\perp} e^{-i\delta_{\perp}} &= \frac{[(\mu_2\beta_1 \cos \theta_0 - \mu_1q) - i\mu_1p][(\mu_2\beta_1 \cos \theta_0 + \mu_1q) - i\mu_1p]}{(\mu_1q + \mu_2\beta_1 \cos \theta_0)^2 + \mu_1^2p^2} = \\ &= \frac{\mu_2^2\beta_1^2 \cos^2 \theta_0 - \mu_1^2q^2 - i\mu_1p\mu_2\beta_1 \cos \theta_0 + i\mu_1^2pq - i\mu_1p\mu_2\beta_1 \cos \theta_0 - i\mu_1^2pq - \mu_1^2p^2}{(\mu_1q + \mu_2\beta_1 \cos \theta_0)^2 + \mu_1^2p^2} = \\ &= \frac{\mu_2^2\beta_1^2 \cos^2 \theta_0 - \mu_1^2(p^2 + q^2) - i2\mu_1\mu_2p\beta_1 \cos \theta_0}{(\mu_1q + \mu_2\beta_1 \cos \theta_0)^2 + \mu_1^2p^2} \end{aligned} \quad (4A.2.3)$$

da cui segue immediatamente:

$$\tan \delta_{\perp} = \frac{2\mu_1\mu_2\beta_1p \cos \theta_0}{\mu_2^2\beta_1^2 \cos^2 \theta_0 - \mu_1^2(p^2 + q^2)} \quad (4A.2.4)$$

4A.3 - Calcolo esplicito della fase δ_{\parallel}

Possiamo scrivere $\rho_{\parallel} e^{-i\delta_{\parallel}} = a - ib$, ne segue che:

$$\tan \delta_{\parallel} = \frac{b}{a} \quad (4A.3.1)$$

Dobbiamo, pertanto, calcolare la parte reale e la parte immaginaria, razionalizzando la (4.6.6). Moltiplichiamo, quindi, numeratore e denominatore per

$$[\mu_1 \cos \theta_0 (\beta_2^2 - \alpha_2^2) + \mu_2\beta_1q] - i[2\mu_1\alpha_2\beta_2 \cos \theta_0 + \mu_2\beta_1p]$$

Effettuando tale moltiplicazione, per il numeratore si ha:

$$\begin{aligned} &\mu_1^2 \cos^2 \theta_0 (\beta_2^2 - \alpha_2^2)^2 - \mu_2^2\beta_1^2q^2 - i2\mu_1^2\alpha_2\beta_2 (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos^2 \theta_0 - i\mu_1\mu_2\beta_1p (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos \theta_0 + \\ &+ i2q\mu_1\mu_2\alpha_2\beta_1\beta_2 \cos \theta_0 + i\mu_2^2\beta_1^2pq + i2\mu_1^2\alpha_2\beta_2 (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos^2 \theta_0 + i2\mu_1\mu_2\alpha_2\beta_1\beta_2q \cos \theta_0 - \\ &- i\mu_1\mu_2\beta_1p (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos \theta_0 - i\mu_2^2\beta_1^2pq + 4\mu_1^2\alpha_2^2\beta_2^2 \cos^2 \theta_0 - \mu_2^2\beta_1^2p^2 = \\ &= \left[\mu_1^2 \cos^2 \theta_0 (\beta_2^2 - \alpha_2^2)^2 - \mu_2^2\beta_1^2q^2 + 4\mu_1^2\alpha_2^2\beta_2^2 \cos^2 \theta_0 - \mu_2^2\beta_1^2p^2 \right] - \\ &- i \left[2\mu_1\mu_2\beta_1p (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos \theta_0 - 4\mu_1\mu_2\alpha_2\beta_1\beta_2q \cos \theta_0 \right] = \\ &= \left[\mu_1^2 \cos^2 \theta_0 (\beta_2^2 + \alpha_2^2)^2 - \mu_2^2\beta_1^2 (q^2 + p^2) \right] - i2\mu_1\mu_2\beta_1 \left[(\beta_2^2 - \alpha_2^2) p - 2\alpha_2\beta_2q \right] \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (4A.3.2)$$

Sostituendo al posto di $\alpha_2\beta_2$ la quantità pq , come deriva dalla (4A.1.3) e mettendo in evidenza p si ha:

$$\rho_{\parallel} e^{-i\delta_{\parallel}} = \frac{\left[\mu_1^2 \cos^2 \theta_0 (\beta_2^2 + \alpha_2^2)^2 - \mu_2^2 \beta_1^2 (p^2 + q^2) \right] - i 2\mu_1 \mu_2 \beta_1 p [\beta_2^2 - \alpha_2^2 - 2q^2] \cos \theta_0}{[\mu_1 \cos \theta_0 (\beta_2^2 - \alpha_2^2) + \mu_2 \beta_1 q]^2 + [2\mu_1 \alpha_2 \beta_2 \cos \theta_0 + \mu_2 \beta_1 p]^2} \quad (4A.3.3)$$

Dalla relazione (4A.1.3) si può sostituire $\beta_2^2 - \alpha_2^2$ con $q^2 - p^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0$. Ne segue quindi che:

$$\begin{aligned} \tan \delta_{\parallel} &= \frac{2\mu_1 \mu_2 \beta_1 p [-p^2 - q^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0] \cos \theta_0}{\mu_1^2 \cos^2 \theta_0 (\beta_2^2 + \alpha_2^2)^2 - \mu_2^2 \beta_1^2 (p^2 + q^2)} = \\ &= \frac{2\mu_1 \mu_2 \beta_1 p [p^2 + q^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0] \cos \theta_0}{\mu_2^2 \beta_1^2 (p^2 + q^2) - \mu_1^2 \cos^2 \theta_0 (\beta_2^2 + \alpha_2^2)^2} \end{aligned} \quad (4A.3.4)$$

4A.4 - Calcolo esplicito della formula (4.6.11)

Consideriamo la formula (4.6.8) nell'ipotesi che sia $\mu_1 \simeq \mu_2$:

$$\rho_{\parallel}^2 = \frac{[(\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos \theta_0 - \beta_1 q]^2 + [2\beta_2 \alpha_2 \cos \theta_0 - \beta_1 p]^2}{[(\beta_2^2 - \alpha_2^2) \cos \theta_0 + \beta_1 q]^2 + [2\beta_2 \alpha_2 \cos \theta_0 + \beta_1 p]^2} \quad (4A.4.1)$$

Per la (4.5.12), (4.5.17) e (4.5.18), si ha:

$$q^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 - p^2 = \beta_2^2 - \alpha_2^2 \quad (4A.4.2)$$

$$pq = \beta_2 \alpha_2 \quad (4A.4.3)$$

Quindi l'equazione (4A.4.1) diventa:

$$\rho_{\parallel}^2 = \frac{[(q^2 - p^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0 - \beta_1 q]^2 + [2pq \cos \theta_0 - \beta_1 p]^2}{[(q^2 - p^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0 + \beta_1 q]^2 + [2pq \cos \theta_0 + \beta_1 p]^2} \quad (4A.4.4)$$

Sviluppiamo il numeratore della (4A.4.4):

$$\begin{aligned} & [(q^2 - p^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0 - \beta_1 q]^2 + [2pq \cos \theta_0 - \beta_1 p]^2 = \\ &= (q^2 - p^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0)^2 \cos^2 \theta_0 + \beta_1^2 q^2 - 2\beta_1 q (q^2 - p^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0 + \\ &+ 4p^2 q^2 \cos^2 \theta_0 + \beta_1^2 p^2 - 4\beta_1 p^2 q \cos \theta_0 = \\ &= q^4 \cos^2 \theta_0 + p^4 \cos^2 \theta_0 + \beta_1^4 \sin^4 \theta_0 \cos^2 \theta_0 - \underline{2p^2 q^2 \cos^2 \theta_0} + 2\beta_1^2 q^2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 - \\ &- 2\beta_1^2 p^2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 + \beta_1^2 q^2 - 2\beta_1 q^3 \cos \theta_0 + \underline{\underline{2\beta_1 p^2 q \cos \theta_0}} - 2\beta_1^3 q \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 + \\ &+ \underline{4p^2 q^2 \cos^2 \theta_0} + \beta_1^2 p^2 - \underline{\underline{4\beta_1 p^2 q \cos \theta_0}} \end{aligned} \quad (4A.4.5)$$

Per comodità dividiamo l'equazione (4A.4.5) per $\cos^2 \theta_0$; si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{[(q^2 - p^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0 - \beta_1 q]^2 + [2pq \cos \theta_0 - \beta_1 p]^2}{\cos^2 \theta_0} = \\ & = q^4 + p^4 + \beta_1^4 \sin^4 \theta_0 + 2p^2 q^2 + 2\beta_1^2 q^2 \sin^2 \theta_0 - 2\beta_1^2 p^2 \sin^2 \theta_0 + \frac{\beta_1^2 q^2}{\cos^2 \theta_0} - 2 \frac{\beta_1 q^3}{\cos \theta_0} - \\ & - 2 \frac{\beta_1 p^2 q}{\cos \theta_0} - 2 \frac{\beta_1^3 q \sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} + \frac{\beta_1^2 p^2}{\cos^2 \theta_0} \end{aligned} \quad (4A.4.6)$$

Vogliamo fattorizzare il polinomio del secondo membro dell'equazione (4A.4.6); per questo lo ordiniamo in potenze decrescenti di p e notiamo che eguagliandolo a zero esso rappresenta un'equazione di secondo grado in p^2 . Si ha:

$$\begin{aligned} & p^4 + 2p^2 \left(q^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 - \frac{\beta_1 q}{\cos \theta_0} + \frac{\beta_1^2}{2 \cos^2 \theta_0} \right) + \\ & + \left(q^4 + \beta_1^4 \sin^4 \theta_0 + 2\beta_1^2 q^2 \sin^2 \theta_0 + \frac{\beta_1^2 q^2}{\cos^2 \theta_0} - 2 \frac{\beta_1 q^3}{\cos \theta_0} - 2\beta_1^3 q \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4A.4.7)$$

Il discriminante di questa equazione é:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} & = \left(q^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 - \frac{\beta_1 q}{\cos \theta_0} + \frac{\beta_1^2}{2 \cos^2 \theta_0} \right)^2 - \\ & - \left(q^4 + \beta_1^4 \sin^4 \theta_0 + 2\beta_1^2 q^2 \sin^2 \theta_0 + \frac{\beta_1^2 q^2}{\cos^2 \theta_0} - 2 \frac{\beta_1 q^3}{\cos \theta_0} - 2\beta_1^3 q \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right) = \\ & = \cancel{q^4} + \beta_1^4 \cancel{\sin^4 \theta_0} + \frac{\beta_1^2 q^2}{\cos^2 \theta_0} + \frac{\beta_1^4}{4 \cos^4 \theta_0} - \frac{2\beta_1^2 q^2 \sin^2 \theta_0}{2 \cos^2 \theta_0} - 2 \frac{\beta_1 q^3}{\cos \theta_0} + 2 \frac{\beta_1^2 q^2}{2 \cos^2 \theta_0} + \\ & + \underline{\underline{2\beta_1^3 q \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0}}} - 2 \frac{\beta_1^4 \sin^2 \theta_0}{2 \cos^2 \theta_0} - 2 \frac{\beta_1^3 q}{2 \cos^3 \theta_0} - \cancel{q^4} - \beta_1^4 \cancel{\sin^4 \theta_0} - \frac{2\beta_1^2 q^2 \sin^2 \theta_0}{2 \cos^2 \theta_0} - \frac{\beta_1^2 q^2}{\cos^2 \theta_0} + \\ & + 2 \frac{\beta_1 q^3}{\cos \theta_0} + \underline{\underline{2\beta_1^3 q \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0}}} = \\ & = \frac{\beta_1^4}{4 \cos^4 \theta_0} - 4\beta_1^2 q^2 \sin^2 \theta_0 + \frac{\beta_1^2 q^2}{\cos^2 \theta_0} + 4\beta_1^3 q \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} - \frac{\beta_1^4 \sin^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} - \frac{\beta_1^3 q}{\cos^3 \theta_0} \end{aligned} \quad (4A.4.8)$$

Posto $\sin^2 \theta_0 = 1 - \cos^2 \theta_0$, la (4A.4.8) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= \frac{\beta_1^4}{4 \cos^4 \theta_0} - 4\beta_1^2 q^2 + 4\beta_1^2 q^2 \cos^2 \theta_0 + \frac{\beta_1^2 q^2}{\cos^2 \theta_0} + 4 \frac{\beta_1^3 q}{\cos \theta_0} - \\ &\quad - 4\beta_1^3 q \cos \theta_0 - \frac{\beta_1^4}{\cos^2 \theta_0} + \beta_1^4 - \frac{\beta_1^3 q}{\cos^3 \theta_0} = \\ &= \left(\beta_1^2 + \frac{\beta_1 q}{\cos \theta_0} - \frac{\beta_1^2}{2 \cos^2 \theta_0} - 2\beta_1 q \cos \theta_0 \right)^2 \end{aligned} \quad (4A.4.9)$$

Pertanto le radici dell'equazione (4A.4.7) sono:

$$p_1^2 = - \left(q^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 - \frac{\beta_1 q}{\cos \theta_0} + \frac{\beta_1^2}{2 \cos^2 \theta_0} \right) + \left(\beta_1^2 + \frac{\beta_1 q}{\cos \theta_0} - \frac{\beta_1^2}{2 \cos^2 \theta_0} - 2\beta_1 q \cos \theta_0 \right) \quad (4A.4.10)$$

$$p_2^2 = - \left(q^2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 - \frac{\beta_1 q}{\cos \theta_0} + \frac{\beta_1^2}{2 \cos^2 \theta_0} \right) - \left(\beta_1^2 + \frac{\beta_1 q}{\cos \theta_0} - \frac{\beta_1^2}{2 \cos^2 \theta_0} - 2\beta_1 q \cos \theta_0 \right) \quad (4A.4.11)$$

ossia:

$$\begin{aligned} p_1^2 &= -q^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 + 2 \frac{\beta_1 q}{\cos \theta_0} - 2 \frac{\beta_1^2}{2 \cos^2 \theta_0} + \beta_1^2 - 2\beta_1 q \cos \theta_0 = \\ &= -q^2 + \beta_1^2 \left(\sin^2 \theta_0 - \frac{1}{\cos^2 \theta_0} + 1 \right) + 2\beta_1 q \left(\frac{1}{\cos \theta_0} - \cos \theta_0 \right) = \\ &= -q^2 + \beta_1^2 \left(\frac{\sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 - 1 + \cos^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} \right) + 2\beta_1 q \left(\frac{1 - \cos^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right) = \\ &= -q^2 + \beta_1^2 \left(\frac{\sin^2 \theta_0 - \sin^4 \theta_0 - 1 + 1 - \sin^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} \right) + 2\beta_1 q \left(\frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right) = \\ &= -q^2 + \beta_1^2 \left(\frac{-\sin^4 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} \right) + 2\beta_1 q \sin \theta_0 \tan \theta_0 = \\ &= - \left(q^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0 \tan^2 \theta_0 - 2\beta_1 q \sin \theta_0 \tan \theta_0 \right) = \\ &= - \left(q - \beta_1 \sin \theta_0 \tan \theta_0 \right)^2 \end{aligned} \quad (4A.4.12)$$

$$p_2^2 = -q^2 - \beta_1^2 \cos^2 \theta_0 + 2\beta_1 q \cos \theta_0 = - \left(q - \beta_1 \cos \theta_0 \right)^2 \quad (4A.4.13)$$

Ne segue, quindi:

$$\begin{aligned} &\frac{[(q^2 - p^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0 - \beta_1 q]^2 + [2pq \cos \theta_0 - \beta_1 p]^2}{\cos^2 \theta_0} = (p^2 - p_1^2) (p^2 - p_2^2) = \\ &= \left[p^2 + (q - \beta_1 \sin \theta_0 \tan \theta_0)^2 \right] \left[p^2 + (q - \beta_1 \cos \theta_0)^2 \right] \end{aligned} \quad (4A.4.14)$$

Eseguendo lo stesso procedimento per il denominatore della (4A.4.4), equivalente alla (4A.4.1), si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{[(q^2 - p^2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0 + \beta_1 q]^2 + [2pq \cos \theta_0 + \beta_1 p]^2}{\cos^2 \theta_0} = (p^2 - p_1^2) (p^2 - p_2^2) = \\ & = \left[p^2 + (q + \beta_1 \sin \theta_0 \tan \theta_0)^2 \right] \left[p^2 + (q + \beta_1 \cos \theta_0)^2 \right] \end{aligned} \tag{4A4.15}$$

e la formula (4.6.11) é verificata.