

Cap. 3

**Riflessione e rifrazione su una superficie piana<sup>†</sup>**

**3.1 - Leggi di Snell<sup>1)</sup>**

Consideriamo due mezzi lineari, isotropi, omogenei e di estensione indefinita, separati dalla superficie piana S. Il versore  $\hat{n}$  sia normale al piano S e diretto dalla regione caratterizzata dai parametri  $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$  alla regione caratterizzata dai parametri  $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$  dove viaggia un'onda elettromagnetica piana.

Sia O un'origine fissa che, per comodità, immaginiamo situata su S.

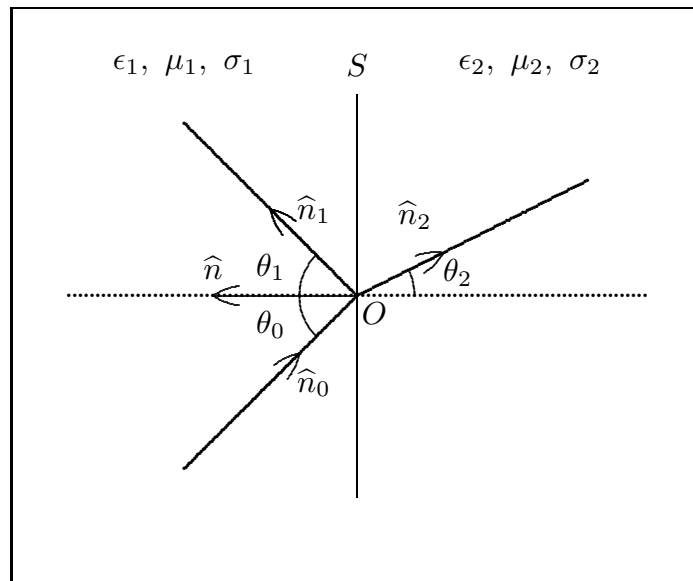


fig.3.1-1

Un generico punto P che si trovi in uno dei due mezzi é individuato dal vettore posizione  $\vec{r}$  e dall'origine O; allora l'equazione della superficie piana S é:

$$\hat{n} \cdot \vec{r}_S = 0 \tag{3.1.1}$$

cioé per tutti i punti di S vale la (3.1.1).

---

<sup>†</sup> Stratton Julius Adams - Electromagnetic Theory - IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, 2007; Stratton Julius Adams: Teoria dell'elettromagnetismo - Boringhieri, 1965.

<sup>1)</sup> Willebrordus Snell van Royen (Snellius): Leiden (The Netherlands), 1581 - Leiden, 1626.

Un'onda piana che si propaga nel mezzo 1 incida su S. Essa é rappresentata da:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{ik_1 \hat{n}_0 \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad \vec{H}_i = \frac{k_1}{\omega \mu_1} \hat{n}_0 \times \vec{E}_i \quad (3.1.2)$$

dove  $\vec{E}_0$  é l'ampiezza complessa dell'onda incidente ed  $\hat{n}_0$  il versore che definisce la direzione di propagazione; indichiamo inoltre con  $k_1$  la costante di propagazione nel mezzo 1 e con  $k_2$  quella nel mezzo 2. Il piano definito dai versori  $\hat{n}$  ed  $\hat{n}_0$  é detto **piano d'incidenza**. Il passaggio dell'onda dal mezzo 1 al mezzo 2 é regolato dalle condizioni al contorno sulla superficie S, per soddisfare le quali si deve postulare (come vedremo) l'esistenza di un campo riflesso nel mezzo 1. Dal punto di vista fisico, é evidente che il campo incidente induce un movimento oscillatorio di cariche libere e legate in prossimitá di S, il quale, a sua volta, irradia un campo secondario sia all'indietro che in avanti.

Introdotta l'ipotesi che tanto l'onda riflessa quanto l'onda trasmessa (o rifratta) siano piane, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \vec{E}_2 e^{ik_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{r} - i\omega_2 t} & \vec{H}_t &= \frac{k_2}{\omega_2 \mu_2} \hat{n}_2 \times \vec{E}_t \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_1 e^{ik'_1 \hat{n}_1 \cdot \vec{r} - i\omega_1 t} & \vec{H}_r &= \frac{k'_1}{\omega_1 \mu_1} \hat{n}_1 \times \vec{E}_r \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

dove  $\hat{n}_1$  ed  $\hat{n}_2$  sono i versori delle direzioni di propagazione delle onde riflesse e trasmesse rispettivamente,  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$  ampiezze complesse, finora indeterminate.

É importante osservare che le ampiezze  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{E}_1$ , ed  $\vec{E}_2$  sono indipendenti dalla posizione e dal tempo.

Sappiamo, d'altra parte, che su ciascun punto della superficie S la componente tangenziale del campo elettrico deve essere continua in ogni istante di tempo t. Pertanto deve essere:

$$\hat{n} \times \left( \vec{E}_0 e^{ik_1 \hat{n}_0 \cdot \vec{r}_S - i\omega t} + \vec{E}_1 e^{ik'_1 \hat{n}_1 \cdot \vec{r}_S - i\omega_1 t} \right) = \hat{n} \times \vec{E}_2 e^{ik_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{r}_S - i\omega_2 t} \quad (3.1.4)$$

Ora, al variare di  $\vec{r}$  su S e del tempo t la (3.1.4) deve essere sempre soddisfatta. Poiché  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$  non dipendono da tali variazioni, condizione necessaria perché la (3.1.4) sia sempre soddisfatta é che gli argomenti dei fattori esponenziali in essa presenti siano identici sulla superficie  $\hat{n} \cdot \vec{r}_S = 0$  e per ogni t, cioé:

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 \text{ e quindi } k'_1 = k_1 \quad (3.1.5)$$

$$k_1 \hat{n}_0 \cdot \vec{r}_S = k_1 \hat{n}_1 \cdot \vec{r}_S = k_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{r}_S \quad (3.1.6)$$

Consideriamo la seguente identitá vettoriale:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (3.1.7)$$

e valutiamola per  $\vec{a} = \vec{b} = \hat{n}$  e  $\vec{c} = \vec{r}$ ; si ha:

$$\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}) = (\hat{n} \cdot \vec{r}) \hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n}) \vec{r}$$

Poiché  $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ , essa si scrive:

$$\vec{r} = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}) + (\hat{n} \cdot \vec{r}) \hat{n} \quad (3.1.8)$$

Ne segue che tutti i punti della superficie S sono individuati dal vettore posizione (3.1.8) avendo in essa posto  $\hat{n} \cdot \vec{r} = 0$ . Quindi:

$$\vec{r}_S = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}_S) \quad (3.1.9)$$

Conseguentemente le (3.1.6) si scrivono:

$$\begin{aligned} k_1 \hat{n}_0 \cdot \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}_S) &= k_2 \hat{n}_2 \cdot \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}_S) \\ k_1 \hat{n}_0 \cdot \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}_S) &= k_1 \hat{n}_1 \cdot \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}_S) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Consideriamo, ora, la seguente identità vettoriale:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})$$

Per  $\vec{a} = \hat{n}_0$ ,  $\vec{b} = \hat{n}$ ,  $\vec{c} = \hat{n}$ ,  $\vec{d} = \vec{r}_S$ , si ha:

$$\hat{n}_0 \cdot \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}_S) = (\hat{n}_0 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_S) \quad (3.1.11)$$

Cosicché le (3.1.10) diventano:

$$\begin{aligned} k_1 (\hat{n}_0 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_S) &= k_2 (\hat{n}_2 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_S) \\ k_1 (\hat{n}_0 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_S) &= k_1 (\hat{n}_1 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_S) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

che si scrivono

$$\begin{aligned} (k_1 \hat{n}_0 \times \hat{n} - k_2 \hat{n}_2 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_S) &= 0 \\ (\hat{n}_0 \times \hat{n} - \hat{n}_1 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_S) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Poiché la validità delle (3.1.13) é assicurata per qualunque valore di  $\vec{r}_S$ , si ha:

$$\begin{aligned} k_1 \hat{n}_0 \times \hat{n} &= k_2 \hat{n}_2 \times \hat{n} \\ \hat{n}_0 \times \hat{n} &= \hat{n}_1 \times \hat{n} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Da queste due relazioni si deduce che  $\hat{n}$ ,  $\hat{n}_0$ ,  $\hat{n}_1$  ed  $\hat{n}_2$  sono tutti complanari; cioè i piani di fase costante delle onde trasmessa e riflessa sono normali al piano di incidenza.

Dalla seconda delle (3.1.14) si deduce che:

$$\sin(\pi - \theta_0) = \sin \theta_1$$

cioé

$$\sin \theta_0 = \sin \theta_1 \quad (3.1.15)$$

che conduce alla legge di riflessione: **l'angolo di incidenza é uguale all'angolo di riflessione.**

Dalla prima delle (3.1.14) si deduce che:

$$k_1 \sin(\pi - \theta_0) = k_2 \sin(\pi - \theta_2)$$

cioé

$$k_1 \sin \theta_0 = k_2 \sin \theta_2 \quad (3.1.16)$$

che esprime la legge di **Snell o della rifrazione**

### 3.2 - Equazioni di Fresnel<sup>1)</sup>

Si applichino ora le condizioni al contorno per determinare la relazione fra le ampiezze  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$ .

Applicando le condizioni per le componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico supponendo l'interfaccia priva di corrente superficiale, si ha:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_0 + \vec{E}_1) = \hat{n} \times \vec{E}_2, \quad \hat{n} \times (\vec{H}_0 + \vec{H}_1) = \hat{n} \times \vec{H}_2 \quad \text{su } S \quad (3.2.1)$$

Esprimendo il campo magnetico in funzione del campo elettrico per mezzo delle note formule, le (3.2.1) si scrivono:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{E}_0 + \vec{E}_1) &= \hat{n} \times \vec{E}_2 \\ \hat{n} \times (\hat{n}_0 \times \vec{E}_0 + \hat{n}_1 \times \vec{E}_1) \frac{k_1}{\mu_1} &= \hat{n} \times (\hat{n}_2 \times \vec{E}_2) \frac{k_2}{\mu_2} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

La direzione del vettore primario  $\vec{E}_0$  é del tutto arbitraria, ma si puó sempre scomporre in una componente normale al piano di incidenza e quindi tangente a S, e in una componente giacente sul piano di incidenza. Il calcolo si semplifica notevolmente se si trattano separatamente queste due componenti dell'onda incidente.

#### Caso I - $\vec{E}_0$ normale al piano di incidenza

---

<sup>1)</sup> Augustin Jean Fresnel: Broglie (France), 1788 - Ville d'Avray, Paris, 1827.

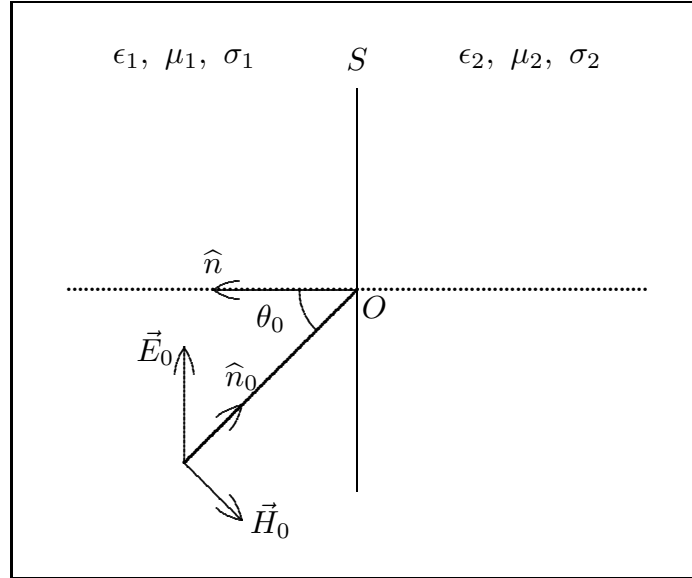


fig.3.2-1

In questo caso si ha:

$$\hat{n} \cdot \vec{E}_0 = \hat{n}_0 \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (3.2.3)$$

Poiché i mezzi sono isotropi, i vettori elettrici dell'onda trasmessa e riflessa devono essere paralleli a  $\vec{E}_0$  e quindi normali al piano di incidenza, cioè deve aversi:

$$\hat{n} \cdot \vec{E}_1 = \hat{n} \cdot \vec{E}_2 = 0 \quad (3.2.4)$$

Scriviamo in maniera diversa le equazioni (3.2.2). Moltiplichiamo la prima vettorialmente per  $\hat{n}$ ; si ha:

$$\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{E}_0) + \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{E}_1) = \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{E}_2) \quad (3.2.5)$$

Applichiamo l'identità vettoriale (3.1.7) alla (3.2.5) e alla seconda delle (3.2.2) ottenendo:

$$(\hat{n} \cdot \vec{E}_0) \hat{n} - \vec{E}_0 + (\hat{n} \cdot \vec{E}_1) \hat{n} - \vec{E}_1 = (\hat{n} \cdot \vec{E}_2) \hat{n} - \vec{E}_2 \quad (3.2.6)$$

$$\left[ (\hat{n} \cdot \vec{E}_0) \hat{n}_0 - (\hat{n} \cdot \hat{n}_0) \vec{E}_0 + (\hat{n} \cdot \vec{E}_1) \hat{n}_1 - (\hat{n} \cdot \hat{n}_1) \vec{E}_1 \right] \frac{k_1}{\mu_1} = \left[ (\hat{n} \cdot \vec{E}_2) \hat{n}_2 - (\hat{n} \cdot \hat{n}_2) \vec{E}_2 \right] \frac{k_2}{\mu_2} \quad (3.2.7)$$

Dalla figura 3.1-1 si ha:

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \hat{n}_0 &= \cos(\pi - \theta_0) = -\cos \theta_0 \\ \hat{n} \cdot \hat{n}_1 &= \cos \theta_1 \\ \hat{n} \cdot \hat{n}_2 &= \cos(\pi - \theta_2) = -\cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Sostituendo nella (3.2.6) e nella (3.2.7) le (3.2.3), (3.2.4), e (3.2.8), si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 + \vec{E}_1 &= \vec{E}_2 \\ \frac{k_1}{\mu_1} \left[ \vec{E}_0 \cos \theta_0 - \vec{E}_1 \cos \theta_1 \right] &= \frac{k_2}{\mu_2} \vec{E}_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Ricavando  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$  in funzione di  $\vec{E}_0$  si ha:

$$\begin{aligned} -\vec{E}_1 + \vec{E}_2 &= \vec{E}_0 \\ \vec{E}_1 \cos \theta_1 + \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \vec{E}_2 \cos \theta_2 &= \vec{E}_0 \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Da cui:

$$\vec{E}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \vec{E}_0 & 1 \\ \vec{E}_0 \cos \theta_0 & \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \cos \theta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & +1 \\ \cos \theta_1 & \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \cos \theta_2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \cos \theta_2 - \cos \theta_0}{\frac{-\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \cos \theta_2 - \cos \theta_1} \vec{E}_0$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\mu_2 k_1 \cos \theta_0 - \mu_1 k_2 \cos \theta_2}{\mu_1 k_2 \cos \theta_2 + \mu_2 k_1 \cos \theta_1} \vec{E}_0} \quad (3.2.11)$$

Analogamente:

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{\mu_2 k_1 (\cos \theta_0 + \cos \theta_1)}{\mu_1 k_2 \cos \theta_2 + \mu_2 k_1 \cos \theta_1} \vec{E}_0} \quad (3.2.12)$$

Ricordiamo che la (3.2.11) e la (3.2.12) valgono per  $\hat{n} \cdot \vec{E}_0 = 0$ . É conveniente esprimere queste formule in funzione soltanto dell'angolo di incidenza  $\theta_0$ ; applicando la (3.1.15) e la (3.1.16) si ha:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \theta_1 \\ \sin \theta_2 &= \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_0 \\ \cos \theta_2 &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2 \theta_0} = \frac{1}{k_2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0} \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

La (3.2.11) e la (3.2.12) si scrivono, allora:

$$\vec{E}_1 = \frac{\mu_2 k_1 \cos \theta_0 - \mu_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}}{\mu_2 k_1 \cos \theta_0 + \mu_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}} \vec{E}_0 \quad (3.2.14)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{2\mu_2 k_1 \cos \theta_0}{\mu_2 k_1 \cos \theta_0 + \mu_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}} \vec{E}_0 \quad (3.2.15)$$

**Caso II -  $\vec{E}_0$  giacente nel piano di incidenza**

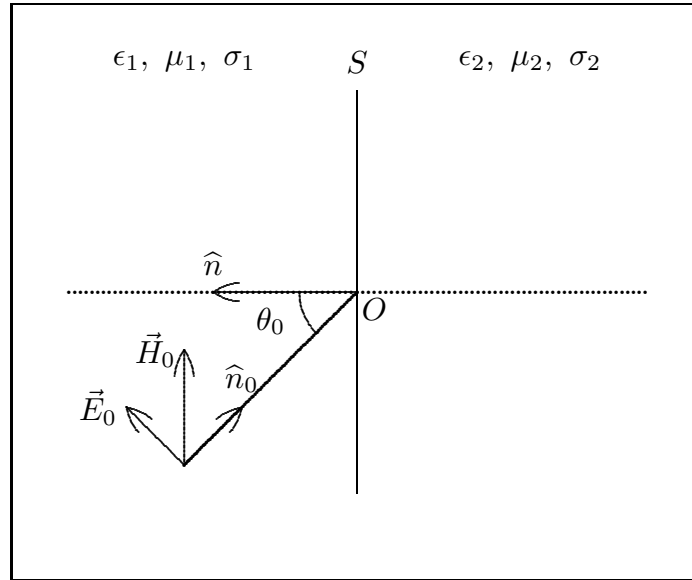


fig.3.2-2

In questo caso conviene considerare i campi magnetici che sono normali al piano di incidenza e quindi paralleli a S. Si ha perciò:

$$\hat{n} \cdot \vec{H}_0 = \hat{n} \cdot \vec{H}_1 = \hat{n} \cdot \vec{H}_2 = 0 \quad (3.2.16)$$

Procediamo come nel caso precedente, prendendo come punto di partenza le equazioni (3.2.1):

$$\hat{n} \times (\vec{E}_0 + \vec{E}_1) = \hat{n} \times \vec{E}_2, \quad \hat{n} \times (\vec{H}_0 + \vec{H}_1) = \hat{n} \times \vec{H}_2 \quad \text{su } S \quad (3.2.1)$$

esprimendo però il campo elettrico in funzione del campo magnetico.

Consideriamo la seconda della (3.1.2) e della (3.1.3) e prendiamo soltanto le relazioni fra le ampiezze:

$$\vec{H}_0 = \frac{k_1}{\omega \mu_1} \hat{n}_0 \times \vec{E}_0, \quad \vec{H}_2 = \frac{k_2}{\omega \mu_2} \hat{n}_2 \times \vec{E}_2, \quad \vec{H}_1 = \frac{k_1}{\omega \mu_1} \hat{n}_1 \times \vec{E}_1 \quad (3.2.17)$$

Moltiplichiamo vettorialmente per  $\hat{n}_0$  la prima, per  $\hat{n}_2$  la seconda e per  $\hat{n}_1$  la terza e applichiamo ai secondi membri l'identit  vettoriale (3.1.7). Si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\omega\mu_1}{k_1}\hat{n}_0 \times \vec{H}_0 &= (\hat{n}_0 \cdot \vec{E}_0)\hat{n}_0 - \vec{E}_0, \\ \frac{\omega\mu_2}{k_2}\hat{n}_2 \times \vec{H}_2 &= (\hat{n}_2 \cdot \vec{E}_2)\hat{n}_2 - \vec{E}_2, \\ \frac{\omega\mu_1}{k_1}\hat{n}_1 \times \vec{H}_1 &= (\hat{n}_1 \cdot \vec{E}_1)\hat{n}_1 - \vec{E}_1\end{aligned}$$

Essendo sempre:

$$\hat{n}_0 \cdot \vec{E}_0 = \hat{n}_1 \cdot \vec{E}_1 = \hat{n}_2 \cdot \vec{E}_2 = 0$$

si ha:

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= -\frac{\omega\mu_1}{k_1}\hat{n}_0 \times \vec{H}_0 \\ \vec{E}_1 &= -\frac{\omega\mu_1}{k_1}\hat{n}_1 \times \vec{H}_1 \\ \vec{E}_2 &= -\frac{\omega\mu_2}{k_2}\hat{n}_2 \times \vec{H}_2\end{aligned}\tag{3.2.18}$$

Le (3.2.1) con la sostituzione delle (3.2.18) nella prima di esse diventano:

$$\begin{aligned}-\frac{\omega\mu_1}{k_1}\hat{n} \times \hat{n}_0 \times \vec{H}_0 - \frac{\omega\mu_1}{k_1}\hat{n} \times \hat{n}_1 \times \vec{H}_1 &= -\frac{\omega\mu_2}{k_2}\hat{n} \times \hat{n}_2 \times \vec{H}_2 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_0 + \vec{H}_1) &= \hat{n} \times \vec{H}_2\end{aligned}\tag{3.2.19}$$

Moltiplichiamo la seconda delle (3.2.19) vettorialmente per  $\hat{n}$  ed applichiamo ad entrambe l'identit  (3.1.7). Si ha:

$$\begin{aligned}-\frac{\omega\mu_1}{k_1} [(\hat{n} \cdot \vec{H}_0)\hat{n}_0 - (\hat{n} \cdot \hat{n}_0)\vec{H}_0] - \frac{\omega\mu_1}{k_1} [(\hat{n} \cdot \vec{H}_1)\hat{n}_1 - (\hat{n} \cdot \hat{n}_1)\vec{H}_1] &= \\ = -\frac{\omega\mu_2}{k_2} [(\hat{n} \cdot \vec{H}_2)\hat{n}_2 - (\hat{n} \cdot \hat{n}_2)\vec{H}_2]\end{aligned}\tag{3.2.20}$$

$$(\hat{n} \cdot \vec{H}_0)\hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n})\vec{H}_0 + (\hat{n} \cdot \vec{H}_1)\hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n})\vec{H}_1 = (\hat{n} \cdot \vec{H}_2)\hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n})\vec{H}_2$$

Applicando le (3.2.16) e le (3.2.8) si ha:

$$\begin{aligned}-\frac{\mu_1}{k_1} [\vec{H}_0 \cos \theta_0 - \vec{H}_1 \cos \theta_1] &= -\frac{\mu_2}{k_2}\vec{H}_2 \cos \theta_2 \\ \vec{H}_0 + \vec{H}_1 &= \vec{H}_2\end{aligned}\tag{3.2.21}$$

che si scrivono:

$$\begin{aligned}\vec{H}_0 \cos \theta_0 - \vec{H}_1 \cos \theta_1 &= \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2}\vec{H}_2 \cos \theta_2 \\ \vec{H}_0 + \vec{H}_1 &= \vec{H}_2\end{aligned}\tag{3.2.22}$$



Ricavando  $\vec{H}_1$  e  $\vec{H}_2$  in funzione di  $\vec{H}_0$ , si ha:

$$\begin{aligned}\vec{H}_1 \cos \theta_1 + \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \vec{H}_2 \cos \theta_2 &= \vec{H}_0 \cos \theta_0 \\ \vec{H}_1 - \vec{H}_2 &= -\vec{H}_0\end{aligned}$$

$$\vec{H}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \vec{H}_0 \cos \theta_0 & \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \cos \theta_2 \\ -\vec{H}_0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta_1 & \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \cos \theta_2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \cos \theta_2 - \cos \theta_0}{-\frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \cos \theta_2 - \cos \theta_1} \vec{H}_0$$

cioé:

$$\boxed{\vec{H}_1 = \frac{\mu_1 k_2 \cos \theta_0 - \mu_2 k_1 \cos \theta_2}{\mu_1 k_2 \cos \theta_1 + \mu_2 k_1 \cos \theta_2} \vec{H}_0} \quad (3.2.23)$$

Analogamente:

$$\boxed{\vec{H}_2 = \frac{\mu_1 k_2 (\cos \theta_0 + \cos \theta_1)}{\mu_1 k_2 \cos \theta_1 + \mu_2 k_1 \cos \theta_2} \vec{H}_0} \quad (3.2.24)$$

Esprimendo la (3.2.23) e (3.2.24) in funzione di  $\theta_0$  attraverso le (3.2.13), cioè ponendo:

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= \cos \theta_0 \\ \cos \theta_2 &= \frac{1}{k_2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}\end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\vec{H}_1 &= \frac{\mu_1 k_2 \cos \theta_0 - \mu_2 k_1 \frac{1}{k_2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}}{\mu_1 k_2 \cos \theta_0 + \mu_2 k_1 \frac{1}{k_2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}} \vec{H}_0 = \\ &= \frac{\mu_1 k_2^2 \cos \theta_0 - \mu_2 k_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}}{\mu_1 k_2^2 \cos \theta_0 + \mu_2 k_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}} \vec{H}_0 \\ \vec{H}_2 &= \frac{2\mu_1 k_2^2 \cos \theta_0}{\mu_1 k_2^2 \cos \theta_0 + \mu_2 k_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}} \vec{H}_0\end{aligned} \quad (3.2.25)$$

I rispettivi campi elettrici si ricavano dalle (3.2.18).

Nel caso di incidenza normale ( $\theta_0 = 0$ ) i due casi non si possono distinguere e si ha dalle (3.2.14) e (3.2.15):

$$\vec{E}_{1\perp} = \frac{\mu_2 k_1 - \mu_1 k_2}{\mu_2 k_1 + \mu_1 k_2} \vec{E}_{0\perp}, \quad \vec{E}_{2\perp} = \frac{2\mu_2 k_1}{\mu_2 k_1 + \mu_1 k_2} \vec{E}_{0\perp}, \quad \theta_0 = 0 \quad (\vec{E}_0 \perp \text{ al piano di incidenza}) \quad (3.2.26)$$

e dalle (3.2.25):

$$\vec{H}_{1\perp} = \frac{\mu_1 k_2 - \mu_2 k_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1} \vec{H}_{0\perp}, \quad \vec{H}_{2\perp} = \frac{2\mu_1 k_2}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1} \vec{H}_{0\perp}, \quad \theta_0 = 0 \quad (\vec{E}_0 \parallel \text{ al piano di incidenza}) \quad (3.2.27)$$

Dimostriamo che il campo elettrico derivato dalla (3.2.27) coincide con il campo elettrico dato dalla (3.2.26); dalle formule (3.2.18), tenendo conto che per incidenza normale  $\hat{n}_1 = -\hat{n}_0$  ed  $\hat{n}_2 = \hat{n}_0$ , si ha:

$$\vec{E}_{1\parallel} = -\frac{\omega\mu_1}{k_1} \hat{n}_1 \times \vec{H}_{1\perp} = \frac{\omega\mu_1}{k_1} \left( \frac{\mu_1 k_2 - \mu_2 k_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1} \right) \hat{n}_0 \times \vec{H}_{0\perp} = \left( \frac{\mu_2 k_1 - \mu_1 k_2}{\mu_2 k_1 + \mu_1 k_2} \right) \vec{E}_{0\parallel} \quad (3.2.28)$$

Le formule precedenti furono ottenute per la prima volta da Fresnel nel 1823 partendo dalle proprietà dinamiche di un ipotetico etere elastico.

### 3.3 - Leggi di Snell per mezzi dielettrici perfetti

Supponiamo, inizialmente, che i due mezzi siano dielettrici perfetti e cioè abbiano entrambi conduttività nulle ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ), segue allora che:

$$k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \quad e \quad k_2^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_2 \quad (3.3.1)$$

Dalle (3.2.13) si ha:

$$\sin \theta_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin \theta_0 \quad (3.3.2)$$

avendo posto, come praticamente accade nei casi concreti:  $\mu_1 = \mu_2$ .

Posto  $\sqrt{\epsilon_{r1}} = n_1 = \frac{c}{v_{f1}}$  e  $\sqrt{\epsilon_{r2}} = n_2 = \frac{c}{v_{f2}}$  si ha la legge di Snell per i dielettrici:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{f2}}{v_{f1}} \quad (3.3.3)$$

dove  $v_{f1}$  e  $v_{f2}$  sono le velocità di fase nei rispettivi mezzi.

Se  $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$ , ad ogni angolo di incidenza  $\theta_0$  corrisponde un angolo di rifrazione  $\theta_2$  reale e si ha  $\theta_2 < \theta_0$ , cioè: **se la radiazione elettromagnetica passa da un mezzo meno rifrangente ad uno più rifrangente la sua direzione di propagazione in questo mezzo si avvicina alla direzione normale alla superficie di separazione.**

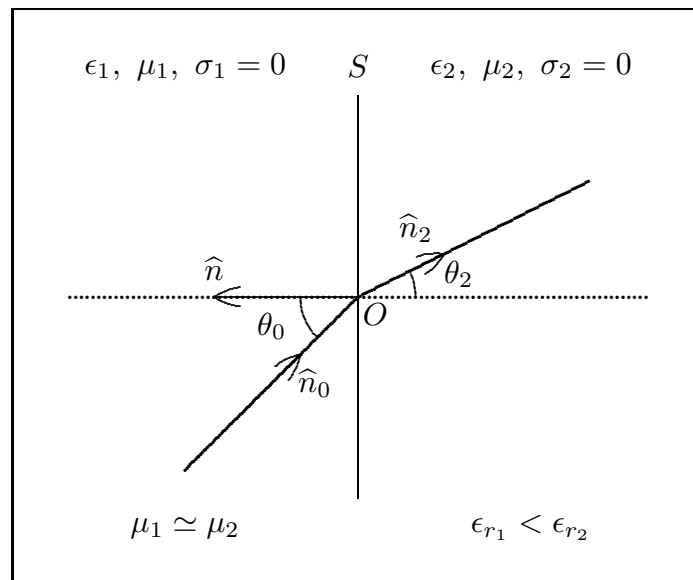


fig.3.3-1

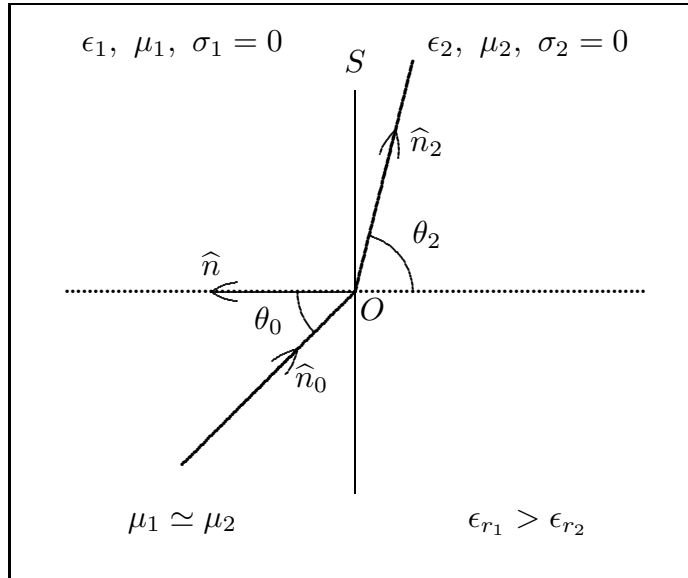


fig.3.3-2

Se, invece, é  $\epsilon_{r2} < \epsilon_{r1}$  come nel caso di passaggio da un dielettrico solido o liquido all'aria, allora  $\theta_2$  é reale solo nell'intervallo:

$$\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_0 \leq 1 \quad (3.3.4)$$

e risulta  $\theta_2 > \theta_0$ , cioè: **se la radiazione elettromagnetica passa da un mezzo piú rifrangente ad uno meno rifrangente la sua direzione di propagazione in questo mezzo si allontana dalla direzione normale alla superficie di separazione.**

Quando  $\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_0 > 1$  si ha il fenomeno della **riflessione totale** che discuteremo a parte.

### 3.4 - Formule di Fresnel per mezzi dielettrici perfetti - $\vec{E}_0$ normale al piano di incidenza

Nel caso di mezzi dielettrici quando  $\vec{E}_0$  é normale al piano di incidenza le formule (3.2.11) e (3.2.12) diventano:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2}{\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2 + \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0} \vec{E}_0 = \frac{\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} \cos \theta_0 - \cos \theta_2}{\cos \theta_2 + \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} \cos \theta_0} \vec{E}_0 = \\ &= \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_2}{\cos \theta_2 \sin \theta_0 + \sin \theta_2 \cos \theta_0} \vec{E}_0 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} \vec{E}_0 \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= \frac{\sqrt{\epsilon_1}(\cos \theta_0 + \cos \theta_1)}{\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2 + \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1} \vec{E}_0 = \frac{\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} 2 \cos \theta_0}{\cos \theta_2 + \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} \cos \theta_0} \vec{E}_0 = \\ &= \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_0}{\cos \theta_2 \sin \theta_0 + \sin \theta_2 \cos \theta_0} \vec{E}_0 = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_0}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} \vec{E}_0 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

In funzione soltanto di  $\theta_0$ , dalle (3.2.14) e (3.2.15) si ha:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_0}} \vec{E}_0 \quad (3.4.3)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}} \cos \theta_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_0}} \vec{E}_0 \quad (3.4.4)$$

Dalla (3.4.2) e (3.4.4) si deduce che il campo elettrico  $\vec{E}_2$  associato all'onda rifratta é sempre in fase con quello dell'onda incidente.

Viceversa, dalla (3.4.1) e (3.4.3) si deduce che la fase del campo elettrico associato all'onda riflessa dipende dai valori relativi di  $\theta_2$  e  $\theta_0$ ; cosí se  $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$  allora  $\theta_2 < \theta_0$  e quindi  $\vec{E}_1$  ha verso opposto ad  $\vec{E}_0$ ; presenta, cioé, una differenza di fase di  $180^\circ$  rispetto al campo dell'onda incidente.

### 3.5 - Formule di Fresnel per mezzi dielettrici perfetti - $\vec{E}_0$ parallelo al piano di incidenza

Nel caso di mezzi dielettrici quando  $\vec{E}_0$  é parallelo al piano di incidenza le formule (3.2.23) e (3.2.24) diventano:

$$\vec{H}_1 = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_2}{\sqrt{\epsilon_{r_2}} \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_2} \vec{H}_0 \quad (3.5.1)$$

$$\vec{H}_2 = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}} (\cos \theta_0 + \cos \theta_1)}{\sqrt{\epsilon_{r_2}} \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_2} \vec{H}_0 \quad (3.5.2)$$

che espresse in funzione di  $\theta_0$  attraverso le (3.2.13), cioè ponendo:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \cos \theta_0 \\ \cos \theta_2 &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} \end{aligned}$$

diventano:

$$\vec{H}_1 = \frac{\epsilon_{r_2} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_{r_1}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0}}{\epsilon_{r_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_1}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0}} \vec{H}_0 \quad (3.5.3)$$

$$\vec{H}_2 = \frac{2\epsilon_{r_2} \cos \theta_0}{\epsilon_{r_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_1}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0}} \vec{H}_0 \quad (3.5.4)$$

É conveniente, talvolta, scrivere le (3.5.1) e (3.5.2) in una forma diversa: dividendo numeratore e denominatore della (3.5.1) per  $\sqrt{\epsilon_{r_2}}$  e ricordando che per la (3.3.2)

$$\frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0},$$

si ha:

$$\vec{H}_1 = \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0 - \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\sin \theta_0 \cos \theta_0 + \sin \theta_2 \cos \theta_2} \vec{H}_0 \quad (3.5.5)$$

Ma:

$$\sin \theta_0 \cos \theta_0 = \frac{\tan \theta_0}{1 + \tan^2 \theta_0} \quad e \quad \sin \theta_2 \cos \theta_2 = \frac{\tan \theta_2}{1 + \tan^2 \theta_2}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= \frac{\tan \theta_0 (1 + \tan^2 \theta_2) - \tan \theta_2 (1 + \tan^2 \theta_0)}{\tan \theta_0 (1 + \tan^2 \theta_2) + \tan \theta_2 (1 + \tan^2 \theta_0)} \vec{H}_0 = \\ &= \frac{(\tan \theta_0 - \tan \theta_2) - \tan \theta_0 \tan \theta_2 (\tan \theta_0 - \tan \theta_2)}{(\tan \theta_0 + \tan \theta_2) + \tan \theta_0 \tan \theta_2 (\tan \theta_0 + \tan \theta_2)} \vec{H}_0 = \\ &= \frac{(\tan \theta_0 - \tan \theta_2) (1 - \tan \theta_0 \tan \theta_2)}{(\tan \theta_0 + \tan \theta_2) (1 + \tan \theta_0 \tan \theta_2)} \vec{H}_0 \end{aligned}$$

Ricordiamo che:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

Quindi:

$$\boxed{\vec{H}_1 = \frac{\tan(\theta_0 - \theta_2)}{\tan(\theta_0 + \theta_2)} \vec{H}_0 \quad (\hat{n} \cdot \vec{H}_0) = 0} \quad (3.5.6)$$

Dividendo numeratore e denominatore della (3.5.2) per  $\sqrt{\epsilon_{r_2}}$  e ponendo  $\frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0}$ , la (3.5.2) diventa:

$$\vec{H}_2 = \frac{2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{\cos \theta_0 \sin \theta_0 + \sin \theta_2 \cos \theta_2} \vec{H}_0$$

che si può scrivere:

$$\vec{H}_2 = \frac{2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{\frac{1}{2} (\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta_2)} \vec{H}_0$$

Ricordando che:  $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$  e posto:  $A + B = 2\theta_0$  e  $A - B = 2\theta_2$ , da cui:  $A = \theta_0 + \theta_2$  e  $B = \theta_0 - \theta_2$ , si ha:

$$\boxed{\vec{H}_2 = \frac{2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} \vec{H}_0 \quad (\hat{n} \cdot \vec{H}_0) = 0} \quad (3.5.7)$$

Ricordando che:

$$\vec{H}_1 = \frac{k_1}{\omega \mu_1} \hat{n}_1 \times \vec{E}_1 \quad (3.5.8)$$

$$\vec{H}_0 = \frac{k_1}{\omega \mu_1} \hat{n}_0 \times \vec{E}_0 \quad (3.5.9)$$

$$\vec{H}_2 = \frac{k_2}{\omega \mu_2} \hat{n}_2 \times \vec{E}_2 \quad (3.5.10)$$

le (3.5.6) e (3.5.7) si scrivono:

$$\hat{n}_1 \times \vec{E}_1 = \frac{\tan(\theta_0 - \theta_2)}{\tan(\theta_0 + \theta_2)} \hat{n}_0 \times \vec{E}_0 \quad (3.5.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_2 \times \vec{E}_2 &= \frac{2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \hat{n}_0 \times \vec{E}_0 = \\ &= \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} \hat{n}_0 \times \vec{E}_0 \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Dalla (3.5.6) si nota che se  $\epsilon_{r_2} > \epsilon_{r_1}$ , cioè  $\theta_2 < \theta_0$ ,  $\tan(\theta_0 - \theta_2)$  é positiva, ma il denominatore  $\tan(\theta_0 + \theta_2)$  diventa negativo se  $\theta_0 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ ; quindi per angoli di incidenza

per cui  $\theta_0 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$  il campo magnetico riflesso presenta una differenza di fase di  $180^\circ$  rispetto al campo incidente.

Per  $\theta_0 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$  segue  $\vec{H}_1 = 0$  e quindi per la seconda delle (3.2.18)  $\vec{E}_1 = 0$ , cioè: **nel caso di campo elettrico polarizzato parallelamente al piano di incidenza esiste un particolare angolo di incidenza  $\theta_B$  per cui non esiste campo riflesso.**

$\theta_B$  prende il nome di **angolo di Brewster.**

Per il calcolo di  $\theta_B$  utilizziamo la (3.5.1); risulta:

$$\vec{H}_1 = 0 \quad \text{se} \quad \sqrt{\epsilon_{r_2}} \cos \theta_B - \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta^*_2 = 0$$

Ma  $\theta^*_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_B$  quindi:

$$\sqrt{\epsilon_{r_2}} \cos \theta_B - \sqrt{\epsilon_{r_1}} \sin \theta_B = 0$$

da cui:

$$\boxed{\tan \theta_B = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} = \frac{n_2}{n_1}} \quad (3.5.13)$$

### 3.6 - Osservazioni sulla riflessione delle componenti parallela e ortogonale del campo elettrico ( $\epsilon_{r_1} < \epsilon_{r_2}$ )

Per la componente parallela riscriviamo le (3.2.18):

$$\vec{E}_0 = -\frac{\omega\mu_1}{k_1} \hat{n}_0 \times \vec{H}_0 \quad (a)$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{\omega\mu_1}{k_1} \hat{n}_1 \times \vec{H}_1 \quad (b)$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\omega\mu_2}{k_2} \hat{n}_2 \times \vec{H}_2 \quad (c)$$

e consideriamo la seguente figura nel caso in cui  $\epsilon_{r_1} < \epsilon_{r_2}$ :



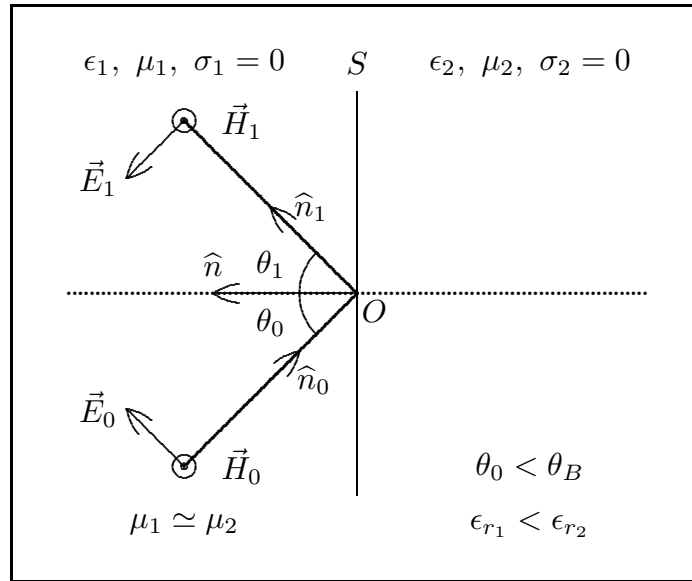


fig.3.6-1

Supponiamo che  $\vec{E}_0$  abbia la traccia in figura, conseguentemente  $\vec{H}_0$  ha la direzione uscente dal foglio compatibile con la (3.2.18.a).

In seguito alla riflessione si ha:

$$\vec{H}_1 = \frac{\tan(\theta_0 - \theta_2)}{\tan(\theta_0 + \theta_2)} \vec{H}_0 \quad (\hat{n} \cdot \vec{H}_0) = 0 \quad (3.6.1)$$

Per  $\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$ ,  $\theta_2 < \theta_0$ , ne segue  $\theta_0 - \theta_2 < \frac{\pi}{2}$  e quindi  $\tan(\theta_0 - \theta_2) > 0$ .

Per quanto riguarda il denominatore, osserviamo che all'aumentare di  $\theta_0$ ,  $\theta_2$  aumenta sempre pur essendo  $\theta_2 < \theta_0$ .

Pertanto per  $\theta_0 < \theta_B$  risulta  $\theta_0 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$  e per  $\theta_0 > \theta_B$  risulta  $\theta_0 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ , quindi si ha:

$$\frac{\tan(\theta_0 - \theta_2)}{\tan(\theta_0 + \theta_2)} > 0 \quad \text{per} \quad \theta_0 < \theta_B \quad (3.6.2)$$

$$\frac{\tan(\theta_0 - \theta_2)}{\tan(\theta_0 + \theta_2)} < 0 \quad \text{per} \quad \theta_0 > \theta_B \quad (3.6.3)$$

Allora per  $\theta_0 < \theta_B$   $\vec{H}_1$  é in fase con  $\vec{H}_0$  ed é cosí tracciato in figura 3.6-1.

Per  $\theta_0 > \theta_B$ ,  $\vec{H}_1$  é opposto in fase ad  $\vec{H}_0$  ed il relativo grafico é il seguente:

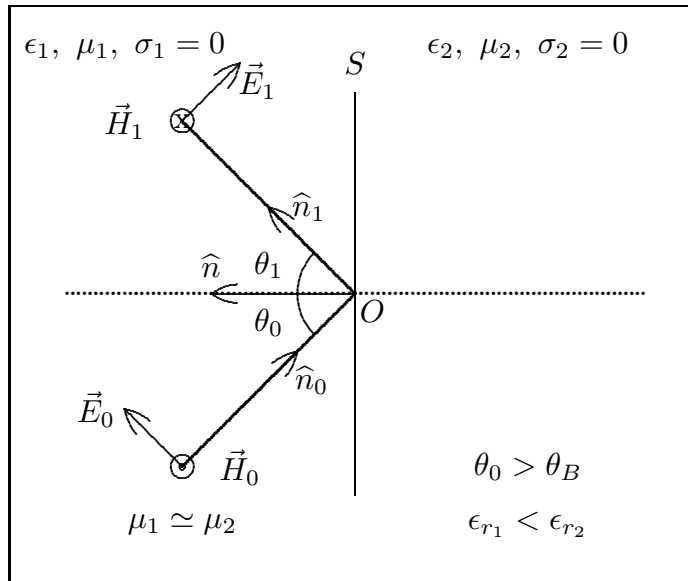


fig.3.6-2

Dalla (3.5.7) si ha che il campo magnetico trasmesso é sempre in fase con quello incidente e quindi la configurazione relativa dei campi trasmessi é eguale a quella dei campi incidenti.

Per quanto riguarda la riflessione della componente ortogonale del campo elettrico ( $\epsilon_{r_1} < \epsilon_{r_2}$ ) osserviamo che dalla (3.4.1) si ha che il campo elettrico riflesso é sempre (per  $\theta_2 < \theta_0$ ) opposto in fase al campo incidente.

Poiché:

$$\vec{H}_1 = \frac{k_1}{\omega\mu_1} \hat{n}_1 \times \vec{E}_1 \quad (3.6.4)$$

$$\vec{H}_0 = \frac{k_1}{\omega\mu_1} \hat{n}_0 \times \vec{E}_0 \quad (3.6.5)$$

$$\vec{H}_2 = \frac{k_2}{\omega\mu_2} \hat{n}_2 \times \vec{E}_2 \quad (3.6.6)$$

la configurazione dei campi é cosí tracciata:

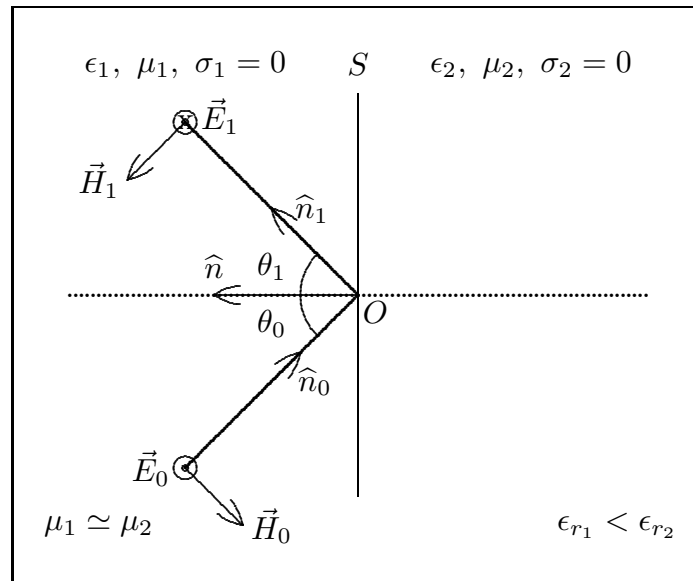


fig.3.6-3

### 3.7 - Legge di Brewster dal punto di vista della teoria degli elettroni

La teoria della rifrazione che abbiamo sviluppato é stata descritta dal punto di vista fenomenologico della teoria di Maxwell. Proviamo ad interpretare i processi di rifrazione come dovuti allo scattering della radiazione **da parte degli atomi del secondo mezzo** (il primo mezzo puó essere supposto il vuoto).

Da questo punto di vista fisicamente piú profondo, la rifrazione é dovuta al fatto che il campo elettrico agente nel secondo mezzo mette in oscillazione gli elettroni atomici; **codeste oscillazioni avvengono nella direzione del campo**. La figura (3.7-1) rappresenta il caso in cui il vettore campo elettrico giace nel piano di incidenza. Il vettore campo elettrico nel secondo mezzo oscilla, ovviamente, in direzione ortogonale alla direzione del raggio rifratto. Gli elettroni oscillano in questa stessa direzione, si comportano cioé come oscillatori hertziani e quindi **non irradiano nella direzione delle loro oscillazioni**, esattamente come succede nel caso delle antenne trasmettenti a radiofrequenze.

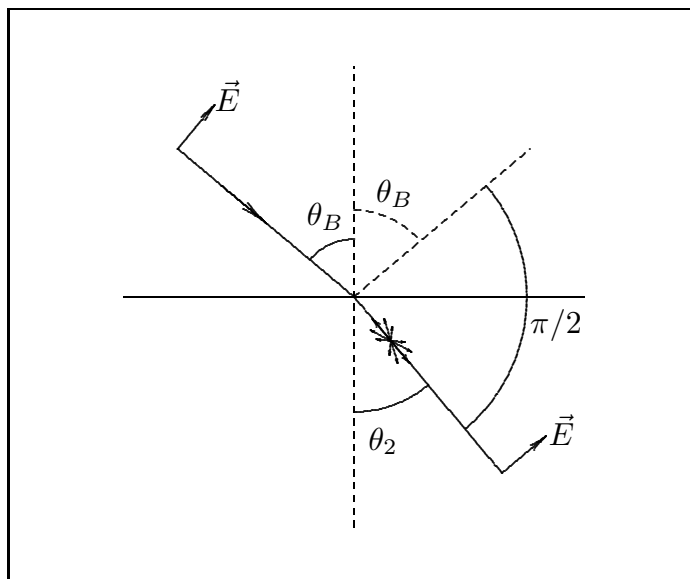


fig.3.7-1

La riflessione regolare nel primo mezzo può accadere solo se gli elettroni del secondo mezzo irradiano energia nella direzione del raggio riflesso. **Questo non avviene quando codesta direzione è parallela alla direzione di oscillazione degli elettroni, quindi perpendicolare al raggio rifratto, in accordo con la legge di Brewster.** In tutte le altre direzioni gli elettroni trasferiscono parte della loro energia irradiata al primo mezzo spiegando così la variazione dell'intensità dell'onda riflessa al variare dell'angolo di incidenza.

L'assenza della energia riflessa non accade quando il campo elettrico incidente è polarizzato in direzione ortogonale al piano di incidenza. In questo caso il vettore campo elettrico e quindi anche le direzioni di oscillazione degli elettroni sono perpendicolari al piano di incidenza, quindi **sempre perpendicolari alla direzione del raggio riflesso.** Ognuna di tali direzioni è direzione di massima radiazione da parte degli elettroni. Non vi è così ragione per l'esistenza di una direzione di riflessione proibita, in accordo con le leggi di Fresnel.

Osserviamo inoltre che solo uno straterello prossimo alla superficie contribuisce alla riflessione, perché a grandi distanze dalla superficie i contributi dei singoli atomi vengono annullati dall'interferenza.

Questo modello, se pur elegante, non ha la pretesa di spiegare il fenomeno della riflessione, ma certamente sembra spiegare molto bene l'esistenza dell'angolo di Brewster.

**Tuttavia il modello cade in difetto quando il secondo mezzo è il vuoto!!** In tal caso, infatti, si può avere un angolo di Brewster, come previsto dalla teoria, ma non si capisce come ciò possa avvenire.

### 3.8 - Calcolo della densità di potenza riflessa e trasmessa - Dielettrici perfetti

Il vettore di Poynting complesso é:

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$$

Onda incidente:

$$\langle \vec{S}_i \rangle = \frac{1}{2} \Re \left( \vec{E}_i \times \vec{H}_i^* \right) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{Z_0} \Re \left[ \vec{E}_0 \times \left( \hat{n}_0 \times \vec{E}_0^* \right) \right] = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_0|^2 \hat{n}_0$$

Onda riflessa:

$$\langle \vec{S}_r \rangle = \frac{1}{2} \Re \left( \vec{E}_r \times \vec{H}_r^* \right) = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_1|^2 \hat{n}_1$$

Onda trasmessa:

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{1}{2} \Re \left( \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \right) = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{2Z_0} |E_2|^2 \hat{n}_2$$

La potenza incidente per unità di superficie S é:

$$\mathcal{P}_{iS} = \left| \langle \vec{S}_i \cdot \hat{n} \rangle \right| = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_0|^2 \cos(\pi - \theta_0) \right| = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_0|^2 \cos \theta_0 \quad (3.8.1)$$

Analogamente:

$$\mathcal{P}_{rS} = \left| \langle \vec{S}_r \cdot \hat{n} \rangle \right| = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_1|^2 \cos \theta_0 \quad (3.8.2)$$

$$\mathcal{P}_{tS} = \left| \langle \vec{S}_t \cdot \hat{n} \rangle \right| = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{2Z_0} |E_2|^2 \cos \theta_2 \quad (3.8.3)$$

Per la conservazione dell'energia si dovrà avere:

$$\mathcal{P}_{iS} - \mathcal{P}_{rS} = \mathcal{P}_{tS} \quad (3.8.4)$$

$$\sqrt{\epsilon_{r1}} |E_0|^2 \cos \theta_0 = \sqrt{\epsilon_{r1}} |E_1|^2 \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r2}} |E_2|^2 \cos \theta_2 \quad (3.8.5)$$

Dividendo la (3.8.4) per  $\mathcal{P}_{iS}$  si ha:

$$1 - \frac{\mathcal{P}_{rS}}{\mathcal{P}_{iS}} = \frac{\mathcal{P}_{tS}}{\mathcal{P}_{iS}}$$

Posto:

$$R = \frac{\mathcal{P}_{rS}}{\mathcal{P}_{iS}} \quad (\text{coefficiente di riflessione o riflettività}) \quad (3.8.6)$$

$$T = \frac{\mathcal{P}_{tS}}{\mathcal{P}_{iS}} \quad (\text{coefficiente di trasmissione o trasmittività}) \quad (3.8.7)$$

si ha dalla (3.8.4):

$$R + T = 1 \quad (3.8.8)$$

Dalla (3.8.1), (3.8.2) e (3.8.3) segue:

$$R = \frac{|E_1|^2}{|E_0|^2} \quad e \quad T = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}} \cos \theta_2}{\sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0} \frac{|E_2|^2}{|E_0|^2} \quad (3.8.9)$$

Poiché  $\cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0}$  il coefficiente di trasmissione  $T$  diventa:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0}}{\cos \theta_0} \frac{|E_2|^2}{|E_0|^2} \quad (3.8.10)$$

Specializziamo, ora, la prima formula delle (3.8.9) e la (3.8.10) per i due casi di polarizzazione trattati.

### $\vec{E}_0$ perpendicolare al piano di incidenza

Dalla (3.4.3) si ha:

$$R_{\perp} = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0}} \right|^2 \quad (3.8.11)$$

Dalla (3.4.4) e dalla (3.8.10) segue che:

$$\begin{aligned} T_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0}}{\cos \theta_0} \frac{4\epsilon_{r_1} \cos^2 \theta_0}{\left| \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} \right|^2} = \\ &= \frac{4\sqrt{\epsilon_{r_1}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} \cos \theta_0}{\left| \sqrt{\epsilon_{r_1}} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} \right|^2} \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

Osserviamo, subito, che se  $\epsilon_{r_2} \neq \epsilon_{r_1}$  non esiste alcun valore di  $\theta_0$  per cui  $R_{\perp}$  si annulla; é immediato, inoltre, verificare che  $R_{\perp} + T_{\perp} = 1$ .

Grafichiamo (fig.3.8-1) i coefficienti  $R_{\perp}$  e  $T_{\perp}$  per l'importante sistema aria - acqua nei casi in cui l'onda incidente é radiofrequenza o radiazione visibile. Nei due casi, come vedremo, la costante dielettrica assume valori sostanzialmente diversi ( $\epsilon_{r_{H_2O}} = 80$  e  $\epsilon_{r_{H_2O}} = 1.777$  **rispettivamente**).

**Aria - acqua: radiofrequenza**

( $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r2} = 80$ ,  $\sigma = 0$ )

$\theta_0$	$R_{\perp}$	$T_{\perp}$
$0^0$	0.638208	0.361792
$10^0$	0.642559	0.35744
$20^0$	0.6556613	0.34434
$30^0$	0.6776476	0.3223
$40^0$	0.7087010	0.2913
$50^0$	0.748993	0.25100
$60^0$	0.798597	0.20140
$70^0$	0.85737	0.14262
$80^0$	0.92483	0.07516
$90^0$	1	0

**Aria - acqua: luce**

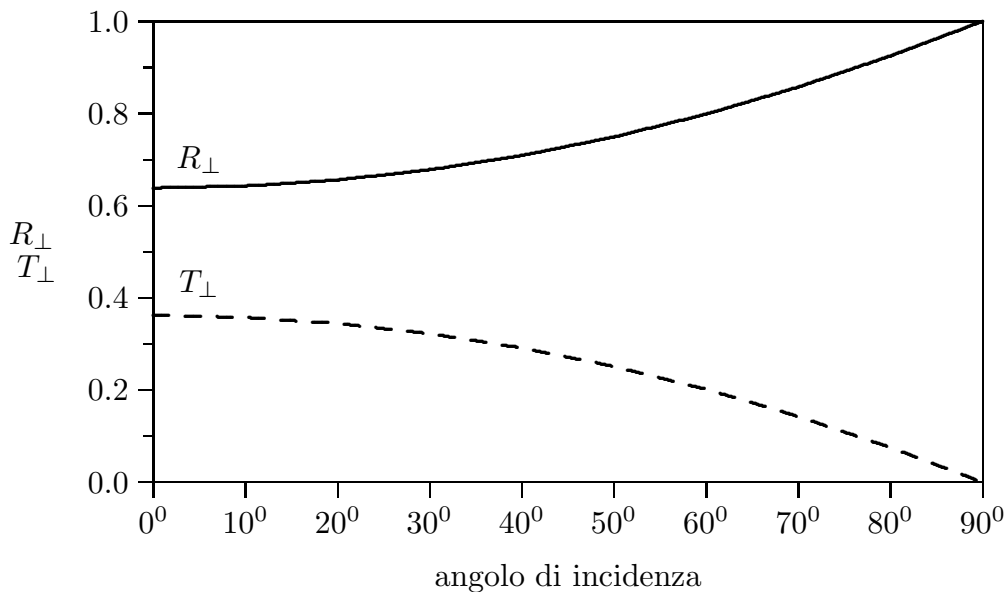
( $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.777$ ,  $\sigma = 0$ )

$\theta_0$	$R_{\perp}$	$T_{\perp}$
$0^0$	0.02037755	0.979622
$10^0$	0.021332171	0.9786678
$20^0$	0.02449597	0.975504
$30^0$	0.030940186	0.969059
$40^0$	0.043164829	0.956835
$50^0$	0.06682003	0.93318
$60^0$	0.11508415	0.884916
$70^0$	0.21969518	0.780305
$80^0$	0.4570426	0.542957
$90^0$	1	0

É importante osservare il diverso comportamento dei due tipi di radiazione; nel caso delle radiofrequenze, per incidenza normale, viene riflessa il 64% della potenza incidente mentre nel caso di luce viene riflessa il 2% ed il 98% della potenza viene trasmessa.

Un altro importante sistema é aria-vetro; il vetro alle radiofrequenze ha costanti dielettriche dell'ordine di  $5 \div 10$  (per il vetro flint con densità 2.87 e per  $\nu \simeq 1 \text{ MHz}$  si ha  $\epsilon_r = 6.61$ ; per il vetro al piombo con densità  $3 \div 3.5$  e per  $\nu \simeq 1 \text{ MHz}$  si ha  $\epsilon_r = 5.4 \div 8$ ) mentre per radiazione visibile  $\epsilon_r \simeq 2.25$ . In quest'ultimo caso, per incidenza normale risulta  $R_{\perp} = 4\%$ ,  $T_{\perp} = 96\%$  che é quasi una caratteristica per tutti i vetri colpiti da luce.

Sistema aria - acqua: radiofrequenza



**Sistema aria - acqua: luce**

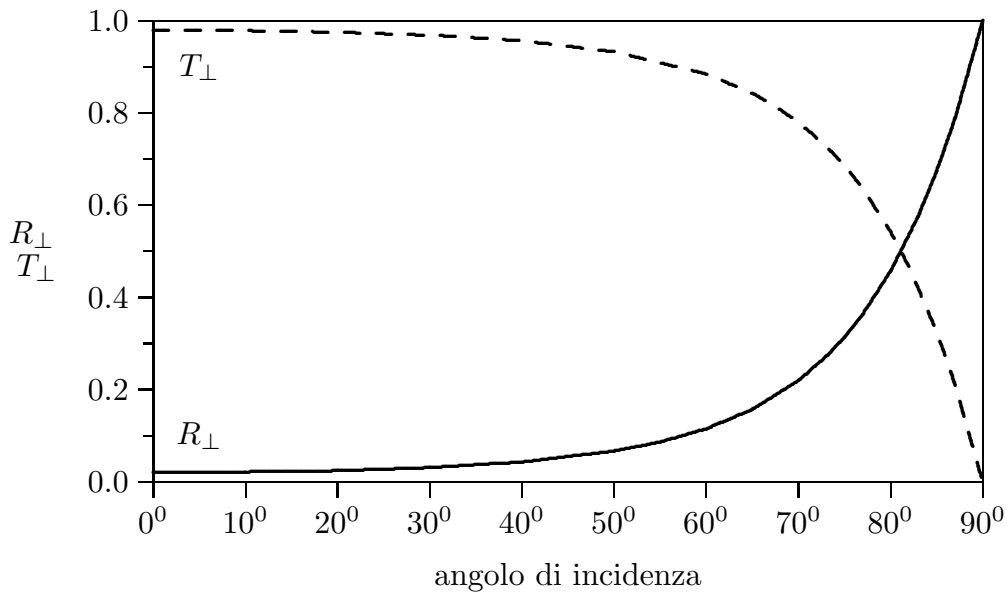


fig.3.8-1

**$\vec{E}_0$  parallelo al piano di incidenza**

Osserviamo anzitutto che dalla (3.5.8), (3.5.9) e (3.5.10) risulta:

$$|H_1|^2 = \frac{|k_1|^2}{\omega^2 \mu_1^2} |E_1|^2, \quad |H_0|^2 = \frac{|k_1|^2}{\omega^2 \mu_1^2} |E_0|^2, \quad |H_2|^2 = \frac{|k_2|^2}{\omega^2 \mu_2^2} |E_2|^2$$

Ne segue che:

$$R_{\parallel} = \frac{|E_1|^2}{|E_0|^2} = \frac{|H_1|^2}{|H_0|^2}$$

che per la (3.5.3) diventa:

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\epsilon_{r_2} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_{r_1}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0}}{\epsilon_{r_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_1}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0}} \right|^2 \quad (3.8.13)$$

Analogamente per  $T_{\parallel}$  si ha per  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$  e  $k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$

$$\frac{|E_2|^2}{|E_0|^2} = \frac{\epsilon_{r_1}}{\epsilon_{r_2}} \frac{|H_2|^2}{|H_0|^2} \quad (3.8.14)$$



Ne segue dalla (3.8.14) e dalla (3.8.10) che:

$$T_{\parallel} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} |H_2|^2}{\epsilon_{r_2} \cos \theta_0 |H_0|^2} \quad (3.8.15)$$

Dalla (3.5.4), infine, si ha:

$$T_{\parallel} = \frac{4\epsilon_{r_2} \sqrt{\epsilon_{r_1}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} \cos \theta_0}{\left| \epsilon_{r_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_1}} \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1} \sin^2 \theta_0} \right|^2} \quad (3.8.16)$$

Osserviamo subito che, al contrario della (3.8.11), la (3.8.13) si annulla per un particolare valore di  $\theta_0$  indicato con  $\theta_B$  e denominato **angolo di Brewster**, si ha infatti:

$$\begin{aligned} \epsilon_{r_2}^2 \cos^2 \theta_B &= \epsilon_{r_1} \epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}^2 \sin^2 \theta_B \\ \epsilon_{r_2}^2 \cos^2 \theta_B &= \epsilon_{r_1} \epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}^2 + \epsilon_{r_1}^2 \cos^2 \theta_B \\ (\epsilon_{r_2}^2 - \epsilon_{r_1}^2) \cos^2 \theta_B &= \epsilon_{r_1} (\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}) \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta_B &= \frac{\epsilon_{r_1}}{\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}} \\ \frac{1}{1 + \tan^2 \theta_B} &= \frac{\epsilon_{r_1}}{\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}} \\ \epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2} &= \epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_1} \tan^2 \theta_B \\ \tan \theta_B &= \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} \quad R_{\parallel} = 0 \end{aligned} \quad (3.8.17)$$

che é identica alla (3.5.13). Anche in questo caso é immediato verificare che

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$$

Grafichiamo (fig.3.8-2), ora, i coefficienti  $R_{\parallel}$  e  $T_{\parallel}$  per il sistema aria-acqua nei casi in cui l'onda incidente é radiazione a radiofrequenza o radiazione visibile.

**Aria - acqua: radiofrequenza**

$(\epsilon_{r_1} = 1,$	$\epsilon_{r_2} = 80,$	$\sigma = 0)$
$\theta_0$	$\mathbf{R}_{\parallel}$	$\mathbf{T}_{\parallel}$
$0^0$	0.638208	0.361792
$10^0$	0.63381886	0.366181137

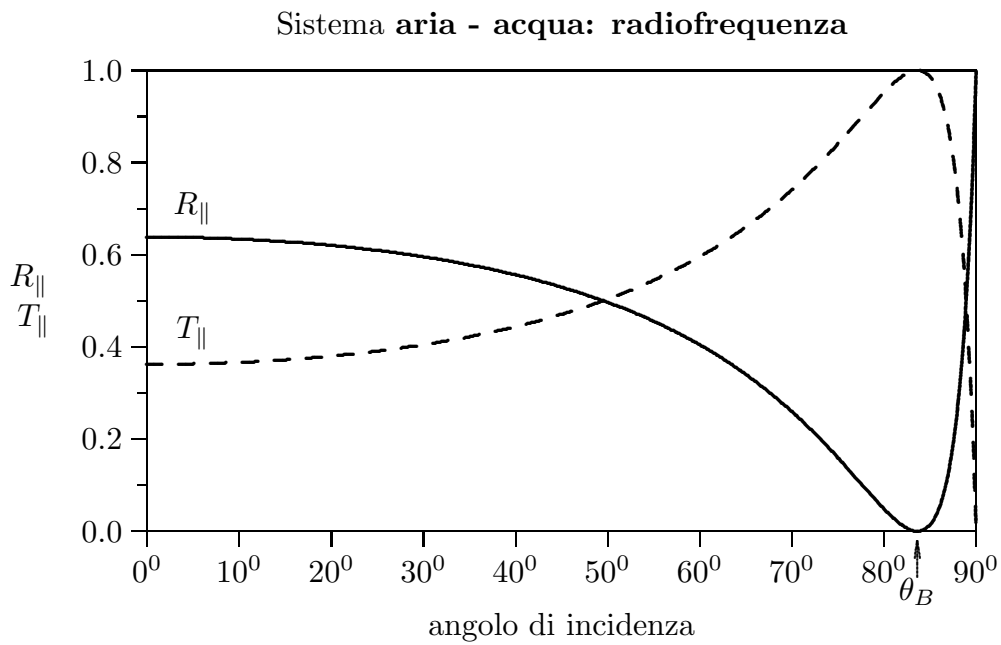
**Aria - acqua: luce**

$(\epsilon_{r_1} = 1,$	$\epsilon_{r_2} = 1.777,$	$\sigma = 0)$
$\theta_0$	$\mathbf{R}_{\parallel}$	$\mathbf{T}_{\parallel}$
$0^0$	0.02037755	0.979622
$10^0$	0.019443901	0.98055609

$20^0$	0.6201297	0.3798703	$20^0$	0.016623627	0.983376373
$30^0$	0.595428	0.40457183	$30^0$	0.011941761	0.98805824
$40^0$	0.556297	0.44370278	$40^0$	0.00584963	0.99415036
$50^0$	0.496460	0.503539	$50^0$	$5.2732 \cdot 10^{-4}$	0.9994726
$60^0$	0.404389	0.5956100	$60^0$	0.004313	0.9956866
$70^0$	0.259427	0.7405724	$70^0$	0.0472774	0.9527225
$80^0$	0.048206	0.951793	$80^0$	0.2388183	0.761181676
$90^0$	1	0	$90^0$	1	0

$(\theta_B = \arctan \sqrt{80} = 83^0.62)$

$(\theta_B = \arctan \sqrt{1.777} = 53^0.12)$



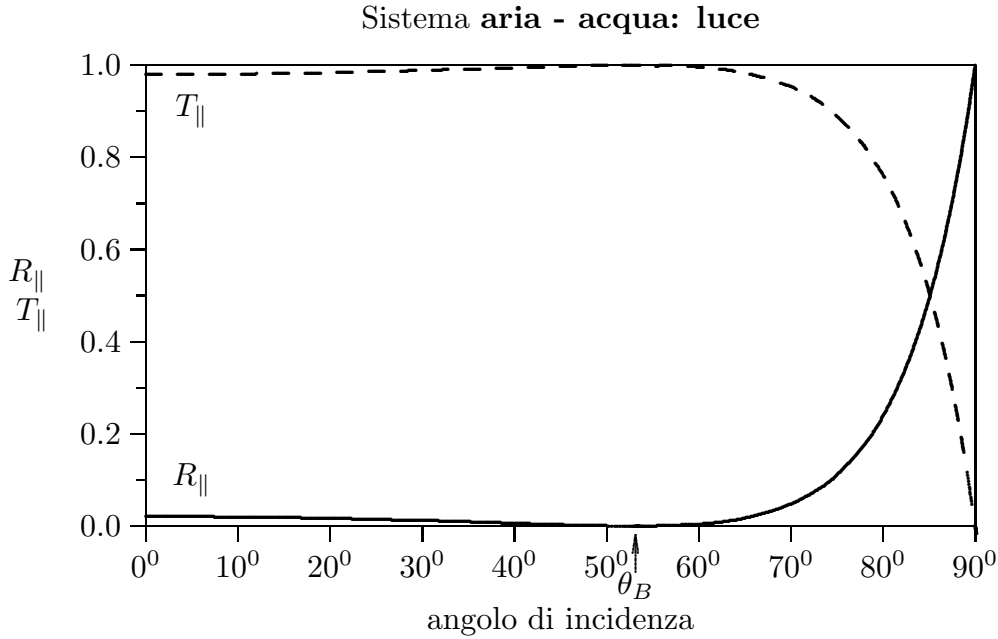


fig.3.8-2

Come si vede dai grafici, per incidenza normale, i casi  $\vec{E}_0 \perp$  al piano di incidenza ed  $\vec{E}_0 \parallel$  al piano di incidenza sono indistinguibili. Dalla (3.4.3) e (3.4.4), si ha:

$$R_{\perp}(\theta_0=0) = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}} \right|^2; \quad T_{\perp}(\theta_0=0) = \frac{4\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{\epsilon_{r2}}}{|\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}|^2} \quad (3.8.18)$$

Dalla (3.8.13) segue:

$$R_{\parallel}(\theta_0=0) = \left| \frac{\epsilon_{r2} - \sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\epsilon_{r2} + \sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{\epsilon_{r2}}} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}} - \sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r1}}} \right|^2 = R_{\perp}(\theta_0=0) \quad (3.8.19)$$

Dalla (3.8.16) segue:

$$T_{\parallel}(\theta_0=0) = \frac{4\epsilon_{r2}\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{\epsilon_{r2}}}{|\epsilon_{r2} + \sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{\epsilon_{r2}}|^2} = \frac{4\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\left| \frac{\epsilon_{r2}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} + \sqrt{\epsilon_{r1}} \right|^2} = \frac{4\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{\epsilon_{r2}}}{|\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}|^2} \quad (3.8.20)$$

### 3.9 - Campo elettrico incidente linearmente polarizzato in direzione arbitraria

Come abbiamo visto, la riflettività e la trasmittività di una superficie 'dielettrica' dipende fortemente dalla polarizzazione dell'onda incidente.

Vogliamo esprimere tali grandezze in termini di riflettività e trasmittività associate a polarizzazione parallela e perpendicolare quando il campo elettrico incidente é polarizzato in direzione arbitraria.

Si abbia un campo elettrico  $\vec{E}_i$  ortogonale alla direzione di propagazione ma formante un angolo  $\alpha_i$  con il piano di incidenza:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{ik_1 \hat{n}_0 \cdot \vec{r} - i\omega t}$$

Posto:

$$|E_{0\parallel}| = |E_0| \cos \alpha_i \quad e \quad |E_{0\perp}| = |E_0| \sin \alpha_i \quad (3.9.1)$$

il campo elettrico incidente é la sovrapposizione di due campi polarizzati in direzioni ortogonali:

$$\vec{E}_{i\parallel} = \vec{E}_{0\parallel} e^{ik_1 \hat{n}_0 \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad \vec{E}_{i\perp} = \vec{E}_{0\perp} e^{ik_1 \hat{n}_0 \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad (3.9.2)$$

Pertanto si ha:

$$\mathcal{P}_{iS\parallel} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_{0\parallel}|^2 \cos \theta_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_0|^2 \cos^2 \alpha_i \cos \theta_0 \quad (3.9.3)$$

$$\mathcal{P}_{iS\perp} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_{0\perp}|^2 \cos \theta_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_0|^2 \sin^2 \alpha_i \cos \theta_0 \quad (3.9.4)$$

e poiché,  $\mathcal{P}_{iS} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_0|^2 \cos \theta_0$ , si ha:

$$\mathcal{P}_{iS\parallel} = \mathcal{P}_{iS} \cos^2 \alpha_i \quad e \quad \mathcal{P}_{iS\perp} = \mathcal{P}_{iS} \sin^2 \alpha_i \quad (3.9.5)$$

Analogamente:

$$\mathcal{P}_{rS\parallel} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_{1\parallel}|^2 \cos \theta_0 \quad (3.9.6)$$

$$\mathcal{P}_{rS\perp} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{2Z_0} |E_{1\perp}|^2 \cos \theta_0 \quad (3.9.7)$$

cosí come:

$$\mathcal{P}_{tS\parallel} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{2Z_0} |E_{2\parallel}|^2 \cos \theta_2 \quad (3.9.8)$$

$$\mathcal{P}_{tS\perp} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{2Z_0} |E_{2\perp}|^2 \cos \theta_2 \quad (3.9.9)$$

Dalla (3.8.6) si ha:

$$R = \frac{\mathcal{P}_{rS}}{\mathcal{P}_{iS}} = \frac{\mathcal{P}_{rS\parallel} + \mathcal{P}_{rS\perp}}{\mathcal{P}_{iS}} = \frac{\mathcal{P}_{rS\parallel}}{\mathcal{P}_{iS}} + \frac{\mathcal{P}_{rS\perp}}{\mathcal{P}_{iS}} \quad (3.9.10)$$

ma dalle (3.9.5) si ha:  $\mathcal{P}_{iS} = \frac{\mathcal{P}_{iS\parallel}}{\cos^2 \alpha_i}$  e  $\mathcal{P}_{iS} = \frac{\mathcal{P}_{iS\perp}}{\sin^2 \alpha_i}$  che rispettivamente sostituiti nella (3.9.10) conducono a:

$$R = \frac{\mathcal{P}_{rS\parallel}}{\mathcal{P}_{iS\parallel}} \cos^2 \alpha_i + \frac{\mathcal{P}_{rS\perp}}{\mathcal{P}_{iS\perp}} \sin^2 \alpha_i \quad (3.9.11)$$

cioé:

$$R = R_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + R_{\perp} \sin^2 \alpha_i \quad (3.9.12)$$

Analogamente:

$$T = \frac{\mathcal{P}_{tS}}{\mathcal{P}_{iS}} = \frac{\mathcal{P}_{tS\parallel} + \mathcal{P}_{tS\perp}}{\mathcal{P}_{iS}} = \frac{\mathcal{P}_{tS\parallel}}{\mathcal{P}_{iS\parallel}} \cos^2 \alpha_i + \frac{\mathcal{P}_{tS\perp}}{\mathcal{P}_{iS\perp}} \sin^2 \alpha_i \quad (3.9.13)$$

cioé:

$$T = T_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + T_{\perp} \sin^2 \alpha_i \quad (3.9.14)$$

dove  $R_{\perp}$  e  $T_{\perp}$  sono dati dalla (3.8.11) e (3.8.12) e  $R_{\parallel}$  e  $T_{\parallel}$  sono dati dalla (3.8.13) e (3.8.16).

Se l'onda incide con un angolo di incidenza eguale all'angolo di Brewster,  $R_{\parallel} = 0$ , e quindi l'onda riflessa contiene soltanto la componente del campo elettrico ortogonale al piano di incidenza; in questo caso, essendo  $\theta_B + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ , la direzione dell'onda riflessa e quella dell'onda trasmessa sono ortogonali (fig.3.9-1).

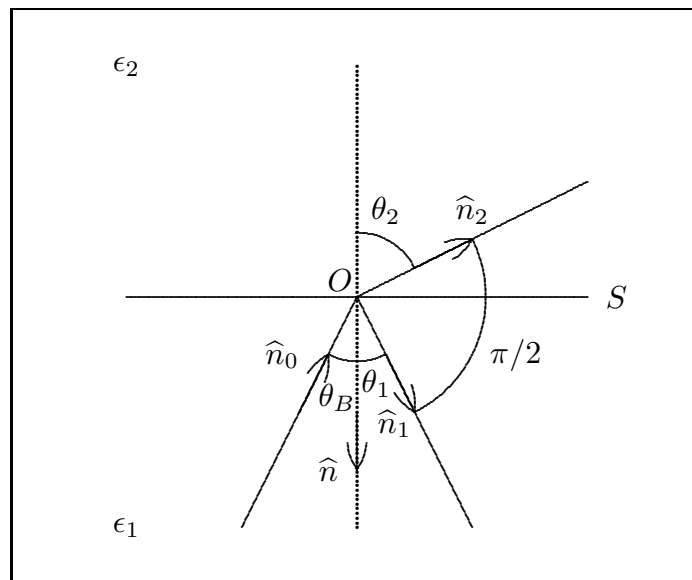


fig.3.9-1

Vogliamo, ora, studiare lo stato di polarizzazione dell'onda riflessa e trasmessa nel presente caso in cui il campo elettrico incidente é linearmente polarizzato in direzione arbitraria.

É conveniente ricordare che:

1) se il campo elettrico  $\vec{E}_0$ , associato all'onda incidente, é **polarizzato in direzione ortogonale al piano di incidenza**, il campo elettrico associato all'onda trasmessa ( $\vec{E}_2$ ) é sempre in fase con quello dell'onda incidente (vedi formula (3.4.4)) e, viceversa, se  $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$ ,

il campo elettrico associato all'onda riflessa ( $\vec{E}_1$ ) presenta una differenza di fase di  $180^\circ$  rispetto al campo elettrico dell'onda incidente (vedi formula (3.4.1)).

2) se il campo elettrico  $\vec{E}_0$ , associato all'onda incidente, **é polarizzato in direzione parallela al piano di incidenza**, si ha che: per angoli di incidenza per cui  $\theta_0 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ , il campo magnetico riflesso presenta una differenza di fase di  $180^\circ$  rispetto al campo magnetico incidente.

Pertanto, poiché le componenti ( $\perp$  e  $\parallel$ ) dei campi riflessi e trasmessi hanno fase uguale o opposta a quella del campo incidente, l'onda elettromagnetica riflessa o rifratta risulta polarizzata linearmente, ma la direzione di polarizzazione é variata rispetto a quella dell'onda incidente.

Sia  $\alpha$  l'azimuth del campo elettrico, cioè l'angolo formato fra la direzione del campo elettrico e il piano di incidenza; esso é considerato positivo quando il piano di polarizzazione (cioé quello che contiene il campo elettrico) ruota in senso orario attorno alla direzione di propagazione.

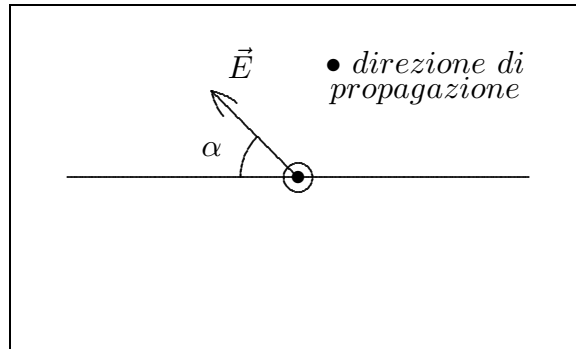


fig.3.9-2

Si ha allora per le tre onde:

$$\tan \alpha_i = \frac{E_{0\perp}}{E_{0\parallel}}, \quad \tan \alpha_r = \frac{E_{1\perp}}{E_{1\parallel}}, \quad \tan \alpha_t = \frac{E_{2\perp}}{E_{2\parallel}} \quad (3.9.15)$$

Utilizzando le formule di Fresnel si ha:

$$\tan \alpha_r = -\frac{\cos(\theta_0 - \theta_2)}{\cos(\theta_0 + \theta_2)} \tan \alpha_i \quad (3.9.16)$$

$$\tan \alpha_t = \cos(\theta_0 - \theta_2) \tan \alpha_i$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} |\tan \alpha_r| &\geq |\tan \alpha_i| \\ |\tan \alpha_t| &\leq |\tan \alpha_i| \end{aligned} \quad (3.9.17)$$

Nella prima delle (3.9.17) si ha l'eguaglianza per  $\theta_0 = \theta_2 = 0$  o  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ; nella seconda solo per incidenza normale.

La prima delle (3.9.17) significa che il campo associato all'onda riflessa si allontana dal piano di incidenza, mentre la seconda implica che il campo associato all'onda rifratta si avvicina al piano.

Osserviamo che quando  $\theta_0 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ , cioè per incidenza sotto angolo di Brewster, dalla prima delle (3.9.16) si ha  $\alpha_r = \frac{\pi}{2}$  cioè l'onda riflessa é polarizzata in direzione ortogonale al piano di incidenza.

Calcoliamo, ora, la riflettività e la trasmittività nel caso di **luce naturale** cioè radiazione non polarizzata.

Come abbiamo già detto la direzione di polarizzazione della luce naturale varia rapidamente in modo completamente casuale.

La corrispondente riflettività si può ottenere dalla (3.9.12) mediando su tutte le direzioni. Poiché:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2}$$

per la riflettività, dalla (3.9.12), si ha:

$$R_{nat} = \frac{1}{2}R_{\parallel} + \frac{1}{2}R_{\perp} \quad (3.9.18)$$

Analogamente:

$$T_{nat} = \frac{1}{2}T_{\parallel} + \frac{1}{2}T_{\perp} \quad (3.9.19)$$

### 3.10 - Indice di rifrazione della troposfera per le radioonde e per la luce

Le onde elettromagnetiche che si propagano attraverso la troposfera<sup>1)</sup> sono rifratte e diffuse da variazioni nell'indice di rifrazione dell'atmosfera terrestre dovute a variazioni nella pressione, nella temperatura e nella pressione del vapore acqueo. Numerose misure sperimentali hanno stabilito che l'indice di rifrazione dell'atmosfera terrestre può essere calcolato dalla formula:

$$N = (n - 1) \cdot 10^6 = 77.6 \cdot \frac{P}{T} - 5.6 \cdot \frac{e}{T} + 3.73 \cdot 10^5 \cdot \frac{e}{T^2} \quad (3.10.1)$$

$N$  è la rifrattività che è una quantità pratica utilizzata spesso al posto di  $n$  che è l'indice di rifrazione.

$P$  è la pressione atmosferica misurata in  $mb$ .<sup>2)</sup>

$e$  è la pressione parziale del vapore acqueo misurata in  $mb$  e denominata umidità assoluta dell'aria.

Nell'equazione (3.10.1), sulla superficie terrestre  $P$  è dell'ordine di 1000 ed  $e$  dell'ordine di 10; pertanto il secondo termine del secondo membro può essere trascurato. La (3.10.1) si può scrivere allora:

$$N = (n - 1) \cdot 10^6 = \frac{77.6}{T} \left( P + 4810 \frac{e}{T} \right) \quad (3.10.2)$$

L'indice di rifrazione sulla superficie terrestre, denominato  $n_s$ , è di circa 1.0003. Esso diminuisce fino a diventare 1 a grande altezza da essa, come si evince dalla (3.10.1) al diminuire delle pressioni. Tuttavia nella troposfera esso presenta piccole variazioni. Invece il valore di  $N$  sulla superficie terrestre, sia esso  $N_s$ , è di circa 300 e, quindi, essendo  $N$  una grandezza che ha delle variazioni significative con l'altezza, fino a diventare zero per grandi altezze, è più usata di  $n$  per meglio descrivere la propagazione troposferica.

La struttura macroscopica dell'atmosfera varia molto più rapidamente verticalmente che orizzontalmente per effetto della variazione verticale della pressione. Per questa ragione la troposfera è detta verticalmente stratificata. La stessa stratificazione verticale può persistere su una regione orizzontale estesa da dieci a cento chilometri.

Nella regione visibile l'andamento dell'indice di rifrazione è:

$$N = (n - 1) \cdot 10^6 = A \frac{P}{T} \left( 1 + \frac{B}{T} \frac{e}{P} \right) \quad (3.10.3)$$

<sup>1)</sup> La troposfera è la fascia dell'atmosfera a diretto contatto con la superficie terrestre ed ha uno spessore variabile a seconda della latitudine: ai poli è spessa solamente 8 chilometri mentre raggiunge i 20 chilometri all'equatore. In essa sono concentrati i tre quarti dell'intera massa gassosa e quasi tutto il vapore acqueo dell'atmosfera.

<sup>2)</sup>  $1 \text{ mb} = 1000 \text{ dyn/cm}^2 = 0.75 \text{ mmHg}$  (o Torr), ( $760 \text{ mmHg} = 1013 \text{ mb}$ ).



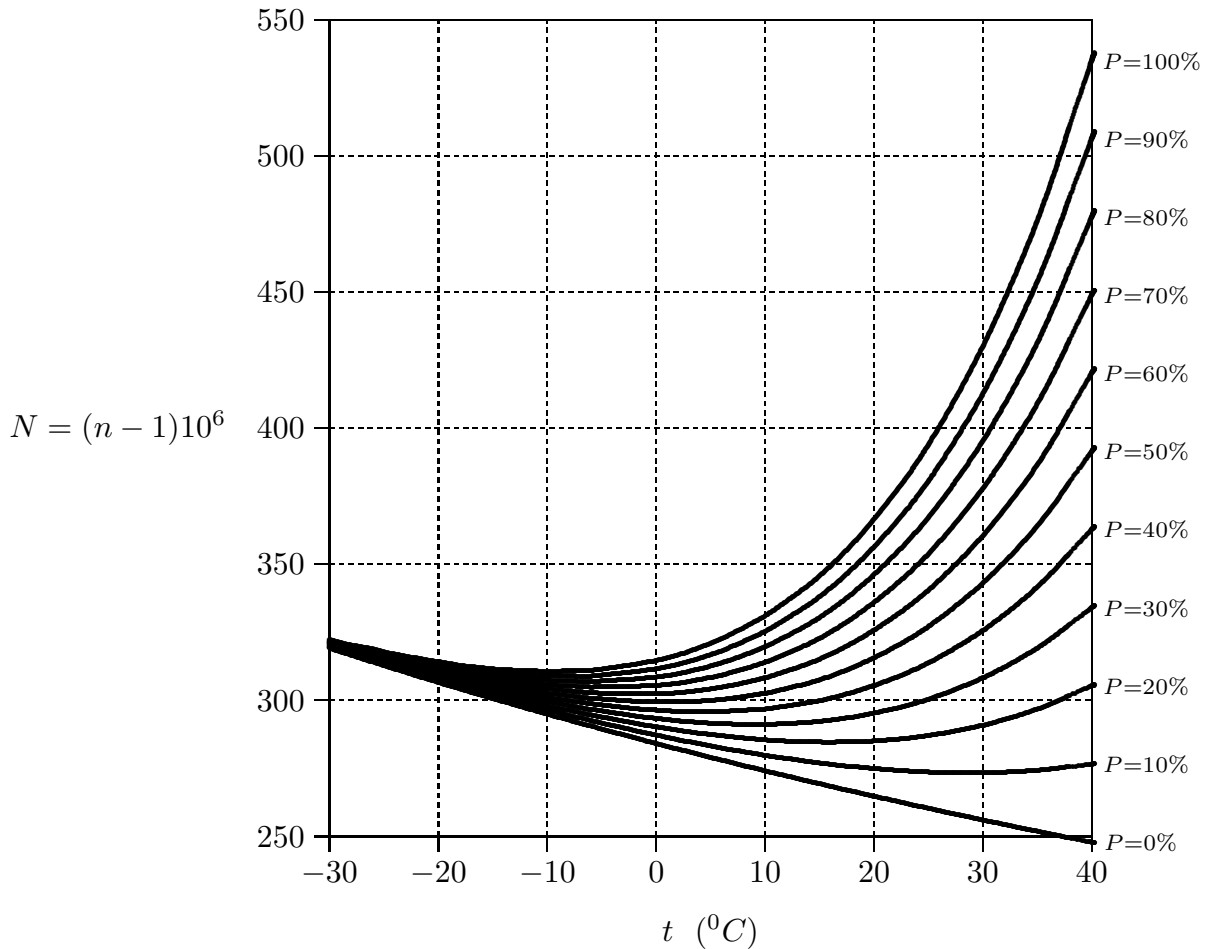
Per la regione visibile dello spettro,  $0.4\mu < \lambda < 0.7\mu$ , le costanti sono:

$$A = 77.5 \left( 1 + \frac{5.15 \cdot 10^{-3}}{\lambda^2} + \frac{1.07 \cdot 10^{-4}}{\lambda^4} \right) \quad (3.10.4)$$

$$\frac{B}{T} = -0.120 \quad 3) \quad (3.10.5)$$

É utile graficare l'andamento della rifrattivit  in funzione della temperatura, al variare della percentuale di umidit .

Rifrattivit   $N$  in funzione della temperatura  $t$  ( $^{\circ}C$ ) -  $p = 1000 \text{ mb}$



Consideriamo l'atmosfera a riposo. La legge di Stevin<sup>4)</sup> permette di rispondere alla seguente domanda: secondo quale legge la pressione atmosferica  $P$  varia con l'altezza  $z$ ?

<sup>3)</sup> Per la luce visibile,  $B/T$  é cos  piccola che esso pu  essere considerato costante.

<sup>4)</sup> Legge di Stevin: La forza di pressione su ciascun elemento di superficie immersa in un fluido é data dal peso di una colonna (cilindrica) di fluido avente per base (orizzontale) l'elemento di superficie considerato e per altezza il dislivello tra il centro di questa superficie e la superficie libera del fluido, ossia:  $p = p_0 + \rho gh$ .

Si consideri una colonna cilindrica verticale d'aria. Per trovare la legge con la quale varia la pressione con l'altezza scriviamo l'equazione di bilancio:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g\rho \quad (N/m^3) \quad (3.10.6)$$

essendo  $\rho$  la densità dell'aria espressa in  $(m^{-3})$ .

Per la legge dei gas perfetti:

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \quad (3.10.7)$$

essendo  $n$  il numero di grammolecole contenute nel gas,  $m$  la massa del gas e  $M$  il peso molecolare del gas. Dalla (3.10.7) si ottiene:

$$P = \frac{m}{MV}RT = \frac{\rho}{M}RT \quad (3.10.8)$$

da cui:

$$\rho = \frac{PM}{RT} \quad (3.10.9)$$

Sostituendo nella (3.10.6), si ha:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g \frac{PM}{RT} \quad (3.10.10)$$

Integrando la (3.10.10) si ha:

$$P = P_0 \exp\left(-\int_0^z \frac{g dz}{RT}\right) \quad (3.10.11)$$

La (3.10.11) è integrabile solo se la temperatura si mantiene costante al variare di  $z$ . Ma ciò è vero per brevi dislivelli

**L'effetto netto delle variazioni in  $P$ ,  $T$  ed  $e$  è che  $N$  decresce all'aumentare dell'altezza.** Il comportamento medio di  $N$  nella troposfera è quello di un esponenziale decrescente:

$$N = N_s \exp(-z/H) \quad (3.10.12)$$

dove  $N_s$  è il valore sulla superficie terrestre di  $N$ ,  $z$  è l'altezza sopra la superficie terrestre e  $H$  è una costante. Il CCIR (Consultative Committee for International Radio) ha stabilito

che l'atmosfera di riferimento abbia il valore  $N_s = 315$  e  $H = 7.35 \text{ km}$ .

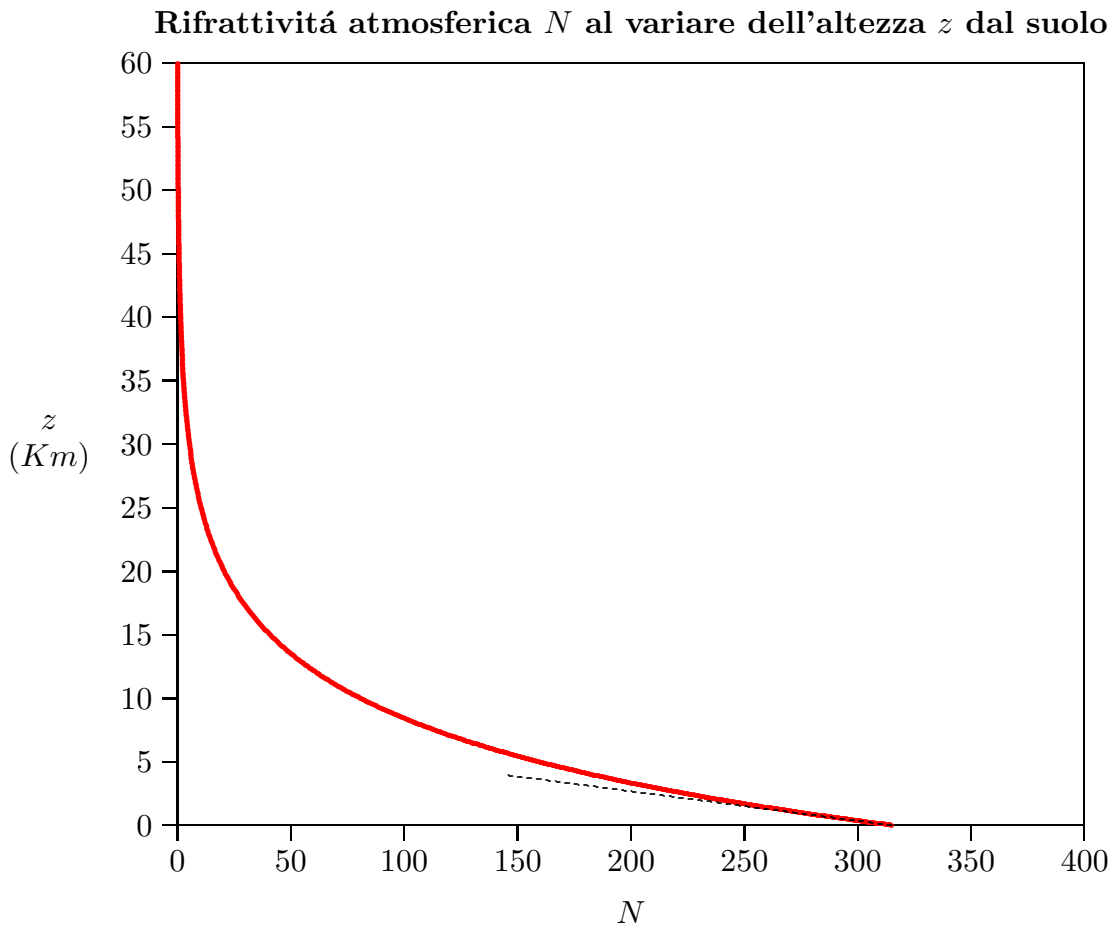


fig.3.10-1

Dalla figura 3.10-1 si deduce che la rifrattività é praticamente nulla, ossia l'indice di rifrazione é 1, ad un'altezza dal suolo di circa  $45 \div 50 \text{ km}$ , al di sopra della quale comincia la ionosfera.

Per altezze prossime al suolo la (3.10.12) si puó sviluppare in serie:

$$N \simeq N_s - N_s \frac{z}{H} \tag{3.10.13}$$

che bene approssima la curva esatta fino a circa due chilometri di altezza dal suolo, come é mostrato in figura 3.10-1 dalla retta tratteggiata.

Risulta:

$$\frac{\partial N}{\partial z} \simeq -\frac{N_s}{H} = -42.857 \tag{3.10.14}$$

### 3.11 - La curvatura dei raggi luminosi nell'atmosfera

Come abbiamo visto, la densità dell'aria va decrescendo con l'altezza, va quindi anche decrescendo con l'altezza il suo indice di rifrazione. I raggi luminosi che ci pervengono dagli

astri attraversano dunque nell'ultima parte del loro cammino, **un mezzo otticamente non omogeneo**, il che fa sí, che tali raggi anziché essere rettilinei siano curvi, con la concavità rivolta verso il basso. Adunque la direzione nella quale noi riceviamo un raggio, cioè la tangente ad esso nel punto di arrivo, non é la direzione nella quale si trova l'astro, ma é piú elevata di quella di un angolo  $\delta$ . Noi quindi vediamo l'astro (sia ad occhio nudo, sia col cannocchiale) in un punto che é piú alto, sull'orizzonte, di quello vero. Questa apparente elevazione degli astri si chiama **rifrazione astronomica** e si misura dall'angolo  $\delta$ . La rifrazione astronomica é manifestamente nulla per un astro che si trovi allo zenit, perché in tal caso i raggi attraversano l'aria perpendicolarmente agli strati di eguale indice; essa é poi tanto maggiore quanto piú l'astro é vicino all'orizzonte: il suo valore massimo é di circa  $36'$ . Ciò significa che all'istante in cui sembra che una stella (o l'orlo del Sole) tocchi l'orizzonte, in realtà essa si trova  $36'$  al di sotto di esso. L'effetto della rifrazione astronomica é perciò quello di ritardare apparentemente il tramonto di un astro, e anticiparne la levata.

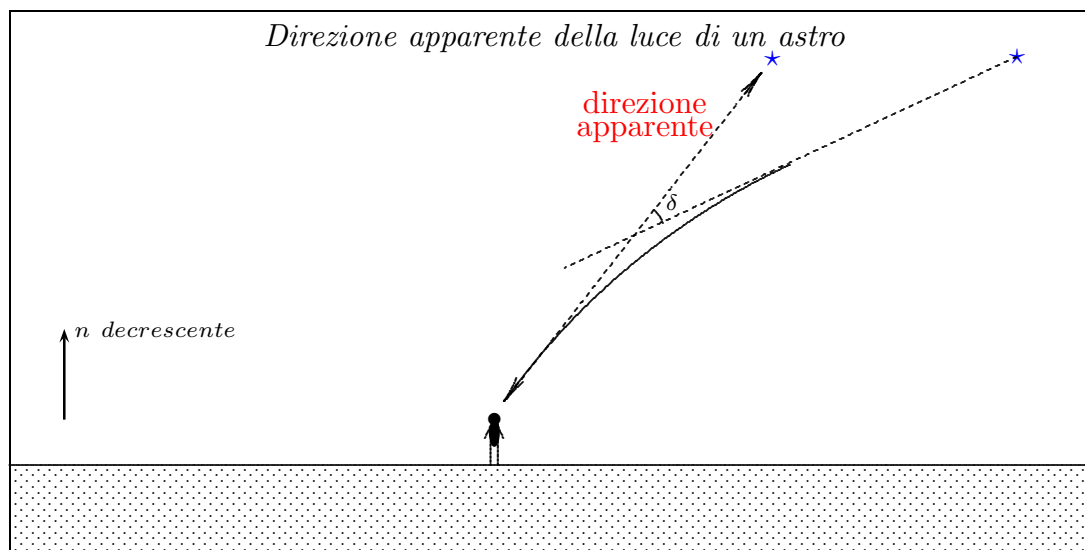


fig.3.11-1

Una persona che guarda un astro attraverso l'atmosfera, si trova in una situazione analoga a quella del pesce che guarda il pescatore attraverso l'acqua. Man mano che il raggio penetra nell'atmosfera, incontra gli strati d'aria piú densi e si curva verso la Terra. Benché lo scarto fra la posizione reale e la posizione osservata sia molto piccolo (una frazione di grado) esso spiega delle anomalie che ciascuno può osservare, come il sole appiattito all'orizzonte. La rifrazione atmosferica completamente trascurabile per astri alti nel cielo, non lo é piú in prossimitá dell'orizzonte come si può vedere dalla seguente tabella:

Altezza sull'orizzonte	Rifrazione atmosferica
$60^0$	$0.5'$
$10^0$	$6'$

$1^0$	$25'$
$0^0$	$36'$
$-1^0$	$56'$

Il diametro angolare del sole é di  $30'$ . Quando il bordo superiore del sole tocca l'orizzonte cioé quando il sole é completamente tramontato, l'effetto della rifrazione é quello di elevarlo di  $36'$  e quindi esso é ancora visibile. Il mattino egualmente, il sole é visibile, per la rifrazione allorquando é ancora sotto l'orizzonte. Quindi un osservatore, per effetto della rifrazione atmosferica, vede il sole sorgere prima e tramontare dopo. Questi due effetti insieme ci fanno guadagnare sette minuti di insolazione agli equinozi. A causa di ciò all'equinozio la durata del giorno e quella della notte non sono eguali. Il giorno dura  $12\ h\ e\ 7\ m$  e la notte  $11\ h\ e\ 53\ m$ .

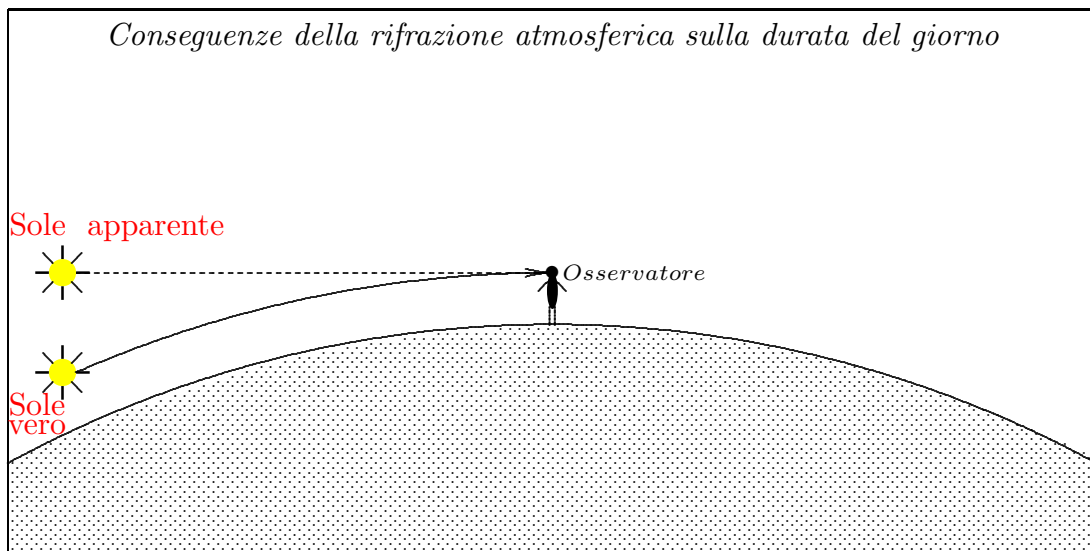


fig.3.11-2

La deviazione dei raggi si puó calcolare analiticamente assumendo la legge di variazione dell'indice di rifrazione valutata secondo il modello sviluppato nei prossimi paragrafi. Si assuma:

$$n(z) = 1 + (n_0 - 1)e^{-z/H} \tag{3.11.1}$$

essendo  $n_0 = 1.0003$  l'indice di rifrazione al suolo (esso dipende anche dalla lunghezza

d'onda che per il momento ignoriamo).

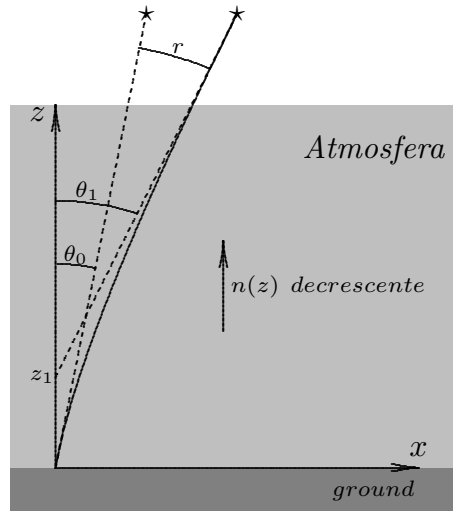


fig.3.11-3

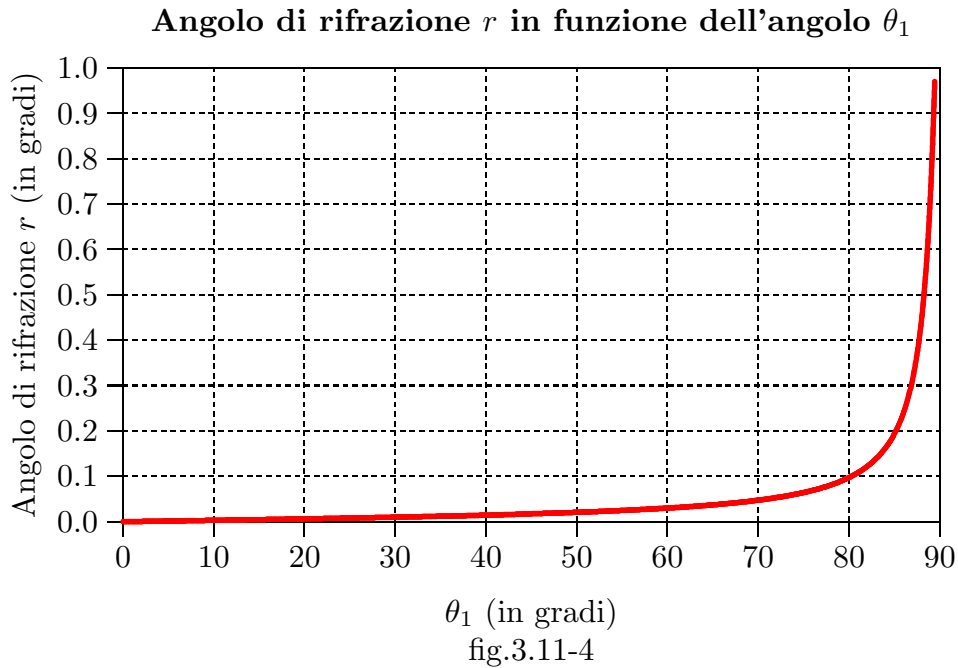
Per valutare l'angolo di rifrazione  $r$ , applichiamo la legge di Snell fra la superficie terrestre e la zona superiore dell'atmosfera dove sicuramente l'indice di rifrazione è eguale a 1; ossia:

$$n_0 \sin \theta_0 = \sin \theta_1 \quad (3.11.2)$$

da cui:

$$\theta_1 = \arcsin(n_0 \sin \theta_0) \quad (3.11.3)$$

Riportiamo in grafico l'angolo  $r = \theta_1 - \theta_0$  in funzione dell'angolo  $\theta_1$ .



Per studiare le traiettorie dei raggi, cosí come si far  per la ionosfera, si procede nella seguente maniera: dalla figura (3.11-3) si ha:

$$\tan \theta = \frac{dx}{dz} \quad (3.11.4)$$

$$n(z) \sin \theta = n(z) \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} = n(z) \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}} \quad (3.11.5)$$

Per la legge di Snell:

$$n_0 \sin \theta_0 = n(z) \sin \theta \quad (3.11.6)$$

Quindi:

$$n_0 \sin \theta_0 = n(z) \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}} \quad (3.11.7)$$

da cui:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{n_0^2 \sin^2 \theta_0}{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0} \quad (3.11.8)$$

ossia:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{n_0 \sin \theta_0}{\sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0}} \quad (3.11.9)$$

che si pu  scrivere:

$$\frac{dx}{dn} \frac{dn}{dz} = \frac{n_0 \sin \theta_0}{\sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0}} \quad (3.11.10)$$

ossia:

$$dx = \frac{n_0 \sin \theta_0}{\frac{dn}{dz} \sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0}} dn \quad (3.11.11)$$

Ma per la (3.11.1):

$$\frac{dn}{dz} = -\frac{1}{H}(n_0 - 1)e^{-z/H} = -\frac{1}{H}(n(z) - 1) \quad (3.11.12)$$

Integrando:

$$\int dx = \int \frac{-H n_0 \sin \theta_0}{(n(z) - 1) \sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0}} dn \quad (3.11.13)$$

Posto  $a = n_0 \sin \theta_0$  e uscendo il termine noto fuori dall'integrale, l'integrale al secondo membro della (3.11.13) si scrive:

$$\int \frac{dn}{(n(z) - 1) \sqrt{n^2(z) - a^2}} \quad (3.11.14)$$

Per risolvere l'integrale poniamo:

$$\sqrt{n^2 - a^2} = t - n \implies n^2 - a^2 = (t - n)^2 \implies n^2 - a^2 = t^2 + n^2 - 2tn \quad (3.11.15)$$

ossia:

$$n = \frac{t^2 + a^2}{2t} \implies dn = \frac{4t^2 - 2t^2 - 2a^2}{4t^2} dt = \frac{t^2 - a^2}{2t^2} dt \quad (3.11.16)$$

Si ha, allora:

$$\begin{aligned} \int \frac{dn}{(n(z) - 1)\sqrt{n^2(z) - a^2}} &= \int \frac{\frac{t^2 - a^2}{2t^2}}{\frac{t^2 + a^2 - 2t}{2t} \left( t - \frac{t^2 + a^2}{2t} \right)} dt = \\ &= \int \frac{\frac{t^2 - a^2}{2t^2}}{\frac{(t^2 + a^2 - 2t)(2t^2 - t^2 - a^2)}{4t^2}} dt = \int \frac{2}{t^2 - 2t + a^2} dt \end{aligned} \quad (3.11.17)$$

Posto  $t^2 - 2t + a^2 = 0$ , si ha:

$$t_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2}; \quad t_2 = 1 - \sqrt{1 - a^2} \quad (3.11.18)$$

Quindi:

$$t^2 - 2t + a^2 = (t - t_1)(t - t_2) = (t - 1 - \sqrt{1 - a^2})(t - 1 + \sqrt{1 - a^2}) \quad (3.11.19)$$

Pertanto:

$$\int \frac{2}{t^2 - 2t + a^2} dt = \int \frac{2}{(t - 1 - \sqrt{1 - a^2})(t - 1 + \sqrt{1 - a^2})} dt \quad (3.11.20)$$

Posto:

$$\frac{2}{(t - 1 - \sqrt{1 - a^2})(t - 1 + \sqrt{1 - a^2})} = \frac{A}{(t - 1 - \sqrt{1 - a^2})} + \frac{B}{(t - 1 + \sqrt{1 - a^2})} \quad (3.11.21)$$

l'eguaglianza é assicurata se:

$$A(t - 1 + \sqrt{1 - a^2}) + B(t - 1 - \sqrt{1 - a^2}) = 2 \quad (3.11.22)$$

$$At - A + A\sqrt{1 - a^2} + Bt - B - B\sqrt{1 - a^2} = 2 \quad (3.11.23)$$

$$(A + B)t - (A + B) + (A - B)\sqrt{1 - a^2} = 2 \quad (3.11.24)$$



che é soddisfatta per:

$$A + B = 0 \implies B = -A \quad (3.11.25)$$

Ne segue che:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}; \quad B = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \quad (3.11.26)$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} & \int \frac{2}{(t-1-\sqrt{1-a^2})(t-1+\sqrt{1-a^2})} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left[ \int \frac{1}{(t-1-\sqrt{1-a^2})} dt - \int \frac{1}{(t-1+\sqrt{1-a^2})} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{1-a^2}}{t-1+\sqrt{1-a^2}} \right| \end{aligned} \quad (3.11.27)$$

Risostituendo per la (3.11.15)  $t = n(z) + \sqrt{n^2(z) - a^2}$ , si ha:

$$\int \frac{dn}{(n(z)-1)\sqrt{n^2(z)-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln \left| \frac{n(z) + \sqrt{n^2(z) - a^2} - 1 - \sqrt{1-a^2}}{n(z) + \sqrt{n^2(z) - a^2} - 1 + \sqrt{1-a^2}} \right| \quad (3.11.28)$$

Poiché é sempre  $n(z) > 1$ , si può togliere il valore assoluto e scambiando il numeratore con il denominatore si può scrivere:

$$\int \frac{dn}{(n(z)-1)\sqrt{n^2(z)-a^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln \left[ \frac{n(z) - 1 + \sqrt{n^2(z) - a^2} + \sqrt{1-a^2}}{n(z) - 1 + \sqrt{n^2(z) - a^2} - \sqrt{1-a^2}} \right] \quad (3.11.29)$$

che si può ancora scrivere:

$$\int \frac{dn}{(n(z)-1)\sqrt{n^2(z)-a^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln \left[ \frac{1 + \frac{\sqrt{1-a^2}}{n(z) - 1 + \sqrt{n^2(z) - a^2}}}{1 - \frac{\sqrt{1-a^2}}{n(z) - 1 + \sqrt{n^2(z) - a^2}}} \right] \quad (3.11.30)$$

D'altra parte é noto che:

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad 0 \leq x^2 < 1 \quad ^5) \quad (3.11.31)$$

---

<sup>5)</sup> Abramowitz Milton and Stegun Irene A. (Eds.) - Handbook of Mathematical Functions - Dover Publications, 1970 - pag. 86 n. 4.6.22.

In definitiva, quindi:

$$\int \frac{dn}{(n(z) - 1)\sqrt{n^2(z) - a^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{1 - a^2}}{n(z) - 1 + \sqrt{n^2(z) - a^2}}\right) \quad (3.11.32)$$

Quindi l'equazione (3.11.13) si scrive:

$$\begin{aligned} & \int \frac{-Hn_0 \sin \theta_0}{(n(z) - 1)\sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0}} dn = \\ & = \frac{2Hn_0 \sin \theta_0}{\sqrt{1 - n_0^2 \sin^2 \theta_0}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{1 - n_0^2 \sin^2 \theta_0}}{n(z) - 1 + \sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0}}\right) \end{aligned} \quad (3.11.33)$$

Ma:

$$n_0 \sin \theta_0 = \sin \theta_1 \quad (3.11.34)$$

Quindi:

$$\int \frac{-Hn_0 \sin \theta_0}{(n(z) - 1)\sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0}} dn = 2H \tan \theta_1 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\cos \theta_1}{n(z) - 1 + \sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta_1}}\right) \quad (3.11.35)$$

Quindi l'equazione della traiettoria é:

$$\boxed{x = 2H \tan \theta_1 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\cos \theta_1}{n(z) - 1 + \sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta_1}}\right)} \quad (3.11.36)$$

Imponendo, per comoditá, che per  $z = 0$   $x$  si annulli, l'equazione (3.11.36) diventa:

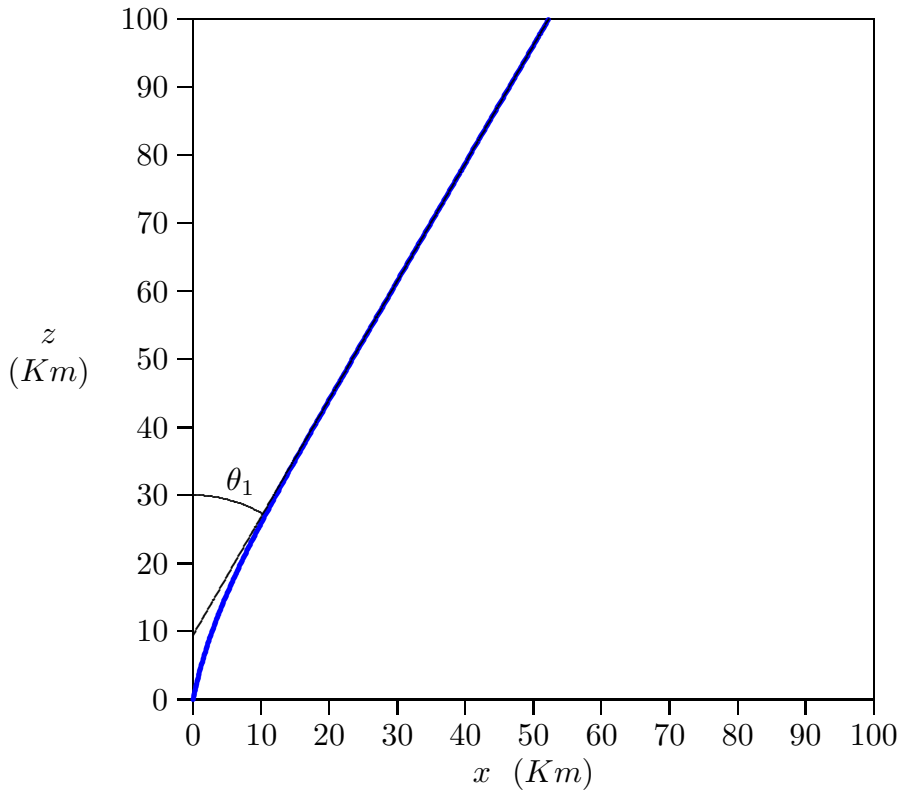
$$\boxed{x = 2H \tan \theta_1 \left[ \operatorname{arctanh}\left(\frac{\cos \theta_1}{n(z) - 1 + \sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta_1}}\right) - \operatorname{arctanh}\left(\frac{\cos \theta_1}{n_0 - 1 + \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \theta_1}}\right) \right]} \quad (3.11.37)$$

Le figure 3.11-5 e 3.11-6 riportano ciascuna due grafici rappresentanti traiettorie di raggi luminosi, valutati con la formula (3.11.37) nel caso di  $\theta_1 = 30^\circ$  e nel caso di  $\theta_1 = 45^\circ$  la prima e nel caso di  $\theta_1 = 60^\circ$  e nel caso di  $\theta_1 = 80^\circ$  la seconda. É stato scelto, virtualmente,  $n_0 = 2.5$  per poter visualizzare meglio la distorsione delle traiettorie in prossimitá del suolo.

**Programma in ambiente Matlab per graficare le traiettorie  
in atmosfera non omogenea con indice di rifrazione decrescente:  
'rifrazione\_atmosferica.m'**

```
delete(get(0,'children'));  
clear all  
z=0:1:100;  
H=8.86;  
nzero=2.5;  
senteta1=sind(30);  
costeta1=sqrt(1-senteta1.^ 2);  
nzeta=1+(nzero-1).*exp(-z./H);  
FF=costeta1./(nzeta-1+sqrt(nzeta.^ 2-senteta1.^ 2));  
FF0=costeta1./(nzero-1+sqrt(nzero.^ 2-senteta1.^ 2));  
x=2.*H.*senteta1./costeta1.*(atanh(FF)-atanh(FF0));  
axis([0 100 0 100])  
plot(x,z)
```

**Traiettoria di un raggio:**  $n_0 = 2.5$ ,  $H = 8.86 \text{ Km}$ ,  $\theta_1 = 30^\circ$



**Traiettoria di un raggio:**  $n_0 = 2.5$ ,  $H = 8.86 \text{ Km}$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$

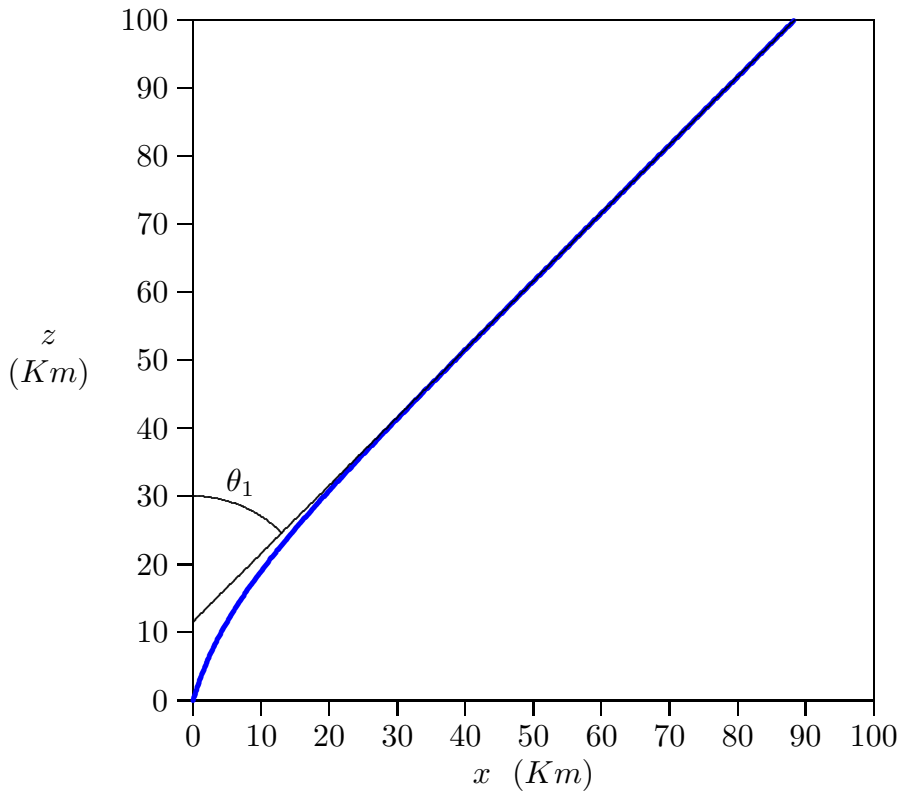
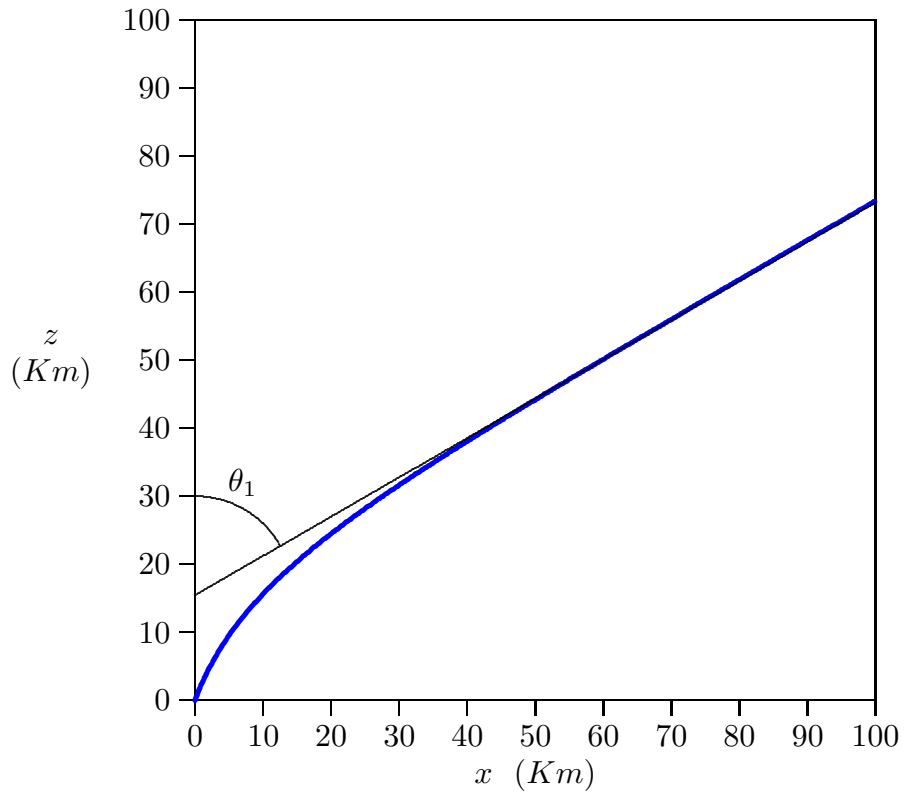


fig.3.11-5

**Traiettoria di un raggio:**  $n_0 = 2.5$ ,  $H = 8.86 \text{ Km}$ ,  $\theta_1 = 60^\circ$



**Traiettoria di un raggio:**  $n_0 = 2.5$ ,  $H = 8.86 \text{ Km}$ ,  $\theta_1 = 80^\circ$

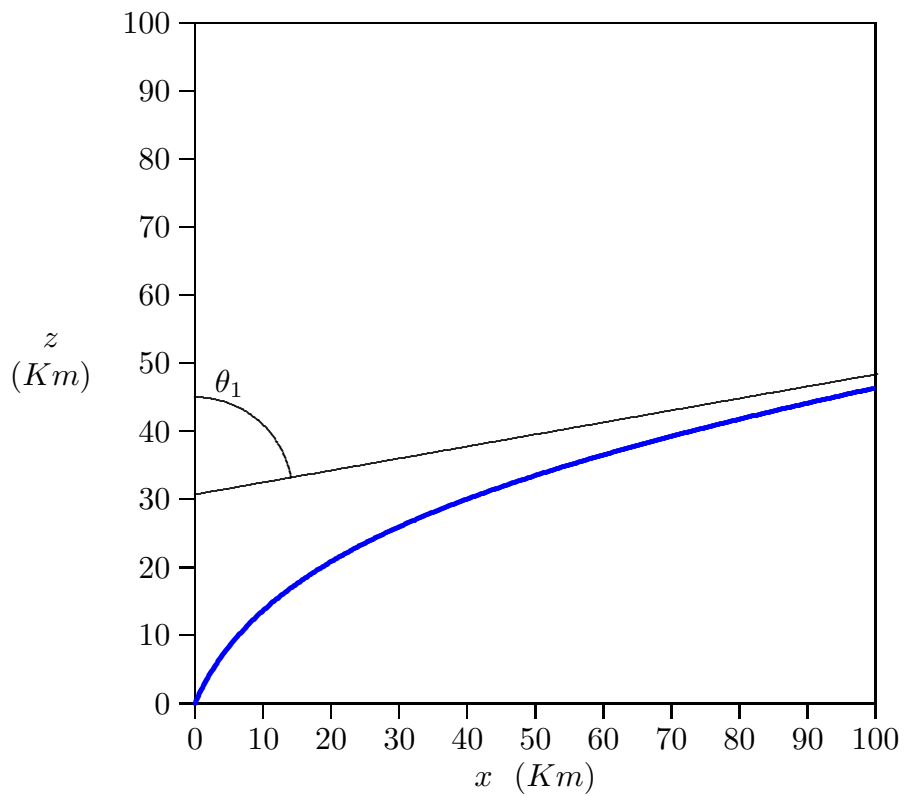


fig.3.11-6

### 3.12 - L'appiattimento del Sole

Poiché la rifrazione non é la stessa a tutte le altezze, viene rivelata in maniera diversa la parte alta e la parte bassa del Sole. L'effetto é piú marcato quando il Sole é prossimo all'orizzonte.

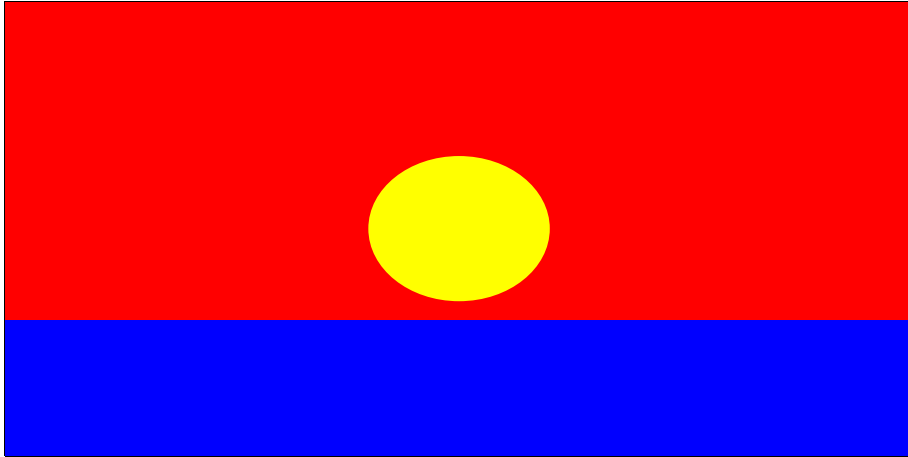


fig.3.12-1

### 3.13 - Dispersione della luce

Per il vetro crown si hanno i seguenti valori dell'indice di rifrazione in funzione del colore della luce.

Violetto	Azzurro	Verde	Giallo	Arancione	Rosso
$n = 1.532$	$n = 1.528$	$n = 1.519$	$n = 1.517$	$n = 1.514$	$n = 1.513$

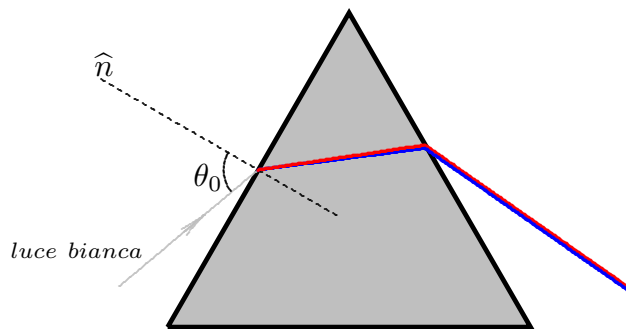


fig.3.13-1

### 3.14 - Il raggio verde

Vedere il raggio verde sembra un avvenimento magico ed irrealé. In realtà é un fenomeno atmosferico discreto e poco spettacolare. Si puó vedere la sera al tramonto del sole su un orizzonte lontano: bisogna che la linea dell'orizzonte sia visibile a piú di 20 Km. Nel momento in cui l'ultimo frammento di Sole é sul punto di sparire, si osserva

una piccola porzione di un bel verde smeraldo durante circa 1/4 di secondo. I francesi e i tedeschi chiamano questo fenomeno il raggio verde ma per gli inglesi é il lampo verde, che mostra la brevità del fenomeno. Sembra che si possa così percepire un raggio di un blu del colore dell'arco elettrico in altezza con un cielo particolarmente chiaro.

La comunità scientifica si interessa a questo fenomeno alla fine del XIX<sup>0</sup> quando Jules Verne ne fa il titolo di un romanzo. Poiché le prime osservazioni sono state fatte a bordo di una nave, si pensava che era la luce del Sole al tramonto che si colorava di verde nelle onde. Ma é stato necessario cercare un'altra spiegazione quando si é visto il raggio verde sulla Terra e nei deserti. Si é pensato così a un fenomeno di persistenza visiva, il verde essendo il colore complementare al rosso arancione. Ma il raggio verde é anche visibile, al mattino, al levar del Sole. Il raggio verde si spiega a causa della separazione di differenti colori della luce del Sole. Ciascun colore forma una immagine separata del Sole, e dal basso in alto, si hanno i dischi rossi, arancione, verde, giallo e blu. Durante il quarto d'ora che precede il tramonto del Sole si può osservare con dei binocoli, muniti di un filtro per evitare l'abbagliamento una frangia verde attorniante la metà superiore del Sole, allorché la metà inferiore é attorniata da una striscia rossa. Questa striscia é ben visibile quando la sommità del Sole é mascherata da uno strato di nuvole. La frangia verde é visibile per circa dieci minuti, il fenomeno si intensifica man mano che il Sole si abbassa sull'orizzonte. Lo strato fluttua e danza a causa delle instabilità dell'atmosfera e forma talvolta delle figure spettacolari. Il raggio estremo verde appare qualche volta separato dal disco solare a causa dell'assorbimento della luce gialla e arancione dal vapore d'acqua e dall'ozono atmosferico. Allorquando il Sole attraversa l'orizzonte, i differenti dischi rosso, arancione giallo poi verde spariscono l'uno dopo l'altro. Il raggio verde é la fase finale allorquando l'ultimo bagliore proveniente dal Sole non é troppo rosso per la nebbia. Si tratta allora di un piccolo capello verde visibile per una frazione di secondo. La prima foto di questo fenomeno é stata realizzata dal padre gesuita Treusch, operante all'Osservatorio del Vaticano, a Castel Gandolfo nel 1954, con un telescopio di 65 cm di distanza focale.

### 3.15 - L'arcobaleno

La bellezza di un arcobaleno ha sempre destato forte impressione sin dai tempi antichi. L'apparizione di un arcobaleno era considerata un buon segno avente poteri magici. Secondo una vecchia superstizione inglese, ai piedi di un arcobaleno si trova un vaso pieno d'oro.

Oggigiorno si sa che i poteri magici dell'arcobaleno esistono solo nelle fiabe. In realtà l'arcobaleno é un fenomeno ottico connesso con la rifrazione della luce in una miriade di goccioline di pioggia fluttuanti nell'atmosfera. Tuttavia, non molte persone sono consapevoli che esso é dovuto alla rifrazione della luce in goccioline d'acqua che causa la formazione di un gigantesco arco sfumato nei colori, nel cielo. Per questa ragione, vale la pena di dare un'interpretazione fisica di questo spettacolare fenomeno ottico.

### 3.16 - L'arcobaleno agli occhi di un osservatore attento

Prima di tutto, osserviamo che un arcobaleno puó essere osservato solo **con le spalle al sole**. Esso appare solo quando il sole brilla su un velo di pioggia. Appena la pioggia diminuisce e poi cessa, l'arcobaleno svanisce. I colori dell'arcobaleno seguono la stessa sequenza che essi hanno nello spettro risultante dal passaggio di un fascio di luce attraverso un prisma. **La parte piú bassa dell'arco é violetta e la parte piú alta é rossa** (fig.3.16-1).

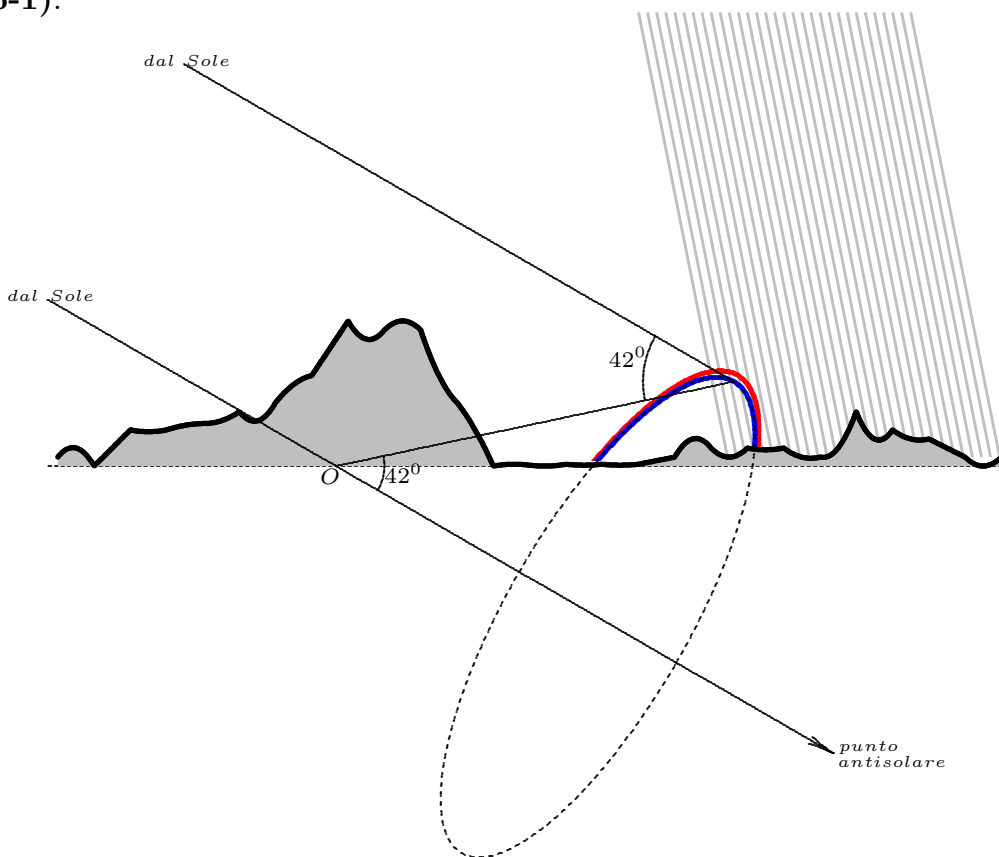


fig.3.16-1



Talvolta, uno piú grande e alquanto sfuocato arcobaleno secondario appare sopra quello principale. L'ordine dei colori in esso é cambiato, la parte interna é rossa e la parte piú alta violetto. Un osservatore fermo su una superficie piana posta sulla Terra puó vedere l'arcobaleno se l'altezza del sole, cioè la sua elevazione angolare sopra l'orizzonte é sotto i  $42^{\circ}$  (la dimostrazione sará fatta in seguito). Piú basso é il sole, piú alto é l'arcobaleno e, conseguentemente, piú grande la sua parte visibile. Un arcobaleno secondario appare se l'altezza del sole non é piú grande di  $52^{\circ}$ . L'arcobaleno sembra essere una specie di una immensa ruota avente un asse immaginario passante per il sole e per l'occhio dell'osservatore.

In figura (3.16-2) questo é la linea retta  $OO_1$ ; il punto  $O$  indica l'osservatore ed  $OCD$  é il piano della superficie terrestre, mentre l'angolo  $A\hat{O}O_1$  é l'altezza del sole sull'orizzonte e si indica con  $\psi$ . Il punto  $O_1$  é chiamato **punto antisolare e giace sotto l'orizzonte**  $CD$ . Osserviamo, incidentalmente, che  $\tan \psi$  é anche eguale al rapporto fra l'altezza dell'osservatore e la lunghezza della sua ombra. La figura (3.16-2) mostra che l'arcobaleno é la circonferenza limitante la base del cono, avente come asse la linea  $OO_1$  e come semiapertura l'angolo  $\gamma$ . Risulta evidente che l'osservatore non puó vedere l'intera circonferenza ma solo quella parte di essa che é sopra l'orizzonte cioè la parte visibile é l'arco  $CBD$ . Notiamo che l'angolo  $A\hat{O}B = \phi$  é l'angolo secondo il quale l'osservatore "vede" la cima dell'arco, mentre l'angolo  $A\hat{O}D = \alpha$  é la semiapertura orizzontale dell'arcobaleno.

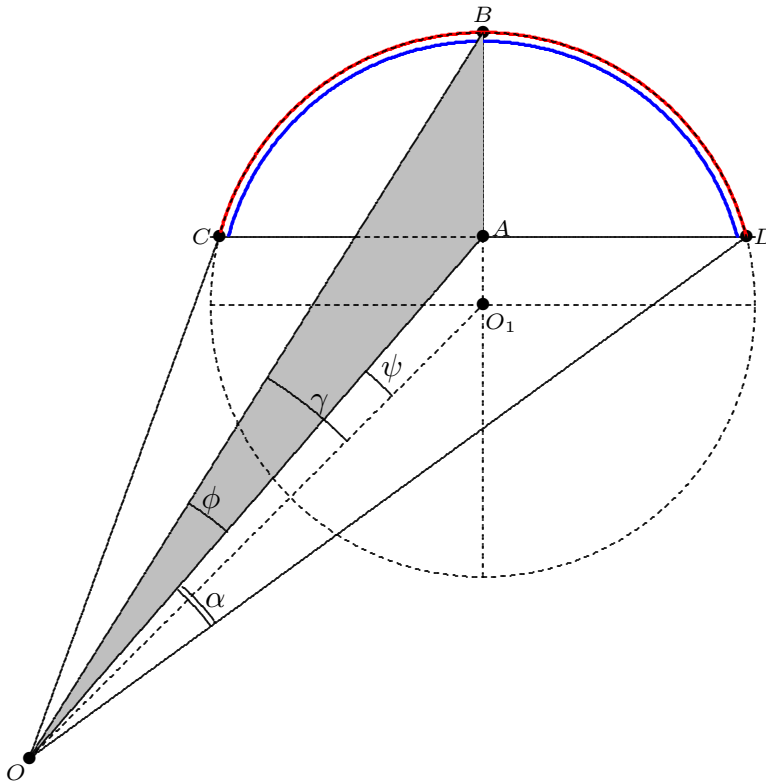


fig.3.16-2

Per inciso, nel punto A secondo il mito puó essere trovato un vaso pieno d'oro. É evidente che  $\phi + \psi = \gamma$ . Cosí, la posizione dell'arco rispetto al passaggio dell'osservatore rispetto al sole, e le dimensioni angolari dell'arcobaleno sono determinate dall'altezza

del sole. L'osservatore é nel vertice di un cono il cui asse giace sulla linea congiungente l'osservatore e il sole; l'arco é una parte del cerchio limitante la base del cono che si trova sopra l'orizzonte. **Quando l'osservatore si muove, il cono e quindi l'arcobaleno stesso si muove, ecco perché non c'è modo di poter prendere il famoso vaso pieno d'oro.**

Due cose devono essere chiarite. Primo, quando noi diciamo la linea retta congiungente l'osservatore ed il sole, significa l'apparente direzione del sole e non quella reale. Essa differisce dalla direzione reale dall'angolo di rifrazione. Secondariamente, quando noi diciamo che l'arcobaleno é sopra l'orizzonte, vogliamo dire che é relativamente distante, quando il velo di pioggia é parecchie miglia lontano da noi.

Possiamo osservare un arcobaleno molto vicino, per esempio, un arcobaleno formato dallo spruzzo di una grande fontana. In questo caso gli estremi dell'arco sembrano andare giù nel suolo. La distanza fra l'arcobaleno e l'osservatore non ha un effetto tangibile sulle dimensioni angolari dell'arco. Segue dalla figura che l'angolo  $\phi = \gamma - \psi$ .

Per l'arcobaleno primario l'angolo  $\gamma$  é circa  $42^0$  (per il colore giallo dell'arcobaleno), mentre per l'arcobaleno secondario il rispettivo angolo é  $52^0$ .

Questo spiega perché l'osservatore non può ammirare l'arcobaleno primario se l'altezza del sole supera i  $42^0$ . Analogamente non si vedrà l'arcobaleno secondario quando l'altezza del sole supera i  $52^0$ . Se l'osservatore si trova su un aeromobile in volo, i valori relativi all'altezza del sole saranno rivalutati. É importante osservare che un osservatore in un aeroplano può vedere un arcobaleno come tutta una circonferenza. Tuttavia, dovunque l'osservatore é posizionato (sulla superficie terrestre o sopra di essa) egli dovrà essere invariabilmente nel vertice di un cono puntato verso il sole ed avente un'apertura di  $42^0$  nel caso di arcobaleno primario o di  $52^0$  nel caso di arcobaleno secondario. Perché gli angoli sono di  $42^0$  e di  $52^0$ ? A questo problema risponderemo più tardi.

**Problema:** Trovare gli angoli a cui viene visto l'arcobaleno in altezza ( $\phi$ ) e larghezza ( $\alpha$ ) se l'altezza del sole é  $\psi = 20^0$ .

Si ha:  $\phi = \gamma - \psi = 42^0 - 20^0 = 22^0$ . Per calcolare  $\alpha$  consideriamo sempre la figura 3.16-2. Consideriamo i triangoli  $BOO_1$  e  $AOO_1$ . Dal triangolo  $AOO_1$  si ha:  $OO_1 = OA \cos \psi$ . Dal triangolo  $BOO_1$  si ha:  $OO_1 = OB \cos \gamma$ . Consideriamo il triangolo  $OAD$ , l'angolo  $O\hat{A}D$  é retto quindi  $OA = OD \cos \alpha$ ; il rapporto  $\frac{OO_1}{OB}$  si può scrivere come:

$$\frac{OO_1}{OB} = \frac{OO_1}{OA} \frac{OA}{OB}$$

Ma  $OB = OD$ , quindi:

$$\frac{OO_1}{OB} = \frac{OO_1}{OA} \frac{OA}{OD}$$

ció  $\cos \gamma = \cos \psi \cos \alpha$  da cui:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \gamma}{\cos \psi} = \frac{\cos 42^0}{\cos 20^0} = 0.79$$

Ne segue che  $\alpha \simeq 38^0$ .

**3.17 - Interpretazione dell'origine dell'arcobaleno: da Fleischer a Newton.**

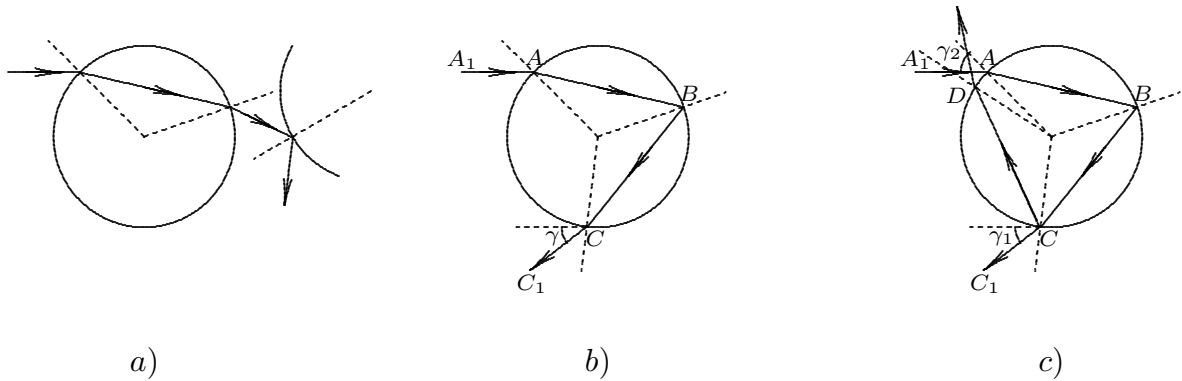


fig.3.17-1

Sin da quando si conosce l'arcobaleno é stato sempre tentato di capirne la causa. Nel 1571 **Fleischer** da Breslau (ora Wroclaw, Polonia) pubblicó un articolo in cui asseriva che l'osservatore vede l'arcobaleno quando egli percepisce la luce che é stata doppiamente rifratta in una goccia di pioggia e successivamente riflessa da un'altra (fig.3.17-1a).

Piú tardi l'italiano **Marcus Antonius De Dominis** (1566-1624) suggeriva un'altra interpretazione del passaggio della luce all'osservatore, che era, incidentalmente, corretta. Egli credeva che ogni raggio di luce formante l'arcobaleno é doppiamente rifratto e riflesso nella stessa goccia (vedi figura 3.17-1b). Un raggio  $A_1A$  di luce solare entra nella goccia, é rifratto in A ed é allora riflesso in B, e finalmente lascia la goccia dopo essere rifratto in C. L'osservatore vede il raggio  $CC_1$ . Esso forma un angolo  $\gamma$  con la direzione della luce incidente. **René Descartes** continuó dove De Dominis aveva lasciato e spiegó l'arcobaleno secondario. Egli consideró che la luce del sole é sia rifratta che riflessa in ogni punto A, B e C (fig.3.17-1b). Veramente, i raggi riflessi in A cosí come quello rifratto in B non formano l'arcobaleno e non sono perció di nostro interesse. Viceversa il raggio riflesso in C puó, dopo essere rifratto nel punto D, lasciare la goccia e procedere per formare un altro arcobaleno (fig.3.17-1c). Mentre l'osservatore vede l'arcobaleno primario all'angolo  $\gamma_1 = 42^\circ$ , egli vedrá quello secondario a  $\gamma_2 = 52^\circ$ .

Naturalmente, l'arcobaleno secondario sará piú sbiadito del primario perché una parte dell'energia del raggio  $CD$  viene perduta nella riflessione in D. Tuttavia, né Dominis né Descartes furono abili a spiegare perché un osservatore vede l'arcobaleno ad un angolo di  $42^\circ$  o  $52^\circ$ . Inoltre essi fallirono nello spiegare i colori dell'arcobaleno. Cosí Dominis suppose che i raggi solari che viaggiano lungo il cammino piú corto dentro una goccia d'acqua e, quindi, si mescolano con l'oscuritá per poco e producono il rosso. D'altro canto, i raggi che coprono il percorso piú lungo dentro una goccia d'acqua si mescolano piú a lungo con l'oscuritá e producono il violetto. Queste erano le idee prenewtoniane circa l'origine dei colori.

**3.18 - Spiegazione di Newton sulla origine dell'arcobaleno nella sua "Lectures on Optics"**

La teoria di **Newton** sui colori Gli ha permesso di spiegare l'origine dell'arcobaleno. La sua "Lectures on Optics" contiene un passaggio che spiega i fattori che causano lo arcobaleno. L'idea é la seguente: i raggi che entrano in una goccia di pioggia la lasciano dopo una riflessione, ma qualcuno di essi la lascia dopo due riflessioni, e vi é qualche raggio che lascia la goccia dopo tre o piú riflessioni. Poiché le gocce sono molto piccole rispetto alla distanza fra esse e l'osservatore, esse possono essere considerate come punti e non vi é bisogno di prendere in considerazione le loro dimensioni. Bisogna considerare solo l'angolo formato fra i raggi incidenti ed emergenti.

*I raggi emergenti sono piú condensati dove gli angoli sono o molto grandi o molto piccoli. Poiché i differenti tipi di raggi hanno angoli piú grandi o piú piccoli, i raggi che hanno densità piú grande in qualche posto, tendono a manifestare il proprio colore.* Queste sono le parole di Newton. Cerchiamo di spiegare quanto sopra.

### 3.19 - Passaggio di un raggio di luce attraverso una goccia di pioggia

Assumiamo che tutti i raggi che cadono su una goccia di pioggia abbiano la stessa lunghezza d'onda. Questo significa che inizialmente noi consideriamo solo la rifrazione (e la riflessione) dei raggi nella goccia e non consideriamo la dispersione della luce.

Si abbia un fascio parallelo di luce monocromatica che cade su una goccia di raggio  $R$ . Chiameremo il rapporto  $\xi = \frac{\rho}{R}$  il **parametro d'impatto**;  $\rho$  é la distanza del raggio dalla linea retta che é parallela ad esso e passa per il centro della goccia. Poiché la goccia é simmetrica, ogni raggio con lo stesso parametro d'impatto (fig.3.19-1) segue un simile cammino e lascia la goccia allo stesso angolo rispetto alla direzione iniziale. La simmetria sferica della goccia causa che il cammino di ogni raggio giace nello stesso piano, il piano passante per il raggio in questione ed il centro della goccia.

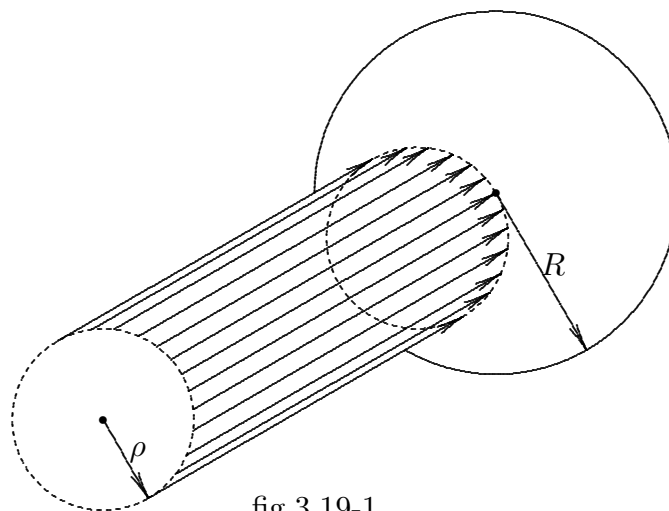


fig.3.19-1

Conseguentemente consideriamo il problema bidimensionale, tracciando il cammino dei raggi di luce in questo piano che sará il piano di figura 3.19-2. Si puó osservare il percorso di un raggio di luce con parametro d'impatto  $\frac{\rho}{R}$ . Sia  $\alpha$  l'angolo di incidenza del

raggio sulla goccia. Si ha:  $\sin \alpha = \frac{\rho}{R} = \xi$ .

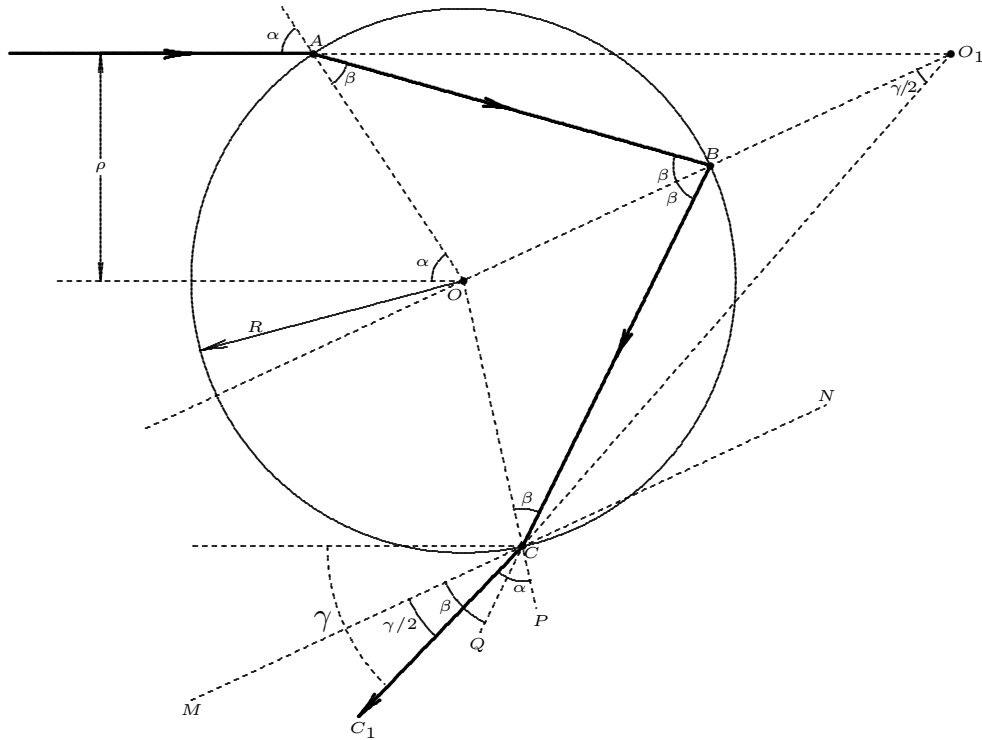


fig.3.19-2

Per tracciare la figura 3.19-2 abbiamo posto:

$$\rho = 2.5, \quad R = 3, \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right) = \arcsin\left(\frac{2.5}{3}\right) = 56^{\circ}.443 \quad (3.19.1)$$

e, quindi:

$$n_g \sin \beta = \sin \alpha \implies \beta = \arcsin\left[\frac{1}{1.333} \sin(56^{\circ}.443)\right] = 38^{\circ}.797 \quad (3.19.2)$$

Poiché i triangoli  $AOB$  e  $BOC$  sono isosceli si ha:  $\widehat{OAB} = \widehat{ABO}$  e  $\widehat{OBC} = \widehat{BCO}$ . L'angolo di incidenza é eguale all'angolo di riflessione, per cui  $\widehat{ABO} = \widehat{OBC}$ .

Indicheremo questi angoli con  $\beta$  e designeremo con  $\gamma$  l'angolo fra il raggio emergente ed il raggio incidente. L'angolo  $\widehat{AO_1C}$  é eguale a  $\gamma$ . I triangoli  $AO_1B$  e  $CBO_1$  sono manifestamente eguali e quindi gli angoli  $\widehat{AO_1O}$  e  $\widehat{CO_1C}$  sono eguali e poiché la loro somma é  $\gamma$  si ha  $\widehat{AO_1O} = \widehat{CO_1C} = \frac{\gamma}{2}$ . Tracciamo da  $C$  una linea parallela all'asse  $OO_1$ , sia essa  $MN$ .

É evidente che l'angolo  $\widehat{MCC_1} = \widehat{O_1CN} = \widehat{CO_1C} = \frac{\gamma}{2}$ . Tenendo presente, con ovvie considerazioni, che l'angolo  $\widehat{C_1CP} = \alpha$  e l'angolo  $\widehat{QCP} = \beta$  e che (poiché  $MN$  é parallelo a  $OO_1$ )  $\widehat{MCQ} = \widehat{OBC} = \beta$  si ha:  $\widehat{MCC_1} = \widehat{MCQ} - (\widehat{C_1CP} - \widehat{QCP})$ . Sostituendo:  $\frac{\gamma}{2} = \beta - (\alpha - \beta)$  da cui:  $\beta = \frac{\gamma + 2\alpha}{4}$ .

Esprimiamo l'angolo  $\gamma$  in termini del parametro d'impatto  $\xi$  del raggio. Per la legge della rifrazione si ha:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ .

Sostituendo a  $\beta$  la sua espressione, si ha:

$$\sin \frac{\gamma + 2\alpha}{4} = \frac{\sin \alpha}{n} \quad \text{ossia} \quad \frac{\gamma + 2\alpha}{4} = \arcsin \left( \frac{\sin \alpha}{n} \right) \quad (3.19.3)$$

da cui:

$$\gamma = 4 \arcsin \left( \frac{\sin \alpha}{n} \right) - 2\alpha \quad (3.19.4)$$

ed in funzione del parametro di impatto:

$$\boxed{\gamma = 4 \arcsin \left( \frac{\xi}{n} \right) - 2 \arcsin \xi} \quad (3.19.5)$$

Notiamo che  $n = \frac{4}{3}$  corrisponde ai raggi **nella parte gialla dello spettro**.

### 3.20 - Il piú grande angolo fra il raggio incidente e quello emergente

All'aumentare del parametro d'impatto da 0 a 1, l'angolo  $\gamma$  aumenta fino ad un certo valore massimo e poi decresce a zero per  $\xi = 0.994$  (per il raggio giallo). É importante trovare il massimo valore dell'angolo  $\gamma$  perché, come nota Newton, **i raggi emergenti sono piú intensi quando questi angoli sono o massimi o minimi**.

Consideriamo il seguente problema: trovare il massimo valore fra il raggio incidente ed il raggio emergente da una goccia in funzione del parametro d'impatto.

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \frac{4}{n\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{n}\right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{4\sqrt{1 - \xi^2} - 2n\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{n}\right)^2}}{n\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{n}\right)^2}\sqrt{1 - \xi^2}} = 0 \quad (3.20.1)$$

Si ha, quindi:

$$4 - 4\xi^2 = n^2 - \xi^2 \quad \text{da cui} \quad \xi = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad (3.20.2)$$

Per  $n = \frac{4}{3} \implies \xi = 0.861$  a cui corrisponde un  $\gamma_{max} = 42^{\circ}02'$ .

Su ogni goccia sono incidenti raggi di luce con parametri di impatto variabile da 0 a 1. Essi lasciano la goccia a differenti angoli  $\gamma$ . Si vede dalla figura che il massimo valore di  $\gamma$  é  $42^{\circ}$ . In corrispondenza di tale valore, si dimostrerá con la teoria della diffrazione, si ha la massima intensitá della luce riflessa. Questo infatti non puó essere dimostrato con

la teoria geometrica.

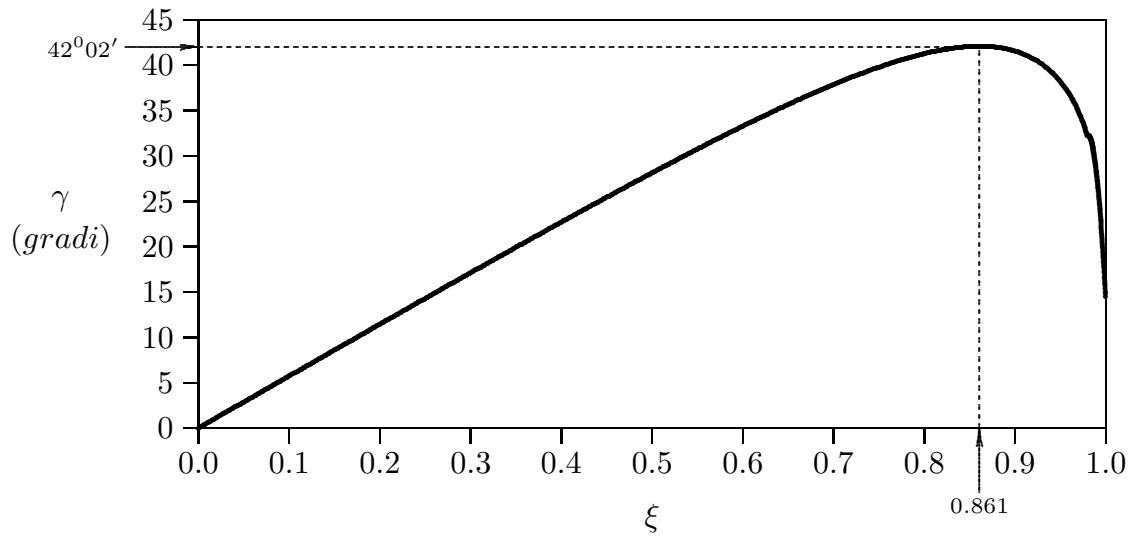


fig.3.20-1

### 3.21 - Il miraggio

Il miraggio é un fenomeno popolare il cui significato reale é talvolta frainteso. É spesso scambiato per qualche cosa che non esiste, piuttosto piú per una allucinazione che per un fenomeno fisico. Per questo esso potrebbe ben essere utilizzato nell'insegnamento dell'ottica, quando si discute della rifrazione della luce, poich  é qualcosa di diverso dagli usuali casi di rifrazione. É tuttavia raramente discusso nelle Scuole superiori e nelle Universit  perch  pu  essere osservato solo in eccezionali condizioni meteorologiche, ed é quindi inadatto per una sistematica osservazione, che é altamente desiderabile per una presentazione utile in classe.

L'uomo ha osservato i miraggi e discusso di essi da migliaia di anni.<sup>1)</sup> Tuttavia non ci sono scritti antichi dove si parla di questi fenomeni. Niente appare nella letteratura egiziana antica o in quella dei primi popoli civilizzati. Non si trova niente nemmeno negli scritti dei Greci e dei Romani. Non sono menzionati nella Bibbia, da Marco Polo o da scrittori delle Crociate. Forse non molto dopo le Crociate, ad un ricorrente miraggio osservato nello stretto di Messina fu dato il nome di Fata Morgana.<sup>2)</sup> Nel 1798 un matematico francese, **Gaspard Monge**, al seguito dell'armata di Napoleone in Egitto scrisse sull'apparire dell'acqua nel deserto. Egli fu il primo a ben interpretare il fenomeno del miraggio. Solo un miraggio é menzionato nella storia americana: nel 1878 durante la marcia della piccola armata del generale Custer dal Fort Abraham Lincoln verso la tragica battaglia di Little Big Horn. Si racconta che quando l'esercito si allontan  dal forte e fu perso di vista, ai soldati lasciati nel forte si mostr  la colonna marciante nel cielo, ogni uomo e ogni cavallo apparivano chiari nel cielo.

Un'altra storia di miraggio sembra sia avvenuta durante la I guerra mondiale quando l'armata del generale Allenby (inglese) si mosse a nord dell'Egitto contro i Turchi. Le due forze in campo si scontrarono in una grande battaglia; i Turchi erano in vantaggio. Un avamposto turco mand  un messaggio all'alto comando che un esercito inglese di rinforzo stava avanzando per attaccare al fianco l'esercito turco. Il comando supremo turco decise allora la ritirata. Non vi fu rinforzo alcuno ma era un miraggio. Non so se ci  sia veramente accaduto ma é quello che si racconta. Ci sono stati altri episodi di miraggio anche se non cos  importanti. Il primo scienziato che scrisse in forma scientifica sul miraggio, formalizzandolo teoricamente, fu il grande scienziato francese **J.B. Biot**.<sup>3)</sup> Riportiamo nel prossimo paragrafo la traduzione dell'introduzione della presentazione di Biot perch  la riteniamo molto interessante sia dal punto di vista culturale sia anche dal punto di vista

---

<sup>1)</sup> James H. Gordon - Mirages - Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, 1959 - United States Government Printing Office, Washington.

<sup>2)</sup> Una prima e vera descrizione del fenomeno fu fatta da Padre Angelucci nel 1634 in una lettera scritta a Padre Leone Sanzio. Sono molte le deduzioni etimologiche delle parole Fata Morgana; la pi  accreditata é che il fenomeno fu ritenuto opera della Fata Morgana, sorella di Art  ed allieva di Merlino ritenuta la regina fra le Streghe - Vittorio E. Boccara - Memorie della Societ  degli Spettroscopisti Italiani - Vol. XXXI, 1902.

<sup>3)</sup> Jean-Baptiste Biot (Parigi, 21 aprile 1774 - 3 febbraio 1862: 'Sur les refractions extraordinaires qui s'observent tres-pres de l'horizon' - Memories de la classe des Sciences - Lu le 8 aout, 1808.)



storico.

### 3.22 - Storia scientifica degli studi sul miraggio scritta da Biot

#### Sur les refractions extraordinaires qui s'observent tres-pres de l'horizon Par M. Biot - Lu le 8 aout, 1808

I fisici e gli astronomi hanno da tempo osservato che gli oggetti che si vedono molto vicino all'orizzonte inviano qualche volta all'osservatore due immagini, l'una diretta, l'altra invertita. Nessuno piú dei marinai ha potuto osservare questo fenomeno; cosí esso é ben conosciuto fra di loro, e Essi lo individuano con un nome molto espressivo, **miraggio**, perché in effetti sembra che gli oggetti si riflettano come su uno specchio (in lingua francese miroir). Picard descrive qualche apparizione di questo genere nel suo libro *Voyage d'Uranibourg*<sup>1)</sup>. Se ne trova qualcuno nelle memorie dei primi Cassini<sup>2)</sup>, ma non sembra che se ne sia fatto un oggetto speciale di ricerche prima di una memoria di Monsieur Huddart, inserita nelle *Transactions philosophiques de 1797*. Monsieur Huddart riporta che egli abbia osservato in certe circostanze che dei vascelli a vela presentavano, oltre alla loro immagine diretta, una immagine capovolta. Egli ha visto anche delle sommitá di colline che sembravano distaccarsi dalla loro base, e sospese nell'aria. Egli attribuisce questo fenomeno all'evaporazione che, rendendo gli strati inferiori dell'aria piú umide e conseguentemente meno dense degli strati superiori, deve, secondo lui, fare prendere ai raggi luminosi una curvatura convessa verso la terra e per conseguenza produrre una seconda immagine dell'oggetto. Ma Monsieur Huddart non faceva attenzione che la differenza di densitá non é sufficiente per determinare questa curvatura. La condizione realmente neces-

---

<sup>1)</sup> Uraniborg é il nome del palazzo/osservatorio edificato dall'astronomo danese Ticho Brahe sull'isola di Hven donatagli nel XVI secolo dal sovrano Federico II. L'isola si trova nell'Oresund, il braccio di mare che separa la Danimarca dalla Svezia.

<sup>2)</sup> Giovanni Domenico Cassini nacque in Liguria, a Perinaldo (in provincia di Imperia, vicino a Sanremo; al tempo faceva parte della Repubblica di Genova), nel 1625. Compí i primi studi nel collegio dei Gesuiti di Genova, dove venne in contatto con Giovanni Battista Baliani, fisico, matematico e corrispondente di Galileo Galilei. Nel 1649, per aver previsto la vittoria delle truppe di Innocenzo X, adunate a Bologna per una spedizione militare contro il duca di Parma, acquisí notorieta di astrologo, cosa che egli assolutamente non era e non volle mai essere. Venne, comunque, chiamato a Bologna dal marchese Malvasia ad occuparsi del suo osservatorio privato e l'anno successivo ottenne l'insegnamento universitario di astronomia. L'importanza delle ricerche svolte a Bologna lo rese uno dei piú noti astronomi europei dell'epoca e, per questo, nel 1669 venne chiamato a Parigi dal Re Sole, Luigi XIV, presso l'Observatoire Royal, appena istituito. A Parigi Cassini si sposó e dette origine ad una vera e propria dinastia di astronomi che diressero l'Observatoire sino alla rivoluzione francese, con il pronipote Cassini IV. Pur da Parigi, Cassini rimase sempre in contatto con l'ambiente bolognese e collaboró attivamente all'istituzione della Specola dell'Istituto delle Scienze. Il Senato di Bologna non volle mai rassegnarsi alla sua partenza e gli mantenne libera la cattedra di Astronomia sino alla sua morte, avvenuta a Parigi nel 1712.

saria é la differenza dei poteri rifrangenti. Ora, i poteri rifrangenti dei gas non dipendono solamente dalla loro densità, ma anche dalla loro natura e dalla loro composizione chimica. In seguito alle esperienze che si sono fatte sulla rifrazione dell'acqua, sia allo stato liquido, sia allo stato di vapore, sia infine allo stato di decomposizione riducendola ai suoi gas costituenti, si deve concludere che il potere rifrangente del vapore acqueo, a forza elastica eguale, é poco differente di quello dell'aria; se bisogna assegnare il senso della differenza, é assai probabile che é piú grande di una piccola quantità. L'introduzione del vapore acqueo nell'aria atmosferica conduce all'aumento del potere rifrangente piuttosto che alla diminuzione; di conseguenza non é a questa causa che si deve attribuire il fenomeno del miraggio, e l'immagine capovolta degli oggetti.

Esiste anche nelle *Transactions philisophiques del 1789*, una memoria di Monsieur Vince, dove si trova scritto un grande numero di fenomeni di questo genere, i piú singolari che si siano mai visti. Il giorno in cui l'autore li osservó aveva fatto molto caldo; la sera il clima era molto afoso; il cielo era chiaro con qualche nuvola. Guardando vascelli a vela a diverse distanze, Monsieur Vince si accorse che qualcuno fra essi presentava delle immagini capovolte. Egli le osservó con un telescopio, e riconobbe subito che a causa della loro lontananza e del lato del mare dove si trovarono, esse apparivano molto diverse e molto variabili da un istante all'altro. Egli vide talvolta tre immagini, una capovolta e due dritte, qualche volta solamente due, e l'immagine capovolta al di sotto dell'altra o al di sopra. Tutte queste apparizioni cambiavano in misura che i vascelli si avvicinavano o si allontanavano dai limiti dell'orizzonte. Monsieur Vince cerca di spiegare questi fenomeni attribuendone la causa a delle variazioni di densità nei differenti strati d'aria; e, in effetti, se non si trattasse di spiegare la possibilità della formazione delle immagini, si troverebbe una infinitá di leggi che soddisferebbero questa condizione. Ma ciò non é sufficiente per far conoscere la vera causa del fenomeno; giacché si puó condurre dall'oggetto all'osservatore, una infinitá di traiettorie, e dunque nessuna sará la traiettoria vera. Il carattere di una teoria vera deve essere quello di spiegare i rapporti di posizione di queste diverse immagini, e i movimenti simultanei che si notano allorquando l'oggetto si avvicina o si allontana. Questo é quello a cui io spero di essere arrivato. Monsieur Vince rappresenta tutte le traiettorie come concave verso la superficie del mare, e ciò é analogo alla rifrazione ordinaria. É al contrario estremamente probabile che la loro curvatura non sia rivolta dallo stesso lato su tutta l'estensione del loro percorso; in quanto, nei fenomeni di questo genere, i raggi luminosi seguono una curva sinuosa e a serpentina, come lo si vedrá da parecchie esperienze che io riporteró nel seguito di questa memoria.

Peccato che Monsieur Vince si sia accontentato di osservare questi curiosi fenomeni con il telescopio senza misurarli, senza prendere, con degli strumenti, la depressione delle immagini e quelle dell'orizzonte del mare.

**Il fenomeno del miraggio piú evidente, il migliore constatato, e che ha piú di tutti attirato l'attenzione generale, é quello che Monsieur Monge ha descritto e spiegato nelle memorie dell'Istituto del Cairo.** Allorquando i soldati francesi entrarono nel deserto dell'Egitto, tutta l'armata fu testimone di un effetto ottico cosí nuovo e notevole. I villaggi che formano un vasto piano orizzontale, sembravano tutti coperti d'acqua. I villaggi costruiti su dei piccoli poggi sembravano al di sopra di questa inondazione, e presentavano da lontano, oltre l'immagine diretta, una immagine capovolta.

I soldati sedotti dall'illusione, correvano vanamente verso questa acqua immaginaria per eliminare la sete che li divorava. La spiaggia sfuggiva davanti a loro; e l'immagine dell'acqua indietreggiava senza sosta lasciando vedere al suo posto un suolo arido e riarso.

Monsieur Monge attribuisce questo fenomeno all'eccessivo calore del suolo che, dilatando gli strati inferiori dell'aria contigui alla sua superficie, fa che la densità dell'aria va crescendo dal basso in alto fino ad una certa altezza invece di andare a diminuire secondo la legge ordinaria di sovrapposizione degli strati, e come conviene per l'equilibrio in una temperatura uniforme. Non si può negare in effetti che questa sia la vera causa del fenomeno. I raggi luminosi incidenti in questi strati inferiori di densità variabile danno luogo a delle traiettorie convesse verso la superficie del suolo, e producono delle immagini capovolte. Monsieur Monge paragona questa inversione a quella prodotta dalla riflessione interna nei mezzi trasparenti omogenei. In effetti, questo confronto rende la cosa sensibile ed essa sarà affatto esatta se gli strati di densità variabile non hanno uno spessore infinitamente piccolo. Quanto all'apparizione di una superficie d'acqua, Monsieur Monge lo spiega molto bene con la riflessione del cielo o, per parlare esattamente, di tutte le particelle dell'atmosfera, che si trovano prossime all'orizzonte, inviando così all'osservatore le loro immagini capovolte come farebbero degli oggetti terrestri, e si riflettono attorno a questi oggetti come se fosse su un'acqua tranquilla, concorrente a completare l'illusione. Noi vedremo presto che il calcolo conferma questa spiegazione facendo qualche leggera modifica; ma soprattutto non gli sarà tolta una delle sue particolarità più notevole che è di avere capito il fenomeno, nel mezzo di un campo di battaglia, fra i rischi della guerra e di una vita piena di pericoli. Nello stesso tempo che Monsieur Monge spiegava il miraggio in Egitto, Monsieur Wollaston in Inghilterra pubblicava un bellissimo lavoro sullo stesso soggetto. Questo eccellente fisico attribuisce così le doppie immagini a una densità dell'aria crescente dal basso in alto per effetto del calore del suolo, e prova per mezzo di esperimenti termometrici molto ben fatti che nelle circostanze dove si osservano delle doppie immagini, questo stato dell'aria ha sempre luogo. Egli imita questi fenomeni e li amplifica osservandoli su corpi riscaldati attraverso dei liquidi di densità diversa, posti sulla superficie di un ferro arroventato. E non solamente egli ne descrive gli aspetti, le loro varietà ma esegue misure con degli strumenti e descrive nei diversi casi la rifrazione che i raggi subiscono, Questi risultati sono molto precisi per verificare la teoria matematica del fenomeno, e lo si vedrà presto che io ne ho fatto uso. Quanto a questa teoria, Monsieur Wollaston non la ha data. In verità egli prova che le traiettorie descritte dai raggi luminosi devono essere convesse verso la superficie riscaldata, ma siccome egli non aveva messo a punto l'equazione di queste traiettorie, non ha discusso la maniera in cui esse si intersecano, e la natura delle caustiche che possono risultare delle loro intersezioni; o, è di là che dipende la molteplicità delle immagini, la loro situazione e i rapporti di questo fenomeno con la posizione dell'oggetto. Ma dal punto di vista fisico, il suo lavoro non lascia niente a desiderare, è pieno d'esperienze immaginate con tutta la sagacità, e eseguite con tutte le accortezze che distinguono questo abile fisico. Infine, egli ha perfettamente raggiunto lo scopo dell'autore, che era soprattutto di provare che questo fenomeno delle doppie immagini nell'aria atmosferica è dovuto ad una variazione di densità contraria a quella che esiste ordinariamente.

Tre anni dopo, nel 1803, Monsieur Wollaston pubblicò ancora un'altra memoria sullo stesso soggetto. Qui egli aveva soprattutto in vista di dare ai marinai delle procedure

per evitare l'influenza delle rifrazioni straordinarie allorquando essi prendono l'altezza; a questo proposito egli riporta un gran numero di osservazioni fatte da lui stesso sul Tamigi, relativamente all'inversione degli oggetti. Questi che egli ha piú ordinariamente osservato erano i rami inclinati di qualche barca che il caso condusse sul Tamigi, e che in effetti erano favorevoli per l'osservazione a causa della loro obliquit . Il metodo di Monsieur Wollaston consiste nel misurare l'angolo fra i punti dove l'immagine capovolta sembra prolungarsi nell'acqua, e il punto dell'immagine diretta che si trova nella stessa verticale. Sfortunatamente si vede dalla teoria che questo angolo   variabile con la distanza dell'oggetto e l'altezza dell'occhio, due elementi che Monsieur Wollaston non ha potuto osservare, o almeno di cui egli non ha dato i valori. Cos  le variazioni accidentali che ci sono sicuramente state, hanno riversato nelle osservazioni cos  grandi irregolarit  che l'autore ne   stato estremamente sorpreso, senza sapere a cosa attribuirle. **Ma un fatto importante che   comune a tutte queste osservazioni,   che tutte le volte che Monsieur Wollaston ha cos  osservato il miraggio, la temperatura dell'acqua era piú calda di quella dell'aria: ci  di cui egli ha avuto l'accuratezza di assicurarsi con le osservazioni termometriche che sono consegnate nella sua memoria.**

Egli arriva anche, qualche volta, a vedere che degli oggetti lontani sembrano semplicemente sospesi in aria; la loro immagine   dritta e non   accompagnata, almeno in apparenza, da una seconda immagine capovolta. Si   dato a questo fenomeno il nome di *sospensione*, per distinguerlo dal miraggio. Monsieur Monge l'attribuisce ancora alla riflessione del cielo; ma egli non ha detto il perch , in questo caso, non si osserva la seconda immagine, ed io so che nessuno ha dato la spiegazione di questo fenomeno. Il fatto   che la seconda immagine esiste anche in questo caso, ma essa   estremamente appiattita e ridotta ad una dimensione infinitamente piccola, ci  che impedisce di osservarla.   ci  che provo con la teoria e con l'esperienza nel corso di questa memoria, mostrando con il calcolo e con l'osservazione diretta, come si fa il passaggio dal miraggio alla sospensione.

Si trova su questi fenomeni una memoria interessante di Monsieur Woltman negli *Annali di Gilbert*. Egli acclude un grande numero di osservazioni che l'autore ha fatto a Cuxhaven. L'oggetto osservato era una casa situata a una grande distanza. Il raggio visivo radente la superficie del fiume Elba in tutta l'estensione del suo corso. Sfortunatamente Monsieur Woltmann non aveva a sua disposizione strumenti, ed egli vi ha supplito con un apparecchio piú appropriato a indicare le variazioni della rifrazione che a darne la misura ben precisa. Ma ci  che rende questo lavoro prezioso,   che l'autore avendo seguito questi fenomeni per la durata di piú di un anno, ne ha ben constatato i risultati generali, ed anche piú particolarit  interessanti. **Cos , egli ha costantemente osservato che allorquando aveva due immagini distinte o anche semplice sospensione, la temperatura dell'acqua era almeno due gradi Fahrenheit (1.1 gradi Celsius) piú alta di quella dell'aria; e che al contrario egli non aveva n  sospensione n  doppia immagine allorquando la temperatura dell'acqua era al di sotto di quella dell'aria solamente di due gradi Fahrenheit.** Quando la differenza delle temperature era minore di questo limite, il fenomeno non era costante. Qualche volta esso aveva luogo, altre volte non si produceva; e questo si spiega molto bene, poich  una cos  debole differenza pu  non essere tassativa, e che la piú piccola causa accidentale, il minimo movimento dell'aria o dell'acqua pu  distruggerla e farla passare in senso contrario. Mon-

sieur Woltmann ha così osservato la sospensione ed il miraggio sulla neve, ed anche sul ghiaccio, allorquando la temperatura di questi corpi si é trovata piú alta di quella dell'aria, ciò che accade spesso in inverno; ne segue che non bisogna cercare altre cause di questi fenomeni se non la diseuguaglianza delle temperature.

Monsieur de Humboldt, il quale non evitava alcun genere di ricerche utili alle scienze, ha fatto così delle osservazioni di sospensione e del miraggio durante il suo viaggio ai tropici; ma abituato a conoscere la gioia dei risultati esatti, non si é accontentato di una semplice descrizione. Egli ha misurato le depressioni degli oggetti e quelle dell'orizzonte del mare con un quarto di cerchio di Bird ben rettificato. Egli ha notato la temperatura e tutte le circostanze meteorologiche; infine, ciò che é il talento di un buon osservatore, benché egli non conoscesse la teoria matematica di questi fatti, non ha ommesso niente che potesse servire allo stabilire o a verificare. Così le sue osservazioni che egli ha ben voluto comunicarmi mi sono state molto utili.

Si deve ancora annoverare nella stessa classe di fenomeni gli aspetti molto singolari che Le Gentil ha osservato all'istante del levar del sole durante il suo soggiorno in India, e che egli ha rivisto in seguito al tramonto di questo astro sulle coste della Normandia. Egli le ha consegnate con molto dettaglio nelle memorie dell'Accademia delle Scienze negli anni 1774 e 1789. Questi fenomeni che non sono stati ancora spiegati, si deducono molto semplicemente dalla teoria; e paragonando le particolarità che la teoria indica con quelle che Le Gentil ha osservato, si troverá accordo in tutti i punti. Questi sono i soli dati che io ho potuto trarre dalle ricerche dei fisici. Si trova ancora negli Annali di Chimica e in quelli di Gilbert, qualche altra osservazione degli stessi fenomeni; ma siccome esse sono fatte senza strumenti, o con delle procedure molto inesatte, o infine senza alcuna misura precisa, essi non possono servire che a constatare il fatto stesso, senza offrire i mezzi del calcolo.

Del resto, dopo la prima lettura della mia memoria io fui assai felice per fare io stesso su questo soggetto, tutte le osservazioni che io ho potuto desiderare. L'occasione si é presentata durante il soggiorno che io ho fatto a Dunkerque nell'inverno del 1808, con Monsieur Mathieu, per la verifica della latitudine all'estremitá boreale del meridiano. Noi abbiamo intrapreso, Monsieur Mathieu ed io, approfittando della vicinanza del mare, la frequente osservazione, con un cerchio ripetitore, della depressione dell'orizzonte, ponendoci successivamente a diverse altezze conosciute, ciò che ci deve determinare la forma della traiettoria descritta dai raggi luminosi, seguendo le diverse modifiche di temperatura che l'aria ed il mare sperimentano. Nel corso di queste esperienze, che noi riportiamo in seguito su questa memoria, e che contribuiranno forse a gettare qualche luce sulle varietà e le bizzarrie delle rifrazioni terrestri, scoprimmo sul terreno lasciato scoperto dal mare durante la bassa marea, un luogo dove la sospensione ed il miraggio erano sensibili tutti i giorni. Il raggio visivo, radente a questa superficie sabbiosa e prolungata ci faceva vedere un affollamento di oggetti, quali campanili, case, colline, alberi, ecc. che sembrano sospesi in aria e senza base, presentando al di sotto di essi le loro immagini capovolte. Queste immagini situate così in aria e al di sopra dell'orizzonte apparente, rassomigliano perfettamente alle immagini riflesse dall'acqua; e l'illusione era così forte che noi stessi non riuscivamo a crederci poiché il bordo di questa acqua apparente non era qualche volta a 200 metri da noi. Noi abbiamo spesso avuto piacere ad inviarvi degli uomini muniti di aste

che ci inviavano dei segnali. Man mano che essi si allontanavano da noi, si vedevano addegntrare successivamente in questo mare apparente, e infine immergersi interamente, cosí la loro immagine riflessa. Niente eguaglia, in apparenza, le varietá e le bizzarrie di questi fenomeni. Essi cambiano secondo l'altezza degli oggetti, secondo la loro distanza, secondo la natura del suolo che vi separa, soprattutto secondo la loro forma e secondo l'altezza dell'osservatore; di sorta che non potete fare il minimo movimento senza modificare tutte le apparizioni che vi osservate. In piú la minima variazione di temperatura li altera, ed é sufficiente un semplice raggio di sole per fare nascere e sparire il prestigio.

Ma tutte queste bizzarrie non sono state per noi che una spinta in piú. Noi le abbiamo seguite con piú accuratezza, caparbietá e costanza. Guidati dalla teoria, noi marciamo sempre con certezza; e ciascuna apparizione nuova ha per noi un nuovo interesse. Per approfittare completamente di una occasione cosí favorevole, abbiamo avuto l'accuratezza di prendere delle misure esatte di tutti i fenomeni con il cerchio ripetitore. Abbiamo annotato accuratamente le temperature a diverse altezze al di sopra del suolo, le depressioni dell'orizzonte apparente e quelle degli oggetti, la loro distanza, la loro configurazione e i rapporti della loro forma reale con quella delle immagini riflesse. Abbiamo determinato la forma delle traiettorie e quella delle caustiche che le limitano, per mezzo delle esperienze dirette, e per cosí dire, con delle sonde fatte nel mare apparente, prodotte dalla riflessione del cielo. Infine noi abbiamo studiato con dei livellamenti esatti, la forma del terreno rasato dal raggio visibile, forma che é qui di un'estrema importanza, poiché essa determina la direzione degli strati di eguali densitá. Ci é stato facile vedere che la frequenza e l'intensitá del fenomeno nel luogo dove l'abbiamo osservato, era dovuta ad una configurazione particolare della superficie sabbiosa, risultato che la teoria ci ha fatto prevedere dopo le sole apparizioni osservate prima di aver effettuato i livellamenti; di sorta che riunendo tutte le occasioni che noi abbiamo avuto allora di esaminare in dettaglio le varietá di questi fenomeni, tali che noi li riportiamo in queste memorie, crediamo che essi non si siano osservate cosí completamente, anche in Egitto.

Io faró menzione qui di un altro fenomeno che abbiamo osservato, Arago ed io, in Spagna, e che, al primo colpo d'occhio, sembrava potesse essere ben lontano dai precedenti, cosa che si spiega facilmente dalla stessa teoria. Non si tratta solamente qui di due immagini, come nel miraggio, o di tre, come nel fenomeno osservato da Monsieur Vince, ma di una moltitudine di immagini che appaiono le une al di sopra delle altre in numero indefinito. Quando osservavamo questo curioso fenomeno, eravamo fermi sulla montagna del Desierto de las Palmas, elevato di 727 metri sul bordo del mare, nel reame di Valencia. Osservammo di notte, al cerchio ripetitore, i riverberi accesi nell'isola di Ibiza, sulla montagna di Campvey, elevata di 420 metri e distante 161008 metri (41 e 1/3 leghe). Era uno dei lati del nostro grande triangolo. Noi abbiamo visto all'inizio la luce di Campvey semplice, che somiglierebbe a una stella molto piccola, come essa appariva ordinariamente, e noi finimmo cosí tre coppie d'osservazioni. Ma alla quarta coppia, cominciammo a vedere a Campvey due luci esattamente nella stessa verticale, e distanti di una quantitá che, sul filo, noi stimiamo a meno di tre minuti (d'arco). La vera luce, almeno quella che noi giudicavamo tale, era al suo posto ordinario. L'altra, che noi credevamo essere la luce fittizia, era piú elevata nel cielo in realtá; ciò che la mette piú bassa nei nostri occhiali che si capovolgono. Ella era cosí piú grande degli altri piú dilatata e un pó iridata. Noi l'abbiamo

presa inizialmente per una stella, ben meravigliati di incontrarne una precisamente nella verticale dei riverberi di Campvey. Ma infine questa pretesa stella non cambiava di posto, bisognava bene riconoscere un'immagine straordinaria. Piuttosto noi non abbiamo visto solamente due luci, ma tre, quattro o più. Esse si formano e spariscono in seguito senza che il numero di quelle che appaiono insieme hanno niente di determinato. Tuttavia si notava che le più basse, le più vicine di quelle che noi credevamo essere l'immagine ordinaria, sembravano piuttosto le altre e più facilmente; ma noi rimarchiamo che le più alte in realtà, sembravano sempre le più larghe e le più brillanti. Questa formazione successiva era molto analoga ad un altro fenomeno che noi abbiamo osservato più volte nelle altre stazioni. Si vede il punto luminoso allungarsi come una piccola colonna di fuoco sotto il filo verticale della lente, e si estendere così fino a una certa lunghezza, dopo che la colonna si rompe tutta di un colpo e formò due immagini di cui la più bassa era sensibilmente rossa e il superiore sensibilmente verde; o bene essa si concentrava di nuovo su se stessa; e ritornava un punto luminoso unico, di dimensione insensibile, come prima. L'allungamento della luce equivale a un moltitudine infinita di immagini contigue, come l'osservatore nel Deserto, la luce di Campvey aveva tutte le immagini separate e distinte.

All'indomani di questa osservazione, al sorgere del giorno, il mare sembrava in lontananza coperto di masse di nebbia, nere, arrotondate ondulate e agglomerate, in maniera da rappresentare montagne. Dirigendo il binocolo su Ibiza, non si vede né questa isola né le sue montagne, ma solamente delle masse di foschia che ne imitano la forma, e che avrebbero potuto farci sbagliare se noi fossimo stati meno abituati a riconoscere Yviza e soprattutto Campvey. Queste foschie non esistevano sulla superficie del mare al tramonto, esse vi si erano precipitate durante la notte. Noi abbiamo poi costantemente osservato questa circostanza ogni volta che noi abbiamo visto dei fenomeni di rifrazione straordinaria. Queste masse di foschia erano per noi l'indice più certo d'un tempo perfettamente calmo. Nel Deserto di Las Palmas noi li abbiamo riviste così durante i quindici giorni consecutivi, coprente la superficie del mare al nascere del giorno, si elevano e essi dissipano per effetto del calore del sole, poi ricadendo di nuovo durante la notte. Questo gioco alternativo continua fino a che un vento del nord vince e le scaccia. Io non credo che questo fenomeno contribuisce a produrre le rifrazioni straordinarie; ma come esso indica la calma perfetta dell'atmosfera, esso deve accompagnarsi frequentemente all'apparizione. Si è comparato il fenomeno delle doppie immagini a quello della riflessione interna di un vetro. Il fenomeno delle immagini moltiplicate in numero infinito, può compararsi a quello delle riflessioni interne che si fanno successivamente sulle due facce opposte d'une lastra, allorquando si guarda un punto luminoso attraverso di esse; ma questo modo di spiegare il fenomeno, non deve essere considerato che come approssimato. La riflessione delle traiettorie non possono farsi nell'aria atmosferica, come nei mezzi di densità uniforme, dove le traiettorie non hanno che una porzione curvilinea infinitamente piccola, vicino alla superficie di questi mezzi; e cosa che può dare un'idea di qualche fenomeno del miraggio, riportandole a questo limite, è vero di dire così che un gran numero, e soprattutto quelli che presentano delle immagini multiple, non possono per nulla rappresentarsi così, perché essi dipendono della molteplicità dei rami della caustica sulla quale si fa la riflessione, caustica che nel caso dei mezzi di densità costante, non ha che un solo ramo concavo verso la loro superficie e infinitamente appiattita.

Per avere la vera teoria di questi fenomeni, bisogna considerare il movimento della luce, di cui il potere rifrangente é variabile secondo i differenti strati. Ciò che io penso di fare; e come il problema preso in tutte le sue generalità é insolubile nello stato attuale dell'analisi, io ho cercato di distinguere, fin quanto mi é stato possibile, i risultati generali che convengono a tutte le leggi di rifrazione di quelli che dipendono necessariamente della legge particolare secondo la quale si fa variare i poteri rifrangenti; e i risultati che sono nell'ultimo caso essendo moltiplicati, io ho scelto per esempio qualcuna delle leggi di rifrazione delle piú semplici, i piú vicini della natura, ed io ho sviluppato le conseguenze; ciò che si apprende a discutere le equazioni di tutte le curve, ne discutano qualcuna, cosa che le loro proprietá particolari siano variate all'infinito.

### 3.23 - Il miraggio - Gaspard Monge<sup>1)</sup>

**Gaspard Monge** ha per primo visto il miraggio durante la campagna napoleonica in Egitto. Egli ha perfino proposto una teoria del miraggio.

#### EXTRAIT

*Du mémoire lu á la séance de l'Institut du Caire, du 11 fructidor, an 6;*

Par le cit. Monge

Sur le phénomène optique, nommé MIRAGE par les marins

”In mare, accade spesso che una nave in lontananza sembra addirittura essere delineata nel cielo invece che nell'acqua. Un analogo effetto ha colpito tutti i francesi durante la marcia dell'armata attraverso il deserto. I villaggi visti in lontananza sembravano giacere su un'isola in mezzo ad un lago. Man mano che ci si avvicina, la superficie apparente d'acqua si restringe: quando si era ad una piccola distanza, essa spariva e l'illusione ricominciava per il villaggio che seguiva quello che era scomparso. Il cittadino Monge attribuisce questo effetto alla diminuzione della densità dello strato inferiore dell'atmosfera. Questa diminuzione nel deserto é prodotta dall'aumento della temperatura che é il risultato del calore comunicato dal sole alle sabbie con le quali questo strato é in contatto immediato. Nel mare esso ha luogo allorquando, per delle circostanze particolari, quale l'azione dei venti, lo strato inferiore dell'atmosfera tiene in dissoluzione una piú grande quantità d'acqua rispetto agli altri strati. In questo stato di cose, i raggi di luce che provengono dagli strati bassi del cielo, essendo arrivati alla superficie che separa lo strato meno denso di quelli che sono di sotto, non penetrando in questo strato, essi sono riflessi e consegnano nell'occhio dell'osservatore l'immagine del cielo. Egli crede allora di vedere un parte del cielo al di sotto dell'orizzonte. É questa parte che egli prende per acqua allorquando il fenomeno accade a terra. Se si é in mare si crede di vedere nel cielo tutti gli oggetti che fluttuano sulla parte della superficie occupata dall'immagine del cielo.”

---

<sup>1)</sup> G. Monge - Annals de chimie ou recueil des memoires concernant la chimie et les arts qui en dependant (7), vol.29, p 207 - 1798/1799.



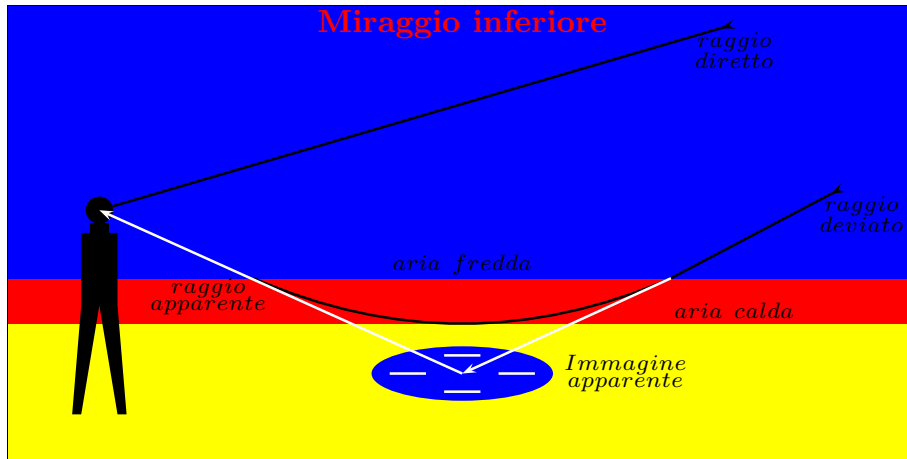


fig.3.23-1

### 3.24 - Trattamento teorico del miraggio<sup>1)</sup>

I gradienti di temperatura possono causare fenomeni di **miraggi** cioè di effetti che sono simili alla rifrazione ionosferica. **In una giornata calda, il suolo é molto piú caldo dell'aria e, quindi, l'indice di rifrazione dell'aria é piú basso al suolo rispetto ad un'altezza non molto elevata da esso.** In condizioni normali, invece, la pressione dell'aria determina un indice di rifrazione che é molto piú alto al suolo e diminuisce con l'altezza. Quindi un raggio emesso da un oggetto prossimo al suolo in una direzione anche leggermente diversa dall'orizzontale verso il basso viene ancor piú rifratto come in figura 3.24-1 dove abbiamo supposto, per semplicitá l'atmosfera suddivisa in strati omogenei.

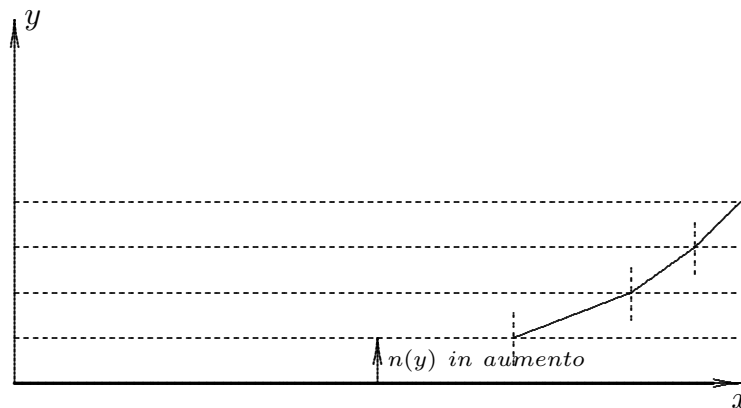


fig.3.24-1

Come semplice modello integrabile, possiamo assumere che l'indice di rifrazione  $n(y)$  aumenti linearmente con l'altezza  $y$ , cioè:

$$n(y) = n_0 + \kappa y \tag{3.24.1}$$

---

<sup>1)</sup> E.Fabri, G.Florio, F.Lazzeri and P.Violino: Mirage in the laboratory - Am. J. Phys. 50, 1982

essendo  $\kappa$  il tasso di crescita per metro dell'indice di rifrazione con l'altezza. Per altezze vicine al suolo risulta ( $y \simeq 0$ ), che implica

$$n^2(y) \simeq n_0^2 + 2n_0\kappa y \tag{3.24.2}$$

Consideriamo una regione di spazio dove la temperatura é costante su piani paralleli, e quindi il gradiente termico é dovunque nella stessa direzione. Con riferimento alla figura 3.24-2, sia  $y$  l'asse del gradiente (il verso positivo é quello dell'aumento di  $n$ ). Un raggio di luce formante un angolo  $\theta$  con l'asse  $y$  é sottoposto ad una serie di rifrazioni infinitesime;  $n \sin \theta$  **essendo sempre costante**.

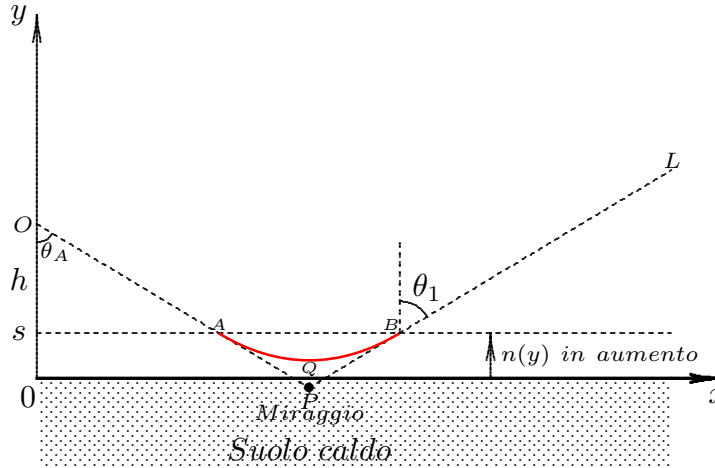


fig.3.24-2

Quindi (usando il sottoscritto  $A$  per tutte le quantità riferite al punto  $A$ ) lungo tutto il raggio é  $n \sin \theta = n_A \sin \theta_A$ . Ossia, quando  $n = n_A \sin \theta_A$ , segue che  $\sin \theta = 1$  ( $\theta = 90^\circ$ ) ed il raggio non può penetrare in strati a più bassi valori di  $n$ ; esso é una curva concava, puntando su entrambi gli estremi verso il verso positivo dell'asse  $y$ .

Consideriamo una regione, con un gradiente termico, limitata fra due valori di  $y$ ,  $y_1 = s$  e  $y_2 = 0$ , dove i valori di  $n$  siano, rispettivamente,  $n_1$  e  $n_2$  con  $n_1 > n_2$ . Vogliamo studiare sotto quale condizione un raggio entrante in questa regione da  $y > s$  con un angolo di incidenza  $\theta_1$  (vedi figura 3.24-2) venga deviato e formi miraggio, ossia deve esistere un valore della coordinata  $y$ , diciamo  $y^*$ ,  $0 < y^* < s$ , per cui si verifichi:

$$n_1 \sin \theta_1 = n(y^*) \tag{3.24.3}$$

Ricordando che  $n_1$ ,  $\theta_1$  e  $n_2$  sono dati del problema, risulta che, se:

$$n_1 \sin \theta_1 < n_2 \tag{3.24.4}$$

**non si può avere miraggio.** Infatti la condizione (3.24.3) non é mai soddisfatta per qualunque valore di  $0 < y < s$ , risultando sempre,  $n(y^*) > n_2$ . Quindi, in questo caso, il raggio attraversa la regione e raggiunge il piano  $y = 0$ .

Viceversa se

$$n_1 \sin \theta_1 > n_2 \tag{3.24.5}$$

il raggio, man mano che penetra nello strato, ossia all'aumentare di  $\theta$ , e senza necessariamente raggiungere il piano  $y = 0$ , soddisfa la condizione per cui  $\sin \theta = 1$ , e sale di nuovo. Se, cioè:

$$\boxed{\sin \theta_1 > \frac{n_2}{n_1} \quad (n_2 < n_1)} \quad (3.24.6)$$

**si ha miraggio, ossia un osservatore vede il raggio emergente come se fosse stato riflesso.** Come esempio consideriamo che per  $y = y_2$  la temperatura sia  $T_2 = 330 K$  e che per  $y = y_1$  essa sia  $T_1 = 300 K$ . I due indici di rifrazione corrispondenti si calcolano dalla formula (3.10.3), ossia:

$$(n - 1) \cdot 10^6 = A \frac{P}{T} \quad (3.24.7)$$

essendo  $A = 77.5$ .

In aria a pressione standard  $P = 1013 mb$ , sia:

$$(n_2 - 1) \cdot 10^6 = 77.5 \frac{1013}{330} \quad (3.24.8)$$

$$(n_1 - 1) \cdot 10^6 = 77.5 \frac{1013}{300} \quad (3.24.9)$$

ossia:

$$n_2 = 1.0002379 \quad n_1 = 1.00026169 \quad (3.24.10)$$

Si ha:

$$\theta_1 = \arcsin(n_2/n_1) = \arcsin(0.9999762) = 89^{\circ}36' \quad (3.24.11)$$

Quindi, se  $T_1 = 300K$  e  $T_2 = 330K$ , in aria a pressione standard, il valore limite di  $\theta_1$  é  $89^{\circ}36'$ . Questo significa che un osservatore, ad un'altezza di  $1.6 m$ , vede in queste condizioni il pavimento (possibilmente deformato) se  $\theta < 89^{\circ}36'$ , mentre egli vede i raggi provenienti da regioni piú alte (cielo, alberi,..) se  $89^{\circ}36' < \theta < 90^{\circ}$  (cioé in osservazioni radenti come abbiamo visto nella rassegna iniziale), cioè ad una apparente distanza  $> 230 m$  (ossia  $d > 1.6 \cdot \tan(89^{\circ}.6)$ ).

Questo modello é molto semplice e ha il vantaggio di utilizzare solo i valori della temperatura sul contorno, e non all'interno della regione che stiamo considerando. Tuttavia noi non possiamo descrivere la forma del raggio, non possiamo ricostruire l'immagine di una sorgente; é quindi utile considerare qualche modello piú dettagliato.

### 3.25 - Modello specifico

I valori della temperatura vicino alla superficie sono grandemente affetti dalle condizioni al contorno, per esempio, dalla larghezza della superficie e dalle caratteristiche delle superfici confinanti. Il problema non ha quindi una soluzione generale. In modo da discutere alcune caratteristiche del miraggio, useremo un semplice modello, che é abbastanza accettabile nel centro della regione con un gradiente termico, ossia, l'area che principalmente influenza il fenomeno.

Consideriamo uno strato di aria di spessore  $s$ , fra  $y = s$  ed il piano di ground  $y = 0$ ; la temperatura all'interno di questo strato sia una funzione lineare di  $y$ , mentre essa é costante per  $y > s$ . Abbiamo allora che, per  $0 < y < s$ ,  $n^2 - 1$  é una funzione lineare di  $y$ ; quindi,

$$dn^2(y)/dy = k, \quad (3.25.1)$$

con  $k$  costante. Se  $x$  e  $y$  sono le coordinate di ciascun punto lungo il raggio, abbiamo:

$$dy/dx = \mp \cot \theta \quad (3.25.2)$$

(il segno - si riferisce alla parte del raggio in cui  $y$  diminuisce al crescere di  $x$ , e il segno + all'altro ramo; questo non ha rilevanza in quello che segue). Allora:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}} = \left[1 + (dy/dx)^2\right]^{-1/2}. \quad (3.25.3)$$

Quindi il valore costante di  $n \sin \theta$  é:

$$n(y) \left[1 + (dy/dx)^2\right]^{-1/2} = n_m; \quad (3.25.4)$$

$n_m$  essendo il valore dell'indice di rifrazione nel punto di ritorno dove  $dy/dx = 0$  (sia  $y = y_m$  la coordinata corrispondente).

Dalla (3.25.4) segue:

$$n^2(y) = n_m^2 \left[1 + (dy/dx)^2\right] \quad (3.25.5)$$

ossia:

$$n^2(y) = n_m^2 + n_m^2 (dy/dx)^2 \quad (3.25.6)$$

da cui:

$$dy/dx = \mp (n^2 - n_m^2)^{1/2} / n_m \quad (3.25.7)$$

Poiché  $n$  é costante su  $s$ , sia  $n_o$  il suo valore su  $s$ , ossia:

$$n = n_o \quad \text{per } y = s. \quad (3.25.8)$$

Integrando la (3.25.1) nell'intervallo  $0 < y < s$  si ottiene:

$$n^2(y) = ky + C \quad (3.25.9)$$

Imponendo che per  $y = s$  deve essere  $n = n_o$ , si ha:

$$n_o^2 = ks + C \quad (3.25.10)$$

Ricavando la costante  $C$  dalla (3.25.10) e sostituendola nella (3.25.9), si ha infine:

$$n^2(y) = n_o^2 + k(y - s) \quad \text{per } 0 < y \leq s \quad (3.25.11)$$

Dalla (3.25.11) si ha anche:

$$n_m^2 = n_0^2 + k(y_m - s) \quad (3.25.12)$$

ossia:

$$n^2(y) - n_m^2 = k(y - y_m) \quad (3.25.13)$$

Sostituendo questa ultima espressione nella (3.25.7), si ottiene:

$$dy/dx = \mp [k(y - y_m)]^{1/2} / n_m. \quad (3.25.14)$$

L'equazione (3.25.14) si può scrivere:

$$\frac{dy}{[k(y - y_m)]^{1/2}} = \mp \frac{dx}{n_m} \quad (3.25.15)$$

Integrando l'equazione (3.25.15) si ha:

$$\frac{2}{k} [k(y - y_m)]^{1/2} = \mp \frac{x}{n_m} + C \quad (3.25.16)$$

Troviamo la costante  $C$  imponendo che ad  $y = y_m$  corrisponda  $x = x_m$ , ossia:

$$0 = \mp \frac{x_m}{n_m} + C \quad (3.25.17)$$

e, ancora:

$$C = \pm \frac{x_m}{n_m} \quad (3.25.18)$$

Quindi:

$$\frac{2}{k} [k(y - y_m)]^{1/2} = \mp \frac{x}{n_m} \pm \frac{x_m}{n_m} \quad (3.25.19)$$

Elevando al quadrato:

$$\frac{4}{k}y - \frac{4}{k}y_m = \frac{x^2}{n_m^2} + \frac{x_m^2}{n_m^2} - 2\frac{x}{n_m} \frac{x_m}{n_m} \quad (3.25.20)$$

che si può scrivere:

$$y = y_m + \frac{kx_m^2}{4n_m^2} - \frac{k}{2} \frac{x}{n_m} \frac{x_m}{n_m} + \frac{kx^2}{4n_m^2} \quad (3.25.21)$$

che si può scrivere:

$$\boxed{y = y_m + \frac{k}{4n_m^2} (x_m - x)^2} \quad (3.25.22)$$

**Ne segue che l'equazione della traiettoria é una parabola.**

Il raggio é così una parabola. Questo é vero, naturalmente, solo dentro la regione con un gradiente termico; **fuori di esso, cioè, per  $y > s$ , i raggi sono linee rette.**

### 3.26 - Modello piú dettagliato

É utile scrivere l'espressione della parabola in termini di parametri misurabili, almeno in linea di principio. Per fare questo, assumiamo che un osservatore  $O$  si trovi lungo l'asse  $y$ , fuori dallo strato con il gradiente termico, cioè in un punto sull'asse di coordinata  $y_0 > s$ ; sia  $h$  la sua distanza dal piano  $y = s$  (in altre parole,  $y_0 = s + h$ ). Sia  $\gamma$  la pendenza di un raggio raggiungente  $O$  dopo essere stato deviato nello strato con gradiente termico. Ossia:

$$\gamma = |dy/dx| \quad (3.26.1)$$

Consideriamo l'eguaglianza  $n \sin \theta = costante$  fra un generico livello  $y$  ed un livello coincidente con il livello  $y = s$ , ossia (3.25.4):

$$n(y) \left[ 1 + (dy/dx)^2 \right]^{-1/2} = n_0 \sin \theta_A \quad (3.26.2)$$

$n_0$  essendo il valore dell'indice di rifrazione nello strato  $y = s$ .

Dalla (3.26.2) segue:

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = n_0 \sin \theta_A \quad (3.26.3)$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{n(y)}{n_0 \sin \theta_A} \quad (3.26.4)$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(y)}{n_0^2 \sin^2 \theta_A} \quad (3.26.5)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(y) - n_0^2 \sin^2 \theta_A}{n_0^2 \sin^2 \theta_A} \quad (3.26.6)$$

Sostituendo a  $n^2(y)$  la sua espressione data dalla (3.25.11), si ha:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n_0^2 + k(y-s) - n_0^2 \sin^2 \theta_A}{n_0^2 \sin^2 \theta_A} = \frac{n_0^2 \cos^2 \theta_A + k(y-s)}{n_0^2 \sin^2 \theta_A} \quad (3.26.7)$$

Posto  $\gamma = \cot \theta_A$ , si ha:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \gamma^2 + \frac{k(y-s)}{n_0^2 \sin^2 \theta_A} \quad (3.26.8)$$

Ma, essendo  $n_0^2 \sin^2 \theta_A = n_m^2$ , l'eq. (3.26.8) diventa:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\gamma^2 n_m^2 + k(y-s)}{n_m^2} \quad (3.26.9)$$

Da cui:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 n_m^2 + k(y-s)}}{n_m} \quad (3.26.10)$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\gamma^2 n_m^2 + k(y-s)}} = \pm \int \frac{dx}{n_m} \quad (3.26.11)$$

ossia:

$$\frac{2}{k} \sqrt{\gamma^2 n_m^2 + k(y-s)} = \pm \frac{x}{n_m} + C \quad (3.26.12)$$

Imponendo che per  $x = x_A$ ,  $y = s$ , si ha:

$$\frac{2}{k} \sqrt{\gamma^2 n_m^2} = \pm \frac{x_A}{n_m} + C \quad (3.26.13)$$

da cui:

$$C = \frac{2}{k} \gamma n_m \mp \frac{x_A}{n_m} \quad (3.26.14)$$

Sostituendo l'espressione di  $C$  nella equazione (3.26.12), dopo aver considerato la soluzione con il segno meno, si ha:

$$\sqrt{\gamma^2 n_m^2 + k(y-s)} = \frac{k}{2n_m} (x_A - x) + \gamma n_m \quad (3.26.15)$$

Elevando al quadrato:

$$(y-s) = \frac{k}{4n_m^2} (x_A - x)^2 + \gamma(x_A - x) \quad (3.26.16)$$

Dalla figura si ha:

$$h = x_A \cot \theta_A = \gamma x_A \quad \text{da cui} \quad x_A = \frac{h}{\gamma} \quad (3.26.17)$$

Quindi:

$$\boxed{y = s + h - \gamma x + \frac{k}{4n_m^2} \left(\frac{h}{\gamma} - x\right)^2} \quad (3.26.18)$$

### 3.27 - Dettagli piú importanti

Nell'equazione (3.26.18)  $n_m$  é molto vicino all'unitá, e quindi, con un errore trascurabile, si puó scrivere:

$$y = s + h - \gamma x + k(h/\gamma - x)^2/4 \quad (3.27.1)$$

Vogliamo trovare le coordinate dei punti  $B$  e  $Q$ .

La coordinata del punto  $Q$  si trova imponendo che per  $x = x_Q$   $dy/dx = 0$ . Ossia:

$$\frac{dy}{dx} = -\gamma - \frac{k}{2} \left( \frac{h}{\gamma} - x_Q \right) = 0 \quad (3.27.2)$$

ossia:

$$x_Q = \frac{h}{\gamma} + \frac{2\gamma}{k} \quad (3.27.3)$$

da cui:

$$y_Q = s + h - \gamma \left( \frac{h}{\gamma} + \frac{2\gamma}{k} \right) + \frac{\gamma^2}{k} = s - \frac{\gamma^2}{k} \quad (3.27.4)$$

Allora le coordinate dei punti  $A$ ,  $B$ , e  $Q$  sono:

$$A \equiv (h/\gamma, s) \quad (3.27.5)$$

$$B \equiv (h/\gamma + 4\gamma/k, s) \quad (3.27.6)$$

$$Q \equiv (h/\gamma + 2\gamma/k, s - \gamma^2/k) \quad (3.27.7)$$

Una sorgente posta in un punto generico  $S$  emette raggi in tutte le direzioni. Fissiamone uno che passa per il punto  $B$  al confine dello strato non omogeneo.

Ora, solo i raggi provenienti dal punto  $B$  per cui  $y_Q \geq 0$  raggiungono l'osservatore. Dalla equazione (3.27.7) segue che solo i raggi con  $s - \gamma^2/k \geq 0$  ossia con  $\gamma \leq \sqrt{ks}$  possono raggiungere l'osservatore provenendo da  $B$  ( $\cot^{-1}(\sqrt{ks}) \leq \theta \leq \pi/2$ ). I raggi che raggiungono  $O$  con  $\gamma > \sqrt{ks}$  necessariamente attraversano l'asse  $x$  (cioé esse emergono dal pavimento, e non dall'area  $y > s$ ). Nessun raggio con  $\gamma > \sqrt{ks}$ , provenendo da  $y > s$  puó raggiungere  $O$ . L'equazione del raggio diretto passante per  $B$  e provenendo da  $y > s$  si trova scrivendo l'equazione di una generica retta ed imponendo che essa passi per il punto  $B$  le cui coordinate sono date dall'equazione (3.27.6). Il coefficiente angolare di tale retta é sempre  $m = \gamma$ . Si ha:

$$y = \gamma x + n \quad (3.27.8)$$

Per  $x = x_B = h/\gamma + 4\gamma/k$  deve essere  $y_B = s$ . Ne segue:

$$s = \gamma \left( \frac{h}{\gamma} + \frac{4\gamma}{k} \right) + n \quad (3.27.9)$$

da cui:

$$n = s - h - \frac{4\gamma^2}{k} \quad (3.27.10)$$



Quindi l'equazione della retta é:

$$y = s - h - 4\gamma^2/k + \gamma x \quad (3.27.11)$$

**Abbiamo cosí una famiglia di linee rette al variare di  $\gamma$  fra 0 e  $\sqrt{ks}$ .** É utile considerare il loro involuppo (**caustica**) mostrato in figura 3.27-1 ossia il luogo dei punti in cui tali rette sono tangenti alla caustica. Differenziando l'equazione (3.27.11) rispetto a  $\gamma$ , si trova l'ascissa del punto  $C$  dove ogni linea retta é tangente al loro involuppo; si ha:

$$\frac{dy}{d\gamma} = -\frac{8\gamma}{k} + x_C = 0 \quad (3.27.12)$$

ossia:

$$x_C = 8\gamma/k \quad (3.27.13)$$

Sostituendo nell'equazione (3.27.11), si ha:

$$y_c = s - h + 4\gamma^2/k \quad (3.27.14)$$

Il luogo dei punti di coordinate  $x_c$  e  $y_c$  rappresenta la **caustica**.

Dalla (3.27.13) si ha:

$$\gamma = \frac{k}{8}x_c \quad (3.27.15)$$

che sostituita nella (3.27.14) fornisce l'equazione della caustica in coordinate cartesiane, ossia:

$$y_c = s - h + \frac{k}{16}x_c^2 \quad (3.27.16)$$

cioé, ancora, una parabola. La caustica, poiché é legata a valori  $0 < \gamma < \sqrt{ks}$ , é una curva limitata; essa giace fra l'asse  $y$  ed il punto  $D$  le cui coordinate sono:

$$D \equiv \left( 8\sqrt{s/k}, 5s - h \right) \quad (3.27.17)$$

Infatti, dalle equazioni (3.27.13) e (3.27.14), per  $\gamma = 0$  le coordinate della caustica sono:

$$x_{C_{\gamma=0}} = 0, \quad e \quad y_{C_{\gamma=0}} = s - h \quad (3.27.18)$$

e per  $\gamma = \sqrt{ks}$ :

$$x_D = x_{C_{\gamma=\sqrt{ks}}} = 8\sqrt{s/k}, \quad e \quad y_D = y_{C_{\gamma=\sqrt{ks}}} = 5s - h \quad (3.27.19)$$

É importante considerare due casi differenti:  $y_D \geq s$  e  $y_D < s$ . Il primo caso si ha quando  $h \leq 4s$ , il secondo quando  $h > 4s$ .

**Caso A:**  $y_D < s$ ,  $h > 4s$ .

Per studiare il caso graficamente, poniamo i seguenti valori per i parametri:

$$s = 0.5, \quad h = 2.3 \ (> \text{ di } 4s = 4 \cdot 0.5 = 2), \quad k = 1 \quad (3.27.20)$$

Da essi si deduce:

$$\begin{aligned} \gamma &= \cot(\theta_A) = \sqrt{ks} = \sqrt{(0.5)} = 0.707 \implies \theta_A = 40^{\circ}.5, \\ x_D &= 8\sqrt{(s/k)} = 5.6568, \quad y_D = 5s - h = 0.2 \end{aligned}$$

Utilizzando la formula (3.27.1) tracciamo in rosso la parabola corrispondente al massimo valore di  $\gamma$  come in fig. 3.27-1.

Utilizzando l'equazione (3.27.11) tracciamo in rosso la retta che arriva nel punto  $B$ . Il percorso  $OAQBU$  é quello del raggio limite competente a  $\gamma = \sqrt{(ks)}$ ; la linea retta  $BU$  é tangente alla caustica in  $D$  (cioé, fuori del raggio fisico).

**La semiretta  $BU$  divide il semipiano  $y > s$  in due regioni, a sinistra troviamo punti simili a  $S'$  per cui nessuna linea retta tangente alla caustica può passare attraverso esso e  $S'$  può quindi essere visto da  $O$  solo attraverso il raggio diretto  $S'O$ . Non vi sono riflessioni.** Al contrario, attraverso un punto  $S''$  a destra vi é una tangente alla caustica e in addizione al raggio diretto vi é anche un raggio riflesso  $S''B''A''O$ .

$$y_D < s, \quad s = 0.5, \quad h = 2.3 > 4s, \quad k = 1$$

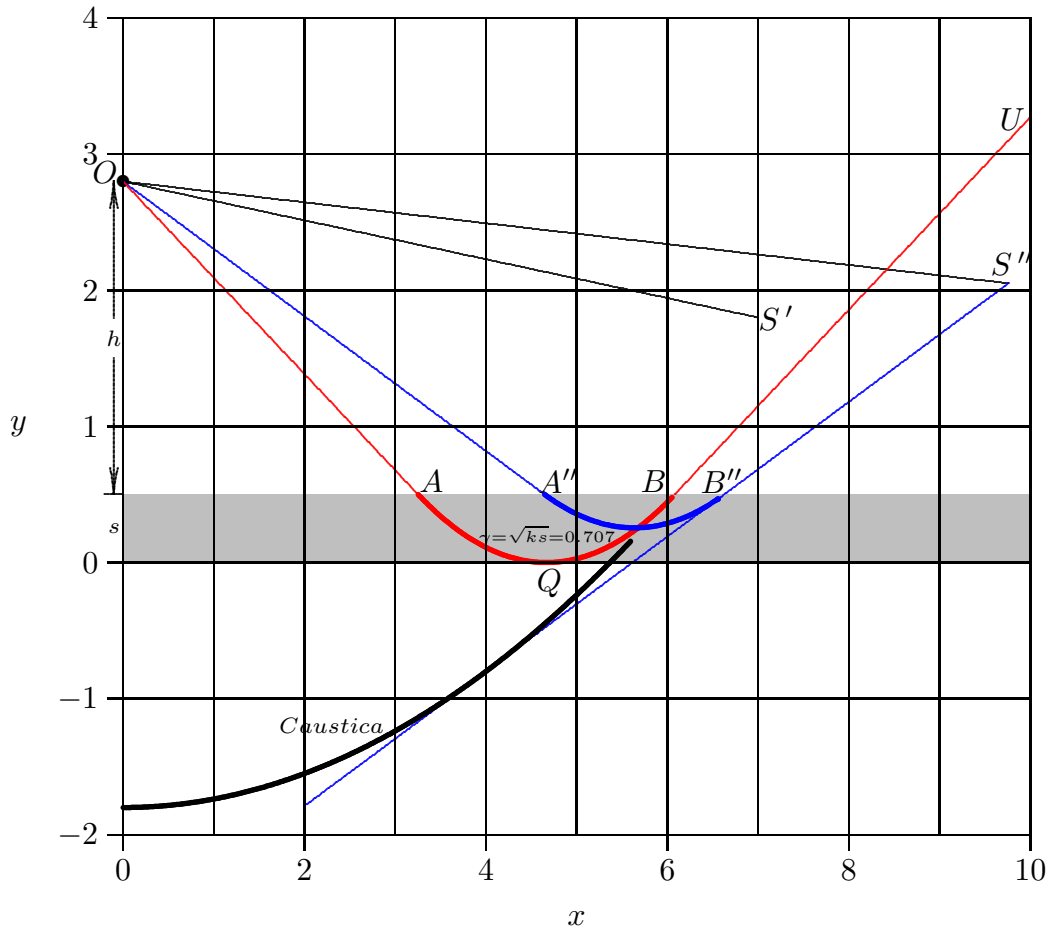


fig.3.27-1

In conclusione, se una sorgente si trova a sinistra del prolungamento della caustica, non si ha raggio riflesso mai. Se si trova a destra del prolungamento della caustica si ha oltre al raggio diretto anche quello riflesso solo se  $\gamma$  é minore o eguale a  $\sqrt{ks}$ .

**Caso B:**  $y_D \geq s$ ,  $h < 4s$ .

Per studiare il caso graficamente, poniamo i seguenti valori per i parametri:

$$s = 0.5, \quad h = 1 \text{ (< di } 4s = 4 \cdot 0.5 = 2), \quad k = 1 \quad (3.27.20)$$

Da essi si deduce:

$$\begin{aligned} \gamma = \cot(\theta_A) = \sqrt{ks} = \sqrt{(0.5)} = 0.707 \implies \theta_A = 40^0.5, \\ x_D = 8\sqrt{(s/k)} = 5.6568, \quad y_D = 5s - 1 = 1.5 \end{aligned}$$

Utilizzando la formula (3.27.1) tracciamo in rosso la parabola corrispondente al massimo valore di  $\gamma$  come in fig. 3.27-2.

Utilizzando l'equazione (3.27.11) tracciamo in rosso la retta che arriva nel punto  $B$ . Il percorso  $OABU$  é quello del raggio limite competente a  $\gamma = \sqrt{(ks)}$ ; la linea retta  $BU$  é tangente alla caustica in  $D$  (cioé, fuori del raggio fisico). La caustica  $KHD$  e la semiretta  $BU$  identificano ora nel semipiano  $y > 0$  tre regioni: una a sinistra di  $HD$ , una fra  $HD$  e  $BU$ , e una a destra di  $BU$ . Quando la sorgente di luce é nella prima regione, come  $S'$ , l'osservatore  $O$  vede nessun miraggio, e quando é nella terza regione, come  $S''$ ,  $O$  osserva un miraggio regolare, esattamente come nel caso  $A$ . Con sorgenti nella seconda regione, si osserva un nuovo fenomeno. Attraverso  $S$  passano due differenti tangenti alla caustica, una toccante essa sotto il pavimento, ed una toccante essa lontano sopra il pavimento, (in figura ne é riportata solo una per curva);  $O$  quindi vede due differenti raggi riflessi (blu e verde in figura 3.27-2 corrispondenti rispettivamente a  $\gamma = 0.9\sqrt{ks}$  (blu) e  $\gamma = 0.578\sqrt{ks}$

(verde)) in additione all'usuale raggio (osservazione diretta).

$$y_D > s, \quad s = 0.5, \quad h = 1 < 4s, \quad k = 1$$

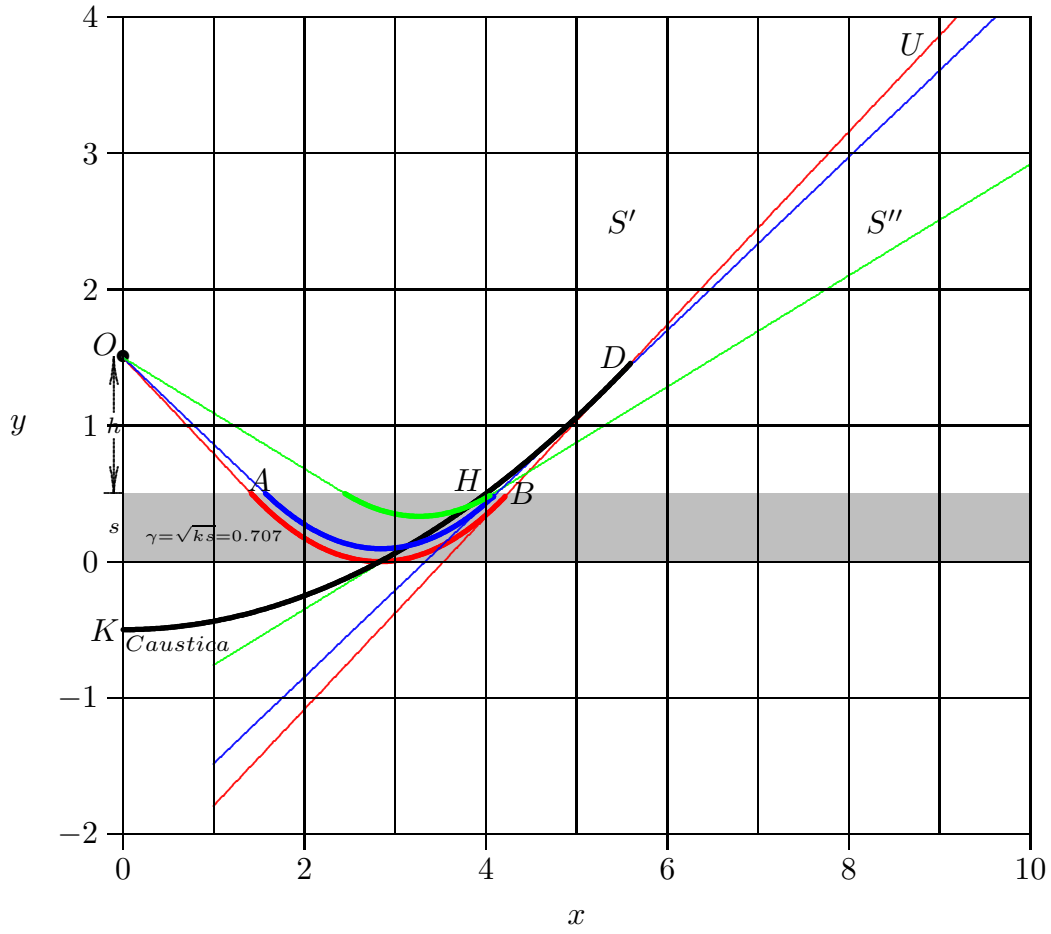


fig.3.27-2

**Programma in ambiente Matlab 'miraggio2.m'**

```
1) delete(get(0,'children'));
2) clf;
3) clear all;
4) s=0.5;
5) h=1;
6) k=1;
7) gamma=0.9.*sqrt(k.*s);
8) x=h./gamma:0.1:h./gamma+4.*gamma./k;
9) y=s+h-gamma.*x+k.*(h./gamma-x).^2./4; % equazione della parabola
10) plot(x,y,'r') % grafico della parabola
11) hold on
12) % x1=h./gamma+4.*gamma./k:0.01:10;
13) x1=1:0.01:10;
14) y1=s-h+gamma.*x1-4.*gamma.^2./k; % retta parabola destra
15) plot(x1,y1)
16) % xlim([0 10])
17) % ylim([0 1])
18) hold on
19) x0=0:0.1:8.*sqrt(s./k);
20) y0=s-h+k.*x0.^2./16; % equazione della caustica
21) plot(x0,y0,'x')
22) zoom
23) B=[x;y];
24) %Istruzioni per inserire i risultati in un file TEX
25) fid=fopen('miraggio2.tex','w');
26) fprintf(fid,'\n');
27) fprintf(fid,'%5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f \n',B);
28) fclose(fid);
```

### 3.28 - Principio di Fermat,<sup>1)</sup> Principio di Huygens<sup>2)</sup> - Leggi della riflessione e della rifrazione della luce

Dopo aver studiato le leggi di Snell con le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo stabilite dalle equazioni di Maxwell, riteniamo molto utile, a chiusura del Capitolo, introdurre i contributi storici dovuti a due grandi scienziati del diciassettesimo secolo che hanno portato, sin da quel tempo, alla conoscenza delle leggi della riflessione e della rifrazione della luce.

**Principio di Fermat:** *La luce viaggia fra due punti lungo un percorso che richiede il minimo tempo rispetto ad altri percorsi vicini.*

Da tale principio possiamo derivare *la legge della riflessione e la legge della rifrazione della luce.*

Questo principio deve il suo nome a **Pierre de Fermat**, che lo ha enunciato nel **1657** ma che non ha sottomesso la sua memoria *Synthèse pour la réfraction* che nel 1662. Mentre René Descartes, nel *La Dioptrique*, spiegava le leggi dell'Ottica facendo *l'analogia fra i raggi luminosi e le traiettorie di una palla inviata da un giocatore di palla a mano*, Fermat si basa su un principio morale: *La natura agisce sempre secondo le vie piú corte e piú semplici.*

Nel 1740, Pierre Louis Moreau de Maupertuis ne completa il concetto creando il principio di Maupertuis che, una volta messo a punto da Joseph Louis Lagrange, divenne il principio di minima azione.

Nel 1924, Louis de Broglie fece una sintesi del principio di Fermat e del principio di minima azione proponendo che ad ogni particella dotata di massa sia associata un'onda: questo ha aperto la via della dualità onda-particella che porta all'equazione di Schrödinger, fondamentale nella meccanica quantistica.

**Principio di Huygens:** *Ogni elemento  $d\Sigma$  di un fronte d'onda  $\Sigma$  si può considerare formalmente come una sorgente secondaria di onde sferiche in fase con la primaria e di ampiezza proporzionale a quella dell'onda primaria e all'area  $d\Sigma$ . La perturbazione prodotta in un punto dello spazio si può sempre ottenere come sovrapposizione di tutte le onde sferiche secondarie che raggiungono quel punto.*

---

<sup>1)</sup> Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne (circa 60 km a nord ovest di Tolosa - Francia), 17 agosto 1601 - Castres (circa 80 km a est di Tolosa - Francia), 12 gennaio 1665) é stato un matematico e magistrato francese.

<sup>2)</sup> Christiaan Huygens (L'Aia, 14 aprile 1629 - L'Aia, 8 luglio 1695) é stato un matematico, astronomo e fisico olandese, fra i protagonisti della rivoluzione scientifica.

### 3.29 - Leggi della riflessione dedotte dal principio di Fermat

#### Riflessione da uno specchio piano (costruzione di Fermat)

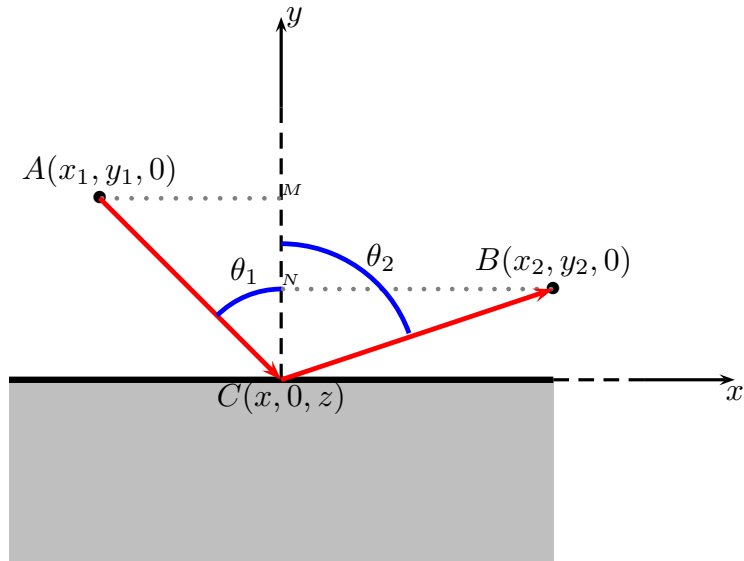


fig.3.29-1

Il tempo  $T_{AB}$  impiegato dalla luce per andare dal punto sorgente  $A$  al punto campo  $B$  con velocità  $v_1$ , dopo essere riflesso nel punto  $C$  dallo specchio, é:

$$T_{AB} = \frac{|AC| + |CB|}{v_1} \quad (3.29.1)$$

$$T_{AB} = \frac{1}{v_1} \left[ \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2 + z^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2 + z^2} \right] \quad (3.29.2)$$

La derivata prima rispetto a  $x$  é:

$$\frac{dT_{AB}}{dx} = \frac{1}{v_1} \left[ \frac{(x - x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2 + z^2}} + \frac{(x - x_2)}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2 + z^2}} \right] \quad (3.29.3)$$

La derivata prima rispetto a  $z$  é:

$$\frac{dT_{AB}}{dz} = \frac{1}{v_1} \left[ \frac{z}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2 + z^2}} \right] \quad (3.29.4)$$

La derivata seconda rispetto a  $x$  é:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_{AB}}{dx^2} &= \frac{1}{v_1} \left[ \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2 + z^2} - \frac{(x-x_1)^2}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2 + z^2}}}{(x-x_1)^2 + y_1^2 + z^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{v_1} \left[ \frac{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2 + z^2} - \frac{(x-x_2)^2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2 + z^2}}}{(x-x_2)^2 + y_2^2 + z^2} \right] = \\ &= \frac{1}{v_1} \left[ \frac{y_1^2 + z^2}{[(x-x_1)^2 + y_1^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{y_2^2 + z^2}{[(x-x_2)^2 + y_2^2 + z^2]^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (3.29.5)$$

Per il principio di Fermat deve essere:

$$\frac{dT_{AB}}{dx} = \frac{dT_{AB}}{dz} = 0 \quad (3.29.6)$$

ossia:

$$\begin{cases} \frac{(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2 + z^2}} + \frac{(x-x_2)}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2 + z^2}} = 0 \\ \frac{z}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2 + z^2}} = 0 \end{cases} \quad (3.29.7)$$

Dalla seconda equazione delle (3.28.7) segue:

$$\boxed{z = 0} \quad (3.29.8)$$

**Ne segue che  $A$ ,  $C$  e  $B$  appartengono allo stesso piano perpendicolare allo specchio che prende il nome di *piano di incidenza*. Si ritrova, quindi, la prima legge della riflessione o prima legge di Snell.**

Dalla prima equazione delle (3.28.7), ponendo  $z = 0$ , segue:

$$\frac{(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} = \frac{(x_2-x)}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}} \quad (3.29.9)$$

L'eguaglianza espressa dalla (3.29.9) é possibile per  $x > x_1$  e  $x < x_2$  ossia per:

$$x_1 < x < x_2 \quad (3.29.10)$$

Dai triangoli  $AMC$  e  $BNX$  si ha rispettivamente:

$$(x-x_1) = \sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} \cdot \sin \theta_1 \quad (3.29.11)$$



$$(x_2 - x) = \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2} \cdot \sin \theta_2 \quad (3.29.12)$$

Ne segue che l'equazione (3.29.9) si può scrivere:

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \quad (3.29.13)$$

ossia:

$\theta_1 = \theta_2$

(3.29.14)

Si é ritrovata, cosí, la seconda legge della riflessione o seconda legge di Snell.

Poiché la derivata seconda data dalla (3.29.5) é sempre maggiore di zero qualunque sia  $z$  e qualunque sia  $x$ , si deduce che il tempo percorso é un minimo.

### 3.30 - Leggi della rifrazione dedotte dal principio di Fermat

Allo stesso modo il principio di Fermat ci permette di trovare le leggi di Snell-Descartes competenti alla rifrazione della luce. Immaginiamo due mezzi trasparenti omogenei separati da una superficie piana. Indichiamo con  $v_1$  e  $v_2$  le velocità della luce rispettivamente nei due mezzi. Per semplificare, supponiamo il problema piano (si potrà dimostrare come in precedenza che i raggi restano nel piano di incidenza). Sia  $A$  un punto fisso nel mezzo 1 di coordinate  $A \equiv (x_1, y_1)$  e un punto  $B$  nel mezzo 2 di coordinate  $B \equiv (x_2, y_2)$ . Cerchiamo la traiettoria che minimizza il tempo di percorso fra  $A$  e  $B$ . Si comprende facilmente che se la luce viaggia piú velocemente nel mezzo 1 percorrerá un percorso piú lungo in questo mezzo e piú corto nell'altro; ciò spiega la rifrazione.

#### Rifrazione fra due mezzi dielettrici omogenei (costruzione di Fermat)

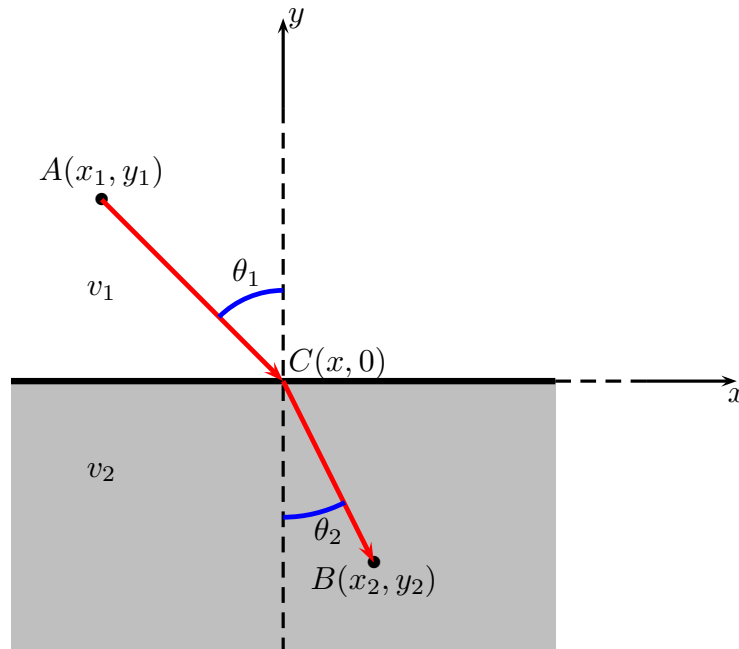


fig.3.30-1

Il tempo  $T_{AB}$  del percorso dipende dalla posizione del punto di incidenza di coordinate  $C \equiv (x, 0)$ . Si ha:

$$T_{AB} = \frac{|AC|}{v_1} + \frac{|CB|}{v_2} = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}}{v_2} \quad (3.30.1)$$

Questo tempo presenta un estremo (che in questo caso é un minimo) se la sua derivata prima si annulla:

$$\frac{dT_{AB}}{dt} = \frac{1}{v_1} \frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{x_2-x}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}} = 0 \quad (3.30.2)$$

Dalla (3.30.2) si deduce che  $(x-x_1)$  e  $(x_2-x)$  devono essere dello stesso segno, ciò significa che  $x$  é compreso fra  $x_1$  e  $x_2$ , ossia:

$$x_1 < x < x_2 \quad (3.30.3)$$

Il raggio si rifrange passando dall'altro lato della normale (come per la riflessione). Se si fanno intervenire gli angoli di incidenza  $\theta_1$  e l'angolo di rifrazione  $\theta_2$ , lequazione (3.30.2) si traduce in:

$$\boxed{\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}} \quad (3.30.4)$$

**che é la famosa legge di Snell-Descartes.**

All'epoca di Fermat si conosceva che il raggio di luce in acqua vi entrava con un angolo rispetto alla normale minore dell'angolo di incidenza. Dalla formula di cui sopra si dedusse quindi che la velocità della luce in acqua fosse piú piccola di quella in aria. Cominció il disaccordo fra Fermat e Descartes il quale sosteneva viceversa che la velocità della luce fosse maggiore nei mezzi densi. Bisognerà attendere l'anno 1850 per confermare la previsione di Fermat. Fu Leon Foucault che fornirá la prova mettendo definitivamente fine al dogma cartesiano secondo il quale la luce si propaga piú velocemente nei corpi densi.

Adottando la convenzione che l'indice di rifrazione del vuoto é eguale a uno, si ottiene  $n = \frac{c}{v}$  e la legge di rifrazione si scrive:

$$\boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{con} \quad n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{e} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}} \quad (3.30.5)$$

Un calcolo della derivata seconda permette di verificare che il tempo  $T_{AB}$  presenta un minimo se  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ .

### 3.31 - Leggi della riflessione dedotte dal principio di Huygens<sup>3)</sup>

---

<sup>3)</sup> Christian Huygens: Treatise on light - Forgotten Books, pag. 22; E. T. Whittaker: A History of the Theories of Aether and Electricity - Dublin University Press Series, pag. 24.

Sia  $AB$  l'interfaccia su cui avviene la riflessione,  $AHC$  il fronte d'onda incidente ad un istante  $t_0$ ,  $GMB$  la posizione che il fronte d'onda occuperebbe ad un successivo istante  $t$  se la propagazione non fosse interrotta dalla riflessione. Allora per il principio di Huygens l'onda secondaria da  $A$  é all'istante  $t$  una sfera  $RNS$  di raggio eguale ad  $AG$ : l'onda proveniente da  $H$ , dopo avere incontrato l'interfaccia in  $K$ , genererá un'onda secondaria  $TV$  di raggio eguale a  $KM$ , e analogamente l'onda secondaria corrispondente ad ogni altro elemento del fronte d'onda originale puó essere trovata. É ovvio che l'involuppo di queste onde secondarie, che costituiscono il fronte d'onda finale sará un piano  $BN$ , che sará inclinato rispetto ad  $AB$  dello stesso angolo di cui é inclinato il piano  $AC$ . Questo comporta la *legge della riflessione*. Infatti consideriamo i triangoli rettangoli  $ACB$  e  $BNA$  (in quanto  $AN$  e  $BN$  sono perpendicolari); essi hanno in comune il lato  $AB$  ed inoltre il lato  $CB$  é uguale al lato  $NA$ , da cui segue che gli angoli opposti a questi due lati  $NBA$  e  $CAB$  sono eguali e quindi anche gli angoli  $CBA$  ed  $NAB$ .

### Riflessione da uno specchio piano (costruzione di Huygens)

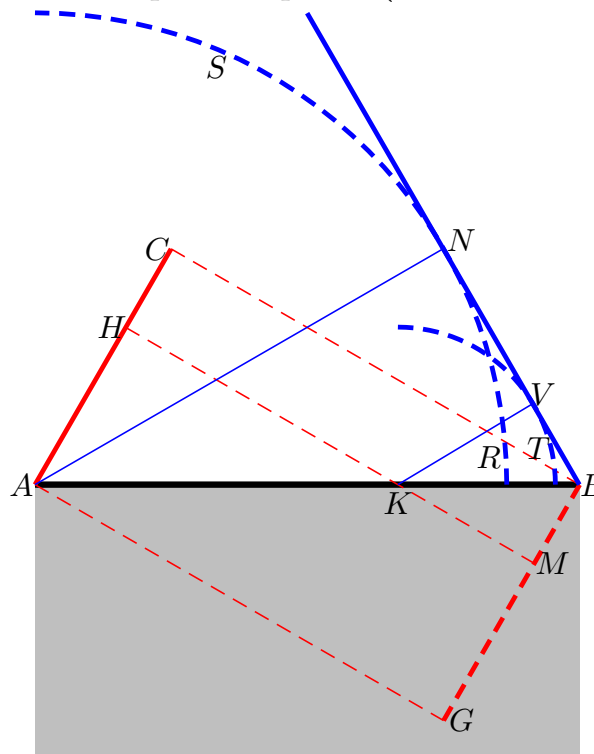


fig.3.31-1

### 3.32 - Leggi della rifrazione dedotte dal principio di Huygens<sup>4)</sup>

Allo stesso modo in cui gli effetti della riflessione sono stati spiegati da onde di luce riflesse sulla superficie dei corpi levigati, spiegheremo la trasparenza e i fenomeni di rifrazione

<sup>4)</sup> Christian Huygens: Treatise on light - Forgotten Books, pag. 28; E. T. Whittaker: A History of the Theories of Aether and Electricity - Dublin University Press Series, pages. 25-35.

da parte delle onde che si diffondono all'interno e attraverso corpi diafani, sia solidi, come il vetro, sia liquidi, come acqua, olio, ecc.<sup>4)</sup> Passiamo ora alla spiegazione degli effetti della Rifrazione, assumendo la diminuzione della velocità delle onde quando passano nel secondo mezzo.

Sia  $AB$  una linea retta che rappresenta una superficie piana che delimita la sostanza trasparente che giace verso  $C$  e verso  $N$ . La linea  $AC$  rappresenta una porzione di un'onda di luce, il cui centro è ritenuto così distante che questa porzione può essere considerata come una linea retta. Il punto  $C$ , quindi, dell'onda  $AC$ , sarà avanzato in un certo lasso di tempo fino al piano  $AB$  seguendo la linea retta  $CB$ , che può essere immaginato come proveniente dal centro luminoso, e che di conseguenza taglierà  $AC$  a angoli retti. Ora nello stesso tempo il punto  $A$  sarebbe giunto a  $G$  lungo la linea retta  $AG$ , uguale e parallela a  $CB$ ; e tutta la parte dell'onda  $AC$  sarebbe in  $GB$  se la **materia del corpo trasparente trasmettesse il movimento dell'onda tanto rapidamente quanto la materia dell'Etere**. Ma supponiamo che trasmetta questo movimento meno rapidamente, di un terzo, per esempio.<sup>5)</sup>

**Rifrazione fra due mezzi dielettrici omogenei (costruzione di Huygens)**

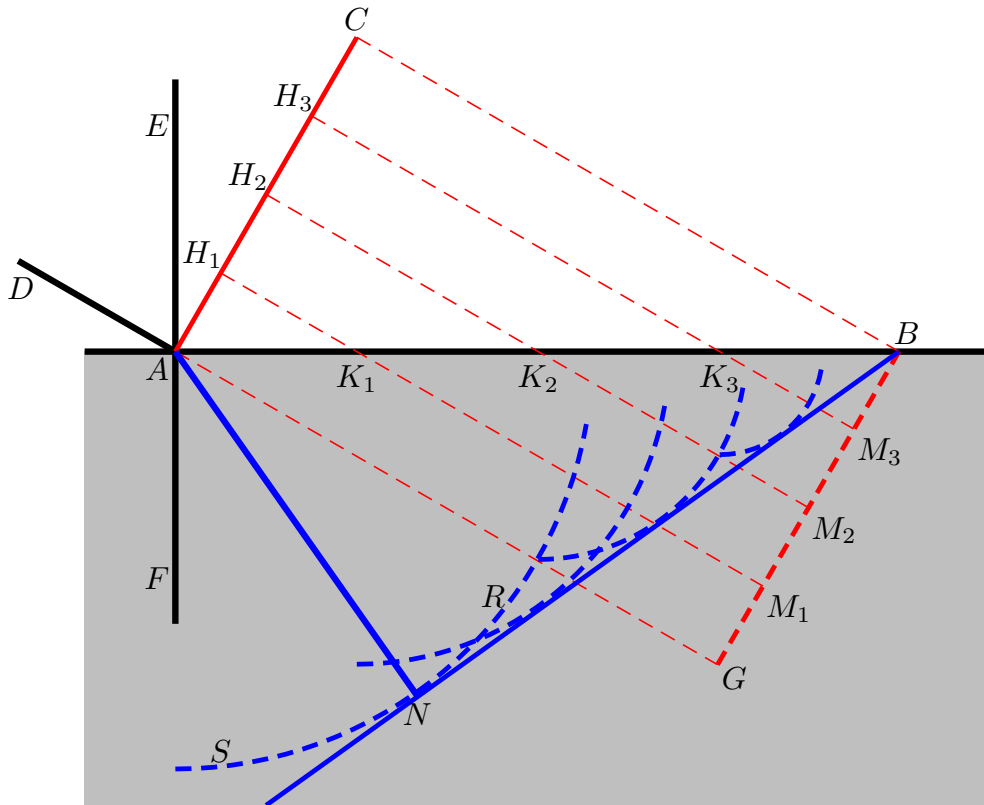


fig.3.32-1

La perturbazione sarà quindi diffusa dal punto  $A$ , nella materia del corpo trasparente attraverso una distanza pari a due terzi di  $CB$ , facendo la propria

<sup>5)</sup> Christian Huygens: Treatise on light - Forgotten Books, pag. 36.

**particolare onda sferica secondo quanto é stato detto prima.** Questa onda é quindi rappresentata dalla circonferenza  $SNR$ , il cui centro é  $A$ , e il suo semi-diametro é pari a due terzi di  $CB$ . Quindi, se si considerano in ordine gli altri elementi  $H$  dell'onda  $AC$ , si ha che nello stesso tempo in cui il "punto"  $C$  raggiunge  $B$ , non solo saranno arrivati sulla superficie  $AB$  lungo la linea dritta  $HK$  parallela a  $CB$ , ma inoltre, avranno generato nella sostanza diafana dai centri  $K$ , onde parziali, qui rappresentate da circonferenze i cui semi-diametri sono pari a due terzi delle linee  $KM$ , vale a dire, a due terzi dei prolungamenti di  $HK$  fino alla linea retta  $BG$ ; questi semi diametri sarebbero stata pari a intere lunghezze di  $KM$  se le due sostanze trasparenti fossero state della stessa penetrabilitá (figura 3.32-1).

La linea  $AN$  indica la direzione di propagazione dell'onda nel secondo mezzo ortogonale al nuovo fronte d'onda rappresentato dal piano  $BN$  tangente alle sfere.

## Appendice al Cap. 3

### A) - LA FATA MORGANA<sup>1)</sup>

Studio Storico Scientifico con Appendice Bibliografica

Per il

Dott. Vittorio E. Boccara

Professore di Fisica nel Regio Istituto Tecnico di Reggio Calabria

#### 1. - Proemio

Il fenomeno comunemente chiamato *Fata Morgana*<sup>2)</sup> é cosí vagamente descritto e cosí poco noto che mi venne subito in mente, non appena fui nominato insegnante a Reggio

---

<sup>1)</sup> V.E. Boccara: Memorie della Societá degli Spettroscopisti Italiani, t. xxxi, 1902, p. 199.

<sup>2)</sup> Solo a titolo di curiositá etimologica riporto i seguenti passi dell'Allegranza e del Minasi: "Intorno alla *Fata Morgana* io potrei cominciare dicendo che *or* in ebraico vuol dire *giorno* e *ghen* essere un termine di giunta all'uso germanico; quando non si voglia toltta la parola *Morgana* interamente dalla tedesca *Morghan* (moderno *morgen*), ossia *giorno*, cosicché *Fata Morgana* vaglia un'operazione, che una *Maga* facesse preternaturalmente di giorno."

"L'etimologia della *Fata Morgana* senza ricorrere alle parole ebraiche e tedesche, come é piaciuto a qualche autore di fare (allude all'Allegranza) puó derivarsi dalle greche, di cui é tenacissimo il volgo dell'una e dell'altra Calabria. Il Vossio nell'Etimologico alla parola *Mora*, dice ch'essa per testimonianza di Cornelio Nepote (Hostilia 100 a.C. - Roma 27 a.C.) significava appo i Lacedemoni: *pars exercitus 300, aut 500, aut 700 militibus constans*, forse da *μορα* nell'istesso significato presso Tucidide e Diodoro Siculo. - Se non c'inganniamo dunque, secondo i grammatici da *μορα exercitus* e *γανσω splendeo, appaereo*, potrebbe corrottamente formarsi *Morgana*, cioè *esrciyto apparente*, giacché le prime a vedersi in quelle acque al lido vicino sono le immagini moltiplicate di uomini a pié, ed a cavallo armati, e dei soldati che stan facendo le sentinelle su quei Fortini accanto al mare eretti (sic!). Potrebbe anche essere formata da *μορμω larva* e da *γανσω* cosicché *Morgana* o *Mongana*, come dicesi dai marinai di Scilla, significherebbe *larva apparente*.- E chi sa quella celebre maga chiamata, presso al Garzonio al capo della Kabula, *Fata Morgana*, perché coi suoi incantesimi, o coi suoi artifizii, ed illusioni faceva apparire varie cose stupende, non imprestasse il nome a questa nostra naturale bizzarra apparizione, o da essa non la traesse? Nell'uno o nell'altro modo che vada l'interpretazione di un nome sí strano all'orecchio romano, egli é certo, che la rara apparizione rallegra tutti, che in Reggio la veggono: quindi neppure si andrebbe lungi dal vero, se da *μωροχ; tristis* e *γανσω laetitia, afficio* si facesse derivare la parola *Morgana*..." (Minasi a pag.3 nota (1)).

Io, col Ruffo, credo che essendo i nostri antenati digiuni abbastanza di fisica e piú di noi superstiziosi avranno attribuito ad una maestra delle arti diaboliche quel giuoco della luce, e, poiché il fenomeno supera ogni altro per beltá, lo avranno ritenuto opera della *Fata*

Calabria nel 1899, di osservarlo e farne oggetto di studio.

Per informazioni assunte dalle persone di mare del luogo seppi che il fenomeno si vedeva in generale nei mesi estivi. Intanto, volendo farmene un'idea esatta, che non avevo delle brevissime e fugaci descrizioni che si leggono nei trattati di fisica e meteorologia, frugai nella meschinissima biblioteca Comunale della Città; ma poco o nulla vi potei trovare. Mi rivolsi allora alle principali biblioteche della Sicilia e ad alcune private, e credo di aver potuto raccogliere quando fu detto e scritto sull'argomento dai tempi piú remoti ad oggi, che esporró in ordine cronologico brevissimamente. Faró solo eccezione per quei pochi autori che dettero una descrizione dopo aver visto il fenomeno, dei quali mi limiteró a trascrivere solo quelle parti piú utili a conoscersi per arrivare a darne una spiegazione e mettere in evidenza le condizioni meteoriche che lo accompagnano.

## **2. - Allusioni chiare e probabili alla "Fata Morgana" negli scrittori piú antichi fino al 1617**

In alcuni autori, relativamente moderni, trovai citato Aristotele<sup>3)</sup> che si dice per il primo ne abbia parlato; ma all'infuori della descrizione delle proprietá dei vapori e simili null'altro trovai. Appena un cenno ne fa Agrippa Cornelio colle seguenti parole: "E noi vediamo come soffiando il vento di scirocco l'aria si addensa in piccole nubi nelle quali, come in uno specchio, si riflettono immagini molto distanti di accampamenti, di monti, di cavalli, di schiere, e di altre cose che poi svaniscono dalle nubi che si ritirano..." Omero, Apollonio, Policleto, Damascio, Plinio, pur parlando di apparizioni nell'aria, non accennano molto chiaramente al fenomeno.

Soltanto verso il 1550, troviamo nella storia del Fazello quanto segue: "...In questo medesimo mare (quello fra la Calabria e la Sicilia) si vede ancora un'altra cosa molto meravigliosa, e questa é, che cessata la tempesta, e quietata l'aria, in sul far dell'alba, si vedono in aria varie immagini d'animali, e d'huomini, alcune delle quali stanno al tutto ferme, alcune volte corrono per aria, alcune par che combattano tra loro, e dura persino che il Sole pigli forza, al caldo del quale tutte spariscono..".

Ne fa cenno pure il Carnevale, ma piú esplicitamente il Politi colle parole: "...dalle spalle verso levante si vedono insino all'altezza di Aspromonte, e nel mezzo fra l'isola di Sicilia, e la Calabria il vago mare, il quale piú tosto rappresenta un largo fiume che mare, e tale é questa prospettiva delle acque vicine e della terra, che in un tranquillo e sereno giorno non si puó la piú bella cosa vedere che i suddetti paesi, ove alle volte e specialmente di está la mattina per i vapori che si rilevano, si vedono cose meravigliose, i quali ingrossano in tal guisa l'aria, che ogni piccola cosa la fanno parere grandissima, e quella di lontano molto vicina, talmente che si vedono per quei lidi nuove Città, infiniti edifici, altissime torri, bellissimi porti, e folte selve di alberi; e questa vista dalle genti del paese si domanda la *Fata Morgana*, la quale dicono che dimostra le sue grandezze, ma la veritá é quella che si é detta di sopra, che avviene per la grossezza dell'aria cosí piena di vapori, che la mattina sono sollevati dai raggi del Sole, i quali vapori sono nelle acque, e nella terra, e cosí durano

---

*Morgana*, tenuta tra le streghe la Regina.

<sup>3)</sup> Di tutti gli autori citati si troverá un elenco per ordine alfabetico alla fine di questo lavoro, coll'indicazione delle opere consultate e con un breve cenno critico.

in sino a tanto, che riscaldati da quello in tutto non si risolvono, ovvero se non spira alcun vento, e quegli insieme con l'aria ne porti seco..."

### 3. - Prima descrizione della "Fata Morgana marina"

Ma una prima e vera descrizione, sulla quale gli autori successivi ordirono esagerate o false dissertazioni, é quella del **padre Angelucci**; la quale descrizione, per quanto apparisca compilata con troppa enfasi, pure ci dá una discreta idea di una prima specie di *Fata Morgana*. Egli dice: "...La mattina dell'Assunzione della B. Vergine (15 agosto 1934) standomi solo alla finestra, vidi cose tante, e tanto nuove, che di ripensarle non mai sazio, e stanco sono. Parmi che la Madonna SS. facesse comparire in questo Faro un vestigio di Paradiso quel dí, che essa vi entró. Che se ancor l'occhio lassú ha come l'intelletto lo specchio volontario, ove venga ciocché le piace, quel che ho visto io posso chiamarlo specchio di quello specchio. Il mare che bagna la Sicilia si gonfió, e diventó per dieci miglia circa di lunghezza come una spina di montagna nera, e questo della Calabria spianó, e comparve in un momento un cristallo chiarissimo, e trasparente, che pareva uno specchio che colla cima appoggiasse su quella montagna di acqua, e col piede al lido di Calabria. In questo specchio comparve subito di color chiaroscuro una fila di piú di 10000 pilastri di uguale larghezza ed altezza, tutti equidistanti, e di un medesimo vivissimo chiarore, come di una medesima ombratura erano gli fondati tra pilastro e pilastro. In un momento poi i pilastri si mezzarono d'altezza, e si arcuarono in forma di codesti acquedotti di Roma, o delle costruzioni di Salomone, e restó semplice specchio il resto dell'acqua, sino all'acqua ammontanata di Sicilia, ma per poco, che tosto sopra l'arcata si formó un gran cornicione. Fra poco sopra del cornicione si formarono castelli reali in quantità disposti in quella vastissima piazza di vetro, e tutti di una forma, e lavoro; fra poco delli castelli rimasero quantità di torri tutte eguali; fra poco le torri si cambiarono in teatro di colonnati; fra poco il colonnato si estese, e fecene una doppia fuga; fra poco la fuga de' colonnati diventó larghissima facciata di finestre in dieci fila; della facciata si fé varietà di selve, di pini e cipressi eguali, e d'arbori. Questa é quella *Fata Morgana*, che ventisei anni ho stimato inverisimile, ed ora ho visto vera, e piú bella di quel che mi si dipinse; or credo che sia vero, che soglia comparire in vari colori volanti, e che piú vivi, e belli di questi non ha l'arte e la natura permanente..."

Ed eccoci al famoso **Kircher** il quale nel 1671, dando alle stampe la sua *Ars magna lucis ecc.*, riporta per il primo la lettera dell'Angelucci e, su quella basandosi, filosofeggia sul fenomeno che non ha veduto e dichiara che questo si produce per veri e propri cristallini sospesi nell'atmosfera, le cui facce, a guisa di specchi inclinati, moltiplicano le immagini degli oggetti che in essi si riflettono; ed arriva perfino ad asserire di aver riprodotto artificialmente<sup>4)</sup> la *Fata Morgana* innanzi ad un numeroso uditorio.

E con lui sono da mettere insieme il Giardina, il Reina, il Cumbo, lo Scotti, il Brina-

---

<sup>4)</sup> A pag. 706 l.c. leggesi: "...Si prenda una cesta oblunga ferrea incurvata a forma di canale: dipoi mettici carboni selenitici, pezzi pieni di antimonio ed altri frantumi che si possono risolvere in materia vitrea, qui m'intendono i chimici, e nel sottoposto canale si abbrucino i carboni tanti, finché per grandissimo calore e per il fuoco concentrato divengano incandescenti. Fatto ciò, sopra al canale si stenda una cortina di color nero: dipoi abbi



cio, il Chiarello, il Giannettasio, il Calino, il Samperi, il Varano, il Campailla, l'Amico, l'Allegranza ed il Gallo (Andrea), i quali tutti, non avendo visto il fenomeno, come essi dicono esplicitamente o fanno trasparire dai loro ragionamenti, non possono fare a meno di ripetersi e nelle ideate descrizioni e nelle puerili spiegazioni.

#### 4. - Riassunto della Dissertazione "Sul fenomeno volgarmente detto della Fata Morgana" del padre Minasi

Si arriva così al 1773, nel quale anno fu pubblicata dal Minasi una "Dissertazione sul fenomeno detto *Fata Morgana*. In questa non breve dissertazione il Minasi ha, se non altro, il merito di avere per il primo fatta la distinzione tra il fenomeno aereo e quello marino. Lo distingue in tre specie, cioè in: *Morgana marina* quando si osserva nel mare (quella descritta dall'Angelucci); *Morgana marina aerea* quando la rappresentazione è nel mare e nell'aria; *Morgana d'iride fregiata* quando si presenta fregiata di diversi colori sulla superficie del mare. Asserisce averla osservata tre volte in tutte le tre diverse apparenze.

Spiegando la prima specie, la riferisce alle immagini degli oggetti reali di Reggio e dice "che per legge di catottrica i raggi luminosi di tali oggetti, riflettendosi sopra la superficie delle acque del mare formato a guisa di specchio inclinato, o di specchi separati e divisi dalla corrente, e diversamente inclinati, rappresentano le immagini degli oggetti reali di Reggio (!!)"

Fa dipendere la seconda specie, cioè la *Morgana marina aerea*, "da vapori sollevati, addensati, e stagnanti sopra del mare, riparati dai monti della Calabria, e della Sicilia, e perciò non dissipati dai venti, formanti una massa, che opacata dalle deretane colline di Messina, presenta nelle date circostanze le immagini degli oggetti, che si frappongono, e quelle ancora che in essa dalla ineguale elevata superficie marina ripercuotonsi."

Aggiunge: "che per la corrente lentamente cambiandosi la posizione della superficie del mare, cambiar si deve ancora la forma della imminente ad essa contigua pesante atmosfera, e produce un'alterata, e forse più valida commozione in essa; e per conseguenza divenendo l'aria di grado in grado più tremolante, a proporzione che alle prime succedono le seconde acque del ricorrente riflusso, quel vaporoso volume di aria all'altezza di quasi palmi quattordici, cambia per lo lungo del cratere di Reggio in mille specchi il suo mobile aspetto e varia situazione; ed in questo modo mille immagini si presentano."

E finalmente la terza specie, cioè la "*Morgana d'iride fregiata*" che rappresenta le immagini sotto diversi colori nella sola superficie del mare, crede derivi da ciò, ch'esistendo la Fata Morgana marina, o l'aerea marina, per le ragioni da lui addotte, mentre l'aria si

---

preparata acqua composta di varie specie di vitrioli e di sali la quale acqua tosto che l'avrai sparsa sui carboni accesi, ecco che, mirabile a dirsi, con massimo piacere tu vedrai come in un lucidissimo specchio dal detto luogo simulacri infiniti ripieni di una certa varietà di colori e riflessi all'occhio dal vapore e, come ad invidia della natura stessa operante nella Morgana mamertina, con sommo piacere tu attonito osserverai una trasparenza di vapore vitreo sulla opaca cortina onde la riflessione delle cose opposte in quel determinato luogo che rompe con tanta varietà di colori dal luogo ove furono posti i sali come io non credo si possa veder più bello nei fenomeni umani. L'esperienza affinché riesca ottimamente richiede il magistero chimico ed un ingegno desto (!?).

trova impregnata di densi vapori, il nascente sole vada a diradare e disgiungere l'eterogenee parti di quell'atmosfera facendola divenire da opaca e densa, lucida e roscida, e come tale atta per qualche tempo a colorire gl'ingombranti oggetti ed a fregiare d'iride le costoro riflesses immagini e successive apparizioni."

Il Minasi intende poi dare una idea del fenomeno sotto i tre vari aspetti mediante un'incisione, il cui fac-simile é rappresentato dalla fig.1 (pag. seguente).

Quanto siano errate le ipotesi del Minasi appare subito manifesto a che pensi che il Sole nascente si trova dietro le case della città di Reggio e perciò le cciate guardanti il mare sono o poco o purito direttamente illuminate, onde l'impossibilità della loro riflessione, nel mare. La qual riflessione, d'altra parte, sarebbe un fatto sí comune da non destare le meraviglie, né da meritare un nome speciale.

## 5. - Descrizione della Fata Morgana marina del Ribaud

Subito dopo il Minasi troviamo il Pindemonte e l'Houel. il primo ne scrisse in versi, mentre il secondo, pur non avendo visto il fenomeno, per darne la spiegazione, ricorre ad un bitume, che dal fondo del mare innalzandosi sulla superficie delle acque, s'attenua, si combina, si volatizza ecc., sí da formare dei cristalli, i quali, riflettendo la luce, producono il fenomeno stesso. Ritorna quindi in ballo l'immaginosa spiegazione del kircher. Segue il Gallo (Caio Domenico), il quale, pur non essendo stato spettatore, confuta quanto dice il Kircher per diluire poi in prosa quanto in versi cantó il Campailla,

Ed eccoci infine all'unico autore che, presa a cuore la cosa, cercó di dare la spiegazione del fenomeno dopo averne con coscienza esaminate da vicino le cause della produzione. É questi il capitano Pietro Ribaud, che verso la metà di luglio del 1809, messosi in osservazione, segue il formarsi delle vaghe immagini che formano poi il fenomeno della *Fata Morgana*. "Il sole, egli dice, era già bastantemente alzato, e l'escalazione dei vapori continuava, e si condensavano vieppiú, rifrangendo i raggi della luce del Sole. La mia attenzione era tutta su quei punti dove i vapori si agitavano maggiormente, tanto in aria, che in terra, e sulla superficie del mare, ma niente ancora si vedeva. Dal luogo in cui io mi trovava piú non scorgeasi la costa di Messina, né l'interno delle sue montagne, perché questo vapore lucido, s'era eguagliato e confuso col color del cielo, che allora trovavasi cenericcio, in maniera che faceva confondere l'idea, e vacillare la vista; che era per altro già bastantemente travagliata, per l'osservare fissamente tutti i movimenti e cambiamenti che spesso si vedevano nel vapore che toccava il mare. Dopo queste strane combinazioni, il mare ed il vapore divennero perfettamente chiari, ed indi cristallini, simili a quelle gran vedute, che si rappresentano col fuoco di Bengala ne' grandi teatri d'Europa. Mi elevai di un poco sul livello ove ero e fissai nuovamente i miei sguardi sul mare e sui vapori. Sul primo momento in questo gran specchio marittimo diviso in varie facce, si vedevano tanti oggetti in confuso senza poterne distinguere alcuno; ma mentre io guardava, ora a dritta, ed ora a sinistra ed innanzi, uno dei marinari, che era meco ad osservare, mi avvertí che in una certa distanza si vedevano molti palagi. Io vi portai lo sguardo, e vidi bentosto, non solo quelli palagi indicati, ma molte altre fabbriche, in forma di torri, o campanili, di color chiaroscuro ripetendosi di tratto in tratto in tutte quelle fila di specchi, che presentavano le variate onde spianate del mare, andando verso Sicilia. Nel medesimo momento guardando piú

a sinistra, scoprii altri campanili, ed altre case, intersecate da alberi, da muri, da archi, e da altri oggetti, che non si potevano ben distinguere. Queste immagini si ripetean di distanza in distanza a misura che l'occhio si dirigeva verso Sicilia. Ma mentre si stava a guardare siffatti oggetti, cambiossi la scena. Una parte di essi si dileguó, un'altra andó ad abbassarsi, ed un'altra si vide allungare. Guardando a diritta vedevansi molti bastimenti che parevano come un'armata, o un numeroso convoglio, come se fossero stati in mezzo di una città, e di una foresta, perché all'intorno di essi scorgeasi una quantità di alberi, di case, di campanili e di torri. Questi navigli erano sicuramente quelli stessi ancorati nella rada di Messina, e impressi ne' specchi che presentava il mare; poiché niun legno vi era in canale verso Calabria; né se ne vedevano del pari ancorati. Siffatte immagini erano ripetute in varie linee, e formavano il piú bello spettacolo. In questo momento un'aura di vento di canale passando sul mare, increspó la sua superficie, e condusse seco il vapore, e tutti gli incantesimi di Circe. Tutto disparve come al cader di un sipario e presentossi quindi nuovamente la scena delle belle coste di Sicilia. Il fenomeno non duró piú di dodici a quattordici minuti circa".

Da questa descrizione sembra che il fenomeno avvenisse come per riflessioni multiple sull'acqua e quindi simile a quello già osservato dall'Angelucci.

#### **6. - Condizioni meteoriche che concorrono alla formazione della Fata Morgana marina**

Il Ribaud dalle sue osservazioni, fatte per molti anni, deduce che, perché si verifichi il fenomeno. si richiedono molte circostanze, tra le quali le principali sono:

1<sup>0</sup>) la stagione, incominciando dal mese di Luglio, dev'essere calda, progredendo sempre il calorico ed incalzando eccessivamente per cinque o sei giorni prima di quello in cui succederá il fenomeno;

2<sup>0</sup>) per molti giorni questo calorico dev'essere accompagnato da una calma perfettissima di vento non solo nello stretto, ma altresí a qualche distanza dai due estremi di esso, acció la superficie del mare resti spianata, e con lunga ondulazione;

3<sup>0</sup>) che le correnti siano calme per piú giorni, specialmente nei due quarti della Luna, epoca in cui sogliono essere tali, quando non spira vento fresco;

4<sup>0</sup>) che per alcuni giorni prima del fenomeno non succeda pioggia, acció le acque del mare non siano intorbidate dalla lute, e dalle immondezze che portano secoloro i torrenti;

5<sup>0</sup>) che le montagne e le colline della Sicilia e della Calabria soffino durante la notte un piccolo vento, e tramandino dei vapori caldi, come suole sempre succedere nell'estate, onde il mare sia ben spianato con questi venti trasversali, e privo del solito increspamento, e che quei vapori caldi lo facciano restare presso a poco nello stesso grado di calorico, in cui l'ha lasciato il Sole del giorno antecedente;

6<sup>0</sup>) che dall'alzata del Sole fino al sorgere e svanire della *Fata Morgana*, non vi soffi alcun'aura di vento, acció i vapori che possono esalare col calore del Sole, dalle materie eterogenee, come antimoniali, vitrei, oleose, saline ed altre, che in quantità ne contengono i lidi e le interne terre di Calabria e di Sicilia lungo il canale, non vengono asportate;

7<sup>0</sup>) che questo momento arrivi nell'ultima ora della *Rema montante* o nella prima ora

della *Rema scendente*<sup>5)</sup> due o tre giorni dopo il primo od ultimo quarto di Luna, e nel vero punto dell'Apogeo, tempo in cui le acque superficiali del canale stanno per qualche ora in perfetta placidezza, e lasciano una ondulazione lunga e spianata da Reggio a Cariddi, e da qui alla Torre del Faro, o in forma di uno specchio poliedro a seconda dei contrasti delle leggere correnti.

Il Ribaud conclude giustamente che tutte le suddette circostanze possono avvenire eccezionalmente in modo contemporaneo, ma difficilmente possono continuare a sussistere simultaneamente e quindi la ragione del perché il fenomeno debba avere una certa durata.

## 7. - Descrizioni varie della Fata Morgana aerea

Fanno seguito al Ribaud, il Vitrioli, il Ruffo ed il Saffiotto, i quali o ne accennano appena, o la cantano in versi, oppure facendo proprie le descrizioni degli autori che li precedettero, trattano l'argomento senza portare nessuna nuova luce non essendo stati spettatori del fenomeno. Dopo questi, il prof. Arcovito tenta darne la spiegazione e, rigettando tutte quelle più o meno fantastiche, colle riflessioni o sulla superficie del mare o su ipotetici cristallini sospesi nell'aria, si sforza di dimostrare che il fenomeno avviene esclusivamente per rifrazione. Non é però troppo felice nella sua esposizione e, dopo aver premesso che le osservazioni da lui fatte non erano tali da fornirgli prove bastanti per una giusta spiegazione del fenomeno, conclude che esso si deve interpretare come il fenomeno del Parelio e della Paraselene<sup>6)</sup>. In ogni modo trovo che il prof. Arcovito é l'unico che ne abbia parlato con maggior competenza di tutti gli autori fin qui citati, sebbene la sua esposizione risenta del tempo in cui fu fatta.

A pochi anni di distanza dall'Arcovito seguono il Cacopardi, il Capozzo ed il Regaldi. il primo, dopo aver dichiarato di non aver visto il fenomeno, fa sue le spiegazioni già date dal Kircher e sostiene erroneamente, come il Minasi, che la *Fata Morgana* é dovuta alla riflessione delle case di Reggio. Il secondo, cioè il Capozzo, riassume la lettera del Saffiotti e quindi non porta nessun contributo. Il Regaldi invece, che il 20 Luglio 1843 vide il fenomeno, così si esprime: "*Le acque del mare eransi pressocché uguagliate, trnquillizzatasi borea, solo un leggero incresparsi di onda pareva annunziare i venti libici per cui questo cielo suole di soverchio infiammarsi. In tale placidità la estrema costiera peloritana, e la riviera Calabria che a riscontro le ride, non altrimenti che se per incantesimo dalla loro sede si fossero rimosse, ad un tempo, e colla medesima appariscenza dilungandosi entro le acque, apparvero in mezzo al canale, quasi animate sorelle entrassero in desiderio di mescolarsi in soavi abbracciamenti...*"

Ed eccoci ad autori relativamente moderni. Nel 1871 troviamo di un Anonimo la seguente descrizione: "*Era di poco alto il Sole: l'aria senz'ombra di nube, serena, limpida*

---

<sup>5)</sup> Colla parola greca *Rema*, i piloti del canale di Messina, chiamano qualunque corrente che percorre il canale; e particolarmente chiamano *Rema montante* quelle correnti che dal Sud vanno al Nord e *Rema scendente* quelle correnti che dal Nord vanno al Sud. Per maggior intelligenza poi della cosa ed anche per dare un'idea della posizione topografica della costa Sicula e Calabria riporto il fac-simile di una delle tavole che sono nel trattato del Ribaud, nella fig.2 (pag. seguente)

<sup>6)</sup> Flammarion. L'atmosfera pag. 186 e segg.

e raggiante di tutta la sua luce azzurrina. Molle venticello che sfilava dal Faro, tremolare e luccicare faceva la cerulea marina e lambiaci freschetto il viso. E con esso pareva lungo il lido di Sicilia correre verso mezzodí una bianca striscia di vapore (vedere fig. 3) radendo le acque come aereo torrentello. La quale ad intervalli si levava, levava, faceasi quasi velo trasparente, che in sé confondeva passando le forme della spiaggia, e le innalzava, allungava, a noi avvicinandole, e figurava un'incantevole mostra di lunghi archi e torri e colonnati ondegianti sul mare. Ma era un momento e tosto quel velo abbassandosi quelle figure si confondeano, riapparivano, si variavano e poi sparivano, e tornava la vista di quel vapore bianchiccio e fuggitivo. contemporaneamente, piegato l'occhio un po' a destra su le rive di Gallico e Catona, vedeansi le ultime punte e le curve di quel litorale dilatarsi sempre piú biancheggianti ed allungarsi, allungarsi, fino a parer congiunte con le sicule sponde (cfr. descrizione Regaldi) e rischiararsi come vicinissime e mostrar quasi albergo incantato di Fate, qua macchie di frondenti alboreti, lá ville e fiorite aiuole di mille sfavillanti colori, e gemme ed iridi di fontane e candor di casine e di mandrie sparse alla pastura e delizie di poggetti e grotte ombrose, che or si moltiplicavano, ora scemavano, variandosi rapidamente in mille guise ed ora svanivano in tutto. Mentre non meno vaga scena d'altro genere pingeci agli occhi incantati il caseggiato di Gallico per la marina, trasformato in quel momento in lungo ordine di palagi candido, marmoreo, cristallino da sembrar palazzata a colonne, portici o ringhiere di fortata città....”

Né men chiara é quest'altra descrizione dovuta al prof. can. Filippo Capri: ”.... Il giorno 20 giugno del 1874 fra le ore 8 e le 9 del mattino ci riuscí osservare la Fata Morgana. Era uno dei caldissimi giorni testé decorsi, il cui calore, straordinario per noi, brució e mandó a male in gran parte il frutto del bergamotto. Le onde dello stretto erano piuttosto agitate da quel vento che diciamo di Canale, che spira dal faro, il cielo non in tutto sgombro di nuvole e verso l'Etna un pó caliginoso. E la Fata Morgana compariva nelle riviere poste al sud di Messina, e quelle spiagge bianche coi loro verzieri e casine e campanili avvicinandosi, ingrandendosi e trasformandosi davano quel vago spettacolo sopradetto, sicché ognuno si fermava a riguardarlo. Mentre un vapore denso su quel tratto di canale che risponde a Messina ascondeva questa città non vedendosi di essa che le alte abitazioni della sua parte superiore, e quel vapore pareva sorgere come da un fumaiolo dal mare piú al nord di Messina e correre in rapide ondate verso il Sud (vedere fig.3), e mentre levato a certa altezza sul mare velava, perché denso, ivi passando la città, rischiarandosi poi come un aereo velo, fotografava in sé nel modo anzidetto le spiagge che le succedono a mezzodí. Ma dopo alcun tempo quel vapore di fronte a Messina ecco farsi bianchiccio, e come quel fumo che si sviluppa dapprima nella accensione di una macchina pirotecnica e l'avvolge e poi si dirada, rischiararsi a poco a poco e dar luogo anche qui a fenomeno, ricomparendo attraverso di esso la torre della lanterna ed i contigui fortilizi ed il caseggiato della marina e gli altri edifici, ingranditi e variati ora in massa uniti, ora staccati in parte sul mare: ma non però con tutta chiarezza e precisione, giacché il fenomeno in quel giorno non si é verificato nella piena e rarissima sua bellezza. - Come la strana visione andó dileguandosi dalla Sicilia, si ricomponeva di fronte alle riviere Calabre di Catona e Gallico. E qui pure quella striscia bianchiccia di vapore che pareva correre rasente al lido, e poi quell'allungarsi in mare di bianchissime rive ornate di ombrose ville, di macchie, di alberi, di bei caseggiati, e poi restringersi e variarsi e staccarsi dal lido come in isolette, e poi sparire....”

Il prof. Capri chiude la sua descrizione invitando gli studiosi a spiegare il fenomeno. A tale invito risponde per primo il dottor Diego Corso dando le stesse spiegazioni, già dimostrate erranee, del Minasi. E segue il prof. Canale, il quale oppugna ciò che vien detto dal Corso e non "ardisce pronunciare giudizio" perché ha visto una sola volta la *Fata Morgana* e quindi non ha potuto raccogliere molte prove di fatto; d'altra parte non vuol fare come il d'Arcovito "che cerco di spiegarlo, ma il suo concetto é corredato di tante ipotesi che, quantunque non ripugnanti, pure sono non poco intrigate e gratuite".

A confermare che il fenomeno si avvera anche ai nostri giorni basterebbe la mia personale affermazione (avendolo io visto tre volte sotto diversi aspetti) e la mia descrizione; ma siccome potrebbe sorgere il dubbio che questa mia descrizione risenta delle letture di tutti gli autori da me consultati, così reputo piú opportuno trascrivere le descrizioni che, su mia richiesta, mi inviarono da luoghi diversi due persone serie e competenti che videro appunto il fenomeno nelle epoche stesse nelle quali io pure lo vidi.

L'una, dovuta al capitano Vincenzo Ponzi, residente a Chioggia, suona cosí: "Era una giornata sciroccale sullo scadere di Giugno. L'afa mozzava il respiro e si doveva compiere un atto mentale di volontà per riuscire a muovere due passi, talmente tutto il corpo si sentiva inerte e pesante. Verso le ore 11 non era piú circolazione d'aria nell'ufficio posto in una stanza della Caserma Palazzina, ove di consueto lavoravo nell'epoca cui mi riferisco (anno 1900). Sentí la necessità di cercare di bere un sorso d'aria. Corsi, imponendo la mia volontà alle gambe indolenti, alla finestra, m'affacciai al mare, anch'esso inerte, assopito come in un letargo, e spalancai violentemente i polmoni. Ma non avevo fatto quattro o sei esercizi di ginnastica polmonare che vidi innanzi a me sul mare una cosa non mai vista, un quadro meraviglioso, la riproduzione sensibile di qualcosa d'inverosimile, un quadro fantastico alla Poe, alla Haufmann. In fondo all'orizzonte, presso la costa sicula e parallelamente ad essa fluiva rapidissima una nebbia (vedere fig. 3) bianca come il latte, un vapore diafano, trasparentissimo; fluiva a ondate, che s'inseguivano: una tempesta di oceano veduta a quindici chilometri di distanza, ma una tempesta bella, candida, se si potesse dire, tranquilla e sorridente, che dalle mitiche fauci di Scilla e di Cariddi s'inoltrava lungo la spiaggia di Messina e piú in lá. Le onde prorompevano velocissime sull'immobile piano del mare. Cosí forse proromperebbero i flutti d'un fiume immenso, non piú contenuti da una diga gigantesca, ciclopica. Nello spazio di cinque minuti vidi il latteo vapore addensarsi, consolidarsi a poco a poco, assumere un color grigio chiaro, e poi piú scuro, e poi violaceo, e da futtuante che era toglier consistenza continua. Mi pareva d'aver dinanzi una muraglia altissima di portentoso cristallo, dietro il quale assumessero le immagini dimensioni enormi spettacolose: le case, i palazzi di Messina mi precludevano, tanto era la loro altezza, la vista delle retrostanti montagne (vedere fig. 4). Dovetti togliere l'occhio da quella sorprendente scena perché attratto da un'altra che mi strappó un grido di meraviglia. La spiaggia di Villa S. Giovanni, facendo perno allo svolto di quella di Reggio, eseguiva sul mare una rapida conversione come se fosse una lunga e compatta schiera di Titani, ubbidienti al misterioso volere di un arcano spirito oceanico che loro avesse lanciato il comando: a sinistra, di corsa. E cosí vidi io congiunte per ottica illusione la Sicilia e la Calabria a uguale altezza, tutte e due insieme avanzatisi verso la riviera di Reggio sul mare, ingoiato dalla terra formante una sola linea retta e continua, biancheggiante sulla superficie azzurra e tranquilla, entro la quale si riflettevano le due spiagge fuse in unico

corpo, rendendo sensibili al mio occhio la incredibile visione di caseggiati immensi, allineati a cento metri dal punto nel quale io mi trovavo. Ma ancor maggior impressione mi fece il ritornare della natura il suo posto, lo slegarsi della visione, lo sciogliersi di quella muraglia sorta improvvisa davanti a me. Non ricordo bene quanto tempo durasse l'illusione ottica; ma forse non erro di molto se accerto che rimasi una buona mezz'ora a contemplare il fenomeno, compresa l'ultima fase e cioè il dileguarsi del miraggio. A proposito della quale ultima fase posso dire che mi parve aver dinnanzi lo spettacolo d'una fuga fantastica. Una folla mostruosa di fantasmi come inseguita da un'altra folla di spiriti o incalzata da qualche improvviso terrore, arretrava a precipizio, sgombrando il mare già conquistato. Una città immensa dalle candide mura crollava e inabissava nelle profondità subacquee quasi colpita dai fulmini di un castigo divino. Il mare spingeva, la città fantastica retrocedeva. Questa volta il mare ingoiava la terra. Tutto ciò sembrava solamente, ma l'illusione era perfetta così da far dimenticare un momento che tutto era fenomenico. Per la verità descrittiva dirò che la breccia della grande muraglia si manifestò dal centro di visione alle estremità; tant'è vero che, mentre già le case di Messina eran tornate alle loro normali dimensioni e l'imboccatura dello stretto già era tornata a vedersi come di solito, ai limiti estremi della scena meravigliosa balenavano ancora gli ultimi sorrisi ammaliatori della Fata Morgana."

L'altra descrizione più breve, ma nella sostanza identica alla precedente è dovuta al Cav. Enrico Puccini, professore di fisica, oggi R.Provveditore agli studi in Avellino<sup>7)</sup>.

"Nel mese di Giugno, non ricordo il giorno, dell'anno 1900, alle ore 11 circa passeggiando per la marina e trovandomi in vicinanza della Caserma Palazzina, vidi la punta di Gallico marina molto avanzata nel mare e molto avvicinata a Reggio. La punta su cui sono le case di Gallico non era sola a trovarsi in una posizione nuova all'occhio dell'osservatore, ma tutto l'arco della costa che va da Gallico fino a Catona era scostato verso Reggio e lo spostamento era maggiore per le parti più lontane. Lo stretto non esisteva più come stretto, ma pareva un golfo, poiché Gallico risiedeva apparentemente sulle coste della Sicilia. Le case di Gallico erano coperte da una specie di nebbia, color cenere chiaro immobile, ed in questa nebbia, quelle case parevano palazzi, molto alte, e tra i palazzi larghe strade. I piani che determinavano le figure dei palazzi erano levigati, regolarissimi, molto più nitidi chiari di quello che ordinariamente sono i muri delle case. il mare era fermo, e tranquillissima l'atmosfera. Molto caldo, caldo affannoso. Non vi erano nuvole. La nebbia si vedeva nel luogo del fenomeno."

Che dovrei o potrei aggiungere alle due descrizioni precedenti? Altre parole sarebbero superflue e quindi mi limito a riportare i fac-simili di due schizzi rappresentanti: l'uno (fig. 3) l'aspetto della costa Sicula e della punta di Catona pochi minuti prima del presentarsi il fenomeno della Fata Morgana aerea, in cui è visibile il velo nebbioso fuggente ad ondate; l'altro (fig. 4) rappresentante la Fata Morgana aerea nel suo pieno sviluppo ed ove la città di Messina e la punta di Catona appariscono, come apparivano, in linea retta e molto prossime alla riva di Reggio.

I due schizzi precedenti serviranno a dare un'idea generale del fenomeno, ma per quanto abbia cercato rappresentare nel modo migliore quanto ebbi a vedere la mattina

---

<sup>7)</sup> Identica relativamente, giacché il Puccini non fa cenno del periodo antecedente alla formazione della Fata Morgana, forse perché non era presente o non credette opportuno trascrivere la sua rapidamente variabile forma.

del 27 giugno 1900, intorno alle ore undici, pure la mia mano, non essendo quella di un artista disegnatore, non ha potuto riprodurre nel suo vero carattere le bellissime immagini che si presentarono. Immagini che d'altra parte ritengo difficilissime, se non impossibile, a riprodursi. Gli schizzi furono fatti col gessetto su di una grande lavagna, quindi fotografati e riprodotti.

### 8. - Descrizione della Fata Morgana marina del Puccini

Le due trascritte descrizioni sono concordanti con quelle dateci dall'Anonimo e dal Carpi e piú specialmente si riferiscono a quella che io, col Minasi, chiameró "*fata Morgana aerea*" per distinguerla dalla "*Fata Morgana marina*" simile a quella già descritta dall'Angelucci e dal Ribaud e dalla quale ebbi visione il giorno 2 luglio 1901. Di essa il mantovano Prof. Puccini, che come me la vide ma da altro sito, cosí mi scrive: "*Il giorno 2 luglio 1901 scendendo verso la marina dalla casa dell'On. Cappellieri vidi il mare tranquillo, placido, fermo, che pareva quasi una grande massa di mercurio non lucido, ma appannato. Sulla superficie del mare fortemente illuminata, erano circa le ore otto, si vedeva una specie di nebbia, quantunque l'atmosfera fosse serena e limpida. Mi fermai ad osservare quel mare bello, ed in condizioni non comuni, quando con stupore vidi nell'interno, sott'acqua dei grandi archi posti nella posizione ordinaria, non capovolti voglio dire, e con piani e contorni dei pilastri e delle curve superiori, molto nitidi, perfettamente levigati. Per rendermi ragione del fenomeno guardai la costa della Sicilia e vidi che archi reali e simili a quelli che in immagine si vedevano nell'acqua del mare si trovavano su in alto sopra al cimitero di Messina, nella ferrovia che va da Messina a Palermo. Gli archi ed i pilastri che si vedevano nel mare erano piú belli, di color cenere chiaro piú vivo, e meglio determinati nei contorni, e assai piú grandi di quelli reali. I pilastri che sostenevano ciascun arco non avevano termine nel profondo del mare.*"

### 9. - Fata Morgana multipla del 26 Marzo 1902

Attendevo per darmi ragione della "*fata Morgana aerea*", che é quella piú comunemente conosciuta perché relativamente piú facile a presentarsi, di vedere per lo meno un'altra volta il fenomeno, il quale con molta probabilità avrei potuto rivedere durante la stagione estiva del 1902<sup>8)</sup> Ma una fortunatissima combinazione mi offrí i mezzi per dare, come credo, una soddisfacente spiegazione. Riporto qua l'articolo che inviai al giornale "*La giovine Calabria*"<sup>9)</sup> il giorno dopo in cui vidi la Fata Morgana, articolo che scrissi poche ore dopo averne ricevuto le impressioni.

*"Nei giorni precedenti il 26 Marzo 1902 forti piogge e venti si riversarono sulla regione Calabria, specialmente sui dintorni della città di Reggio, e lungo la costa orientale della Sicilia. La mattina del giorno predetto, alle ore sette, uscii dalla mia abitazione posta nel*

---

<sup>8)</sup> Mentre il lavoro si trovava fra le mani dei compositori a Catania, mi capitó il 16 Giugno una nuova occasione di vedere il fenomeno e di ritrarne diverse fotografie dirette, le quali piú che altro rappresentano i primi stadii giacché in quel giorno non si presentó nel suo pieno sviluppo.- Non credo riprodurre queste fotografie perché simili alla figura 3.

<sup>9)</sup> N. 6 aprile 1902.



lato sud della via "21 Agosto" donde si scorge parte della costa sicula dal Faro fino a tutta la città di Messina e suoi dintorni. Appena in strada guardai come il mio solito la Sicilia, la quale appariva velata da ogni parte tranne che in uno o due punti. Il cielo era quasi completamente coperto, pure qualche raggio di Sole filtrava attraverso la fitta cortina di nubi. Non mi aspettava, date le condizioni meteoriche, di vedere la "Fata Morgana". Pure me ne apparve un piccol segno precisamente per la presenza di alcune case alla sinistra del Cimitero di Messina che apparivano di molte avvicinate, bianchissime, l'una sopra l'altra, di dimensioni quasi identiche, ma non molto ingrandite, sembravano una volta e mezzo la loro grandezza apparente ordinaria. le immagini rimasero per circa tre minuti, poi l'unico raggio rivelatore del fenomeno scomparve e più nulla rimase. Mi allontanai tosto da quel luogo perché avevo fretta di recarmi al Porto, dovendo partire per Palermo. E fu una vera fortuna l'essermi messo in viaggio, perché fui così favorito dal caso che assistetti per tutta la traversata del canale da Reggio a Messina a continue e svariate manifestazioni della "Fata Morgana". Il tempo non era cambiato affatto, anzi si aggiunse una leggera pioggerella che cadde per alcuni minuti. Il sole appariva o si offuscava tentando di penetrare attraverso le dense nubi e spirava un leggerissimo vento di borea. Mi erano compagni di viaggio l'ing. Russo del Genio Civile ed il collega professore Modafferi. Questi aveva più volte veduto la "fata Morgana" ma mai in questa stagione. Potei così, con il loro valido intervento, avere confermato tutto ciò che vedevo e questa conferma poté lasciarmi quindi una più duratura impressione. Ad ogni modo, perché il tempo non cancelli qualcuna delle impressioni ricevute trascrivo subito quanto vidi.

Come più sopra dissi i raggi solari qualche volta riuscivano a penetrare nello spazio a noi visibile. Ebbene, in quei momenti, emergevano dallo strato nebbioso, di color cenericcio, che ricopriva la costa sicula, alcune case bianchissime le quali apparivano a noi relativamente molto vicine. In brevissimo tempo, circa in due o tre minuti, scomparivano affatto, come se fossero state inghiottite dal mare, collo scomparire dei raggi solari. Ma questi ben presto ricomparivano ed allora in altri punti vedevamo altri caseggiati avanzati sul mare, l'uno sul livello del mare stesso, l'altro perfettamente simile sollevato alquanto, ma quasi sullo stesso piano verticale del primo. Tali caseggiati si lasciavano benissimo distinguere e ci davano tempo sufficiente di rimirarli e farli rimirare ad altri passeggeri che con noi erano sul ponte del ferry-boat. Questi ed altri simili scherzi si ripeterono molte altre volte (vedere fig. 5 a sinistra). Infine, all'uscire del sole, vedemmo sul mare un qualche cosa di biancastro (vedere fig. 5 a destra), come un caseggiato lunghissimo, uniforme, ma non molto alto, nel quale nettamente apparivano, per un terzo circa della sua lunghezza, delle strie verticali oscure attraversanti tutta l'altezza, sì che parevano contrade; pel rimanente, erano distinguibili altre macchie le quali avrebbero dovuto rendere immagine di finestre, di porte, ecc. L'altezza di questa striscia, per quanto non molto elevata, arrivava a coprire le prime file delle case, prospicienti sul mare, della città di Messina, la quale appariva vagamente attraverso la nebbia che l'avvolgeva e questo lunghissimo caseggiato (sequiterò a chiamarlo così perché tale appariva) persisteva finché avvicinandoci a lui perdeva la primitiva apparenza, scemava in lunghezza ed in altezza, e si mostrò in fine qual'era realmente, cioè il muraglione a grandi masse che staccandosi dalla Lanterna di Messina cinge la batteria del Forte.

Con la scorta di schizzi presi dal vero e col solito sistema, ho tentato rappresentare

graficamente il fenomeno che mi si presentó, di cui un fac-simile é rappresentato dalla superiore foto-incisione.

*In tale figura é rappresentato tutto insieme il fenomeno mentre che questo, come già dissi, si presentó parzialmente e successivamente. Così i tre caseggiati del disegno apparvero non contemporanei, ma bensí ad istanti diversi e successivi. Quando apparve il secondo caseggiato, il primo (quello a sinistra) era già scomparso, quando apparve il terzo, il secondo piú non esisteva, e cosí di seguito, (nello schizzo sono omesse le successive apparizioni) fino a che comparve quella specie di caseggiato che é disegnato a destra e piú in basso. Quelle parti che spiccano piú in chiaro sullo sfondo, rappresentante lo strato nebbioso, dovrebbero corrispondere al caseggiato di Messina che appena s'intravedeva."*

## 10. - Aspetti vari della Fata Morgana e spiegazione del fenomeno

Concludendo il fin qui detto possiamo dire che il fenomeno della "Fata Morgana" si può presentare sotto vari aspetti a spiegare i quali singolarmente, é conveniente distinguerli in tre:

- 1<sup>o</sup>) Fata Morgana marina
- 2<sup>o</sup>) Fata Morgana aerea semplice
- 3<sup>o</sup>) Fata Morgana aerea multipla

Alla prima specie apparterebbe il fenomeno visto e descritto dall'Angelucci (Cf.3), dal Ribaud (Cf.5), dal Puccini (Cf.8) e da me. La spiegazione, del modo col quale si presenta questo fenomeno, esclusa quella della riflessione semplice o multipla proposta dal Minasi e dal Ribaud, potrebbe essere una conseguenza della ipotesi seguente:

Gli strati di aria prossimi al suolo della costa messinese, riscaldati fortemente dai raggi diretti del Sole, sono meno densi degli strati ad essi superiori fino ad una certa altezza. Invece considerando gli strati di aria della costa sicula alla costa di Reggio, questi vanno aumentando di densità per la ragione semplicissima che buon tratto della riva reggina é in ombra, ovvero da poco tempo fu colpita dai raggi diretti del Sole. Essendo inoltre lo stretto del Faro riparato dalle colline del Faro stesso e dei Ganzirri, dalle colline di Scilla, della Melia, di Torre Cavallo, del Pezzo ecc. ed ancora dalle montagne della Sicilia e della Calabria, i leggeri venti freschi del nord-est, del nord, oppure del nord-ovest, trasportano una corrente di aria molto piú densa e fresca di quella che esiste nel tortuoso canale messinese e, perché riparato dalle suddette colline e montagne, la corrente aerea scorre sopra gli strati già rarefatti aumentando cosí la densità degli strati superiori in confronto cogli strati inferiori. Cosicché alcuni dei raggi luminosi diffusi, specialmente dalle parti un poco piú elevate di Messina, prima di giungere all'occhio dell'osservatore, che si trova nell'ombra sulla riva di Reggio, debbono attraversare strati di aria di densità decrescente dall'alto in basso per la qual cosa invece di seguire la retta via seguiranno una curva colla concavità rivolta verso il cielo e quindi l'osservatore seguendo la visuale secondo la tangente all'ultimo elemento di questa curva, vedrà gli oggetti molto piú in basso di quello in cui effettivamente sono, e quindi gli appariranno come situati nell'interno del mare o come situati sulla sua superficie. Si comprende poi come il mezzo rifrangente possa anche deformare le immagini e renderle esageratamente ingrandite o nel senso verticale od in quello orizzontale e renderle esageratamente ingrandite o nel senso verticale od in quello

orizzontale e renderle iridate (Fata Morgana d'iride fregiata del Minasi) per dispersione, come farebbe un prisma.

Alla seconda specie, e cioè alla "*Fata Morgana aerea semplice*" apparterebbe quella descritta dall'Anonimo, dal Carpi, dal Ponzi, dal Puccini e vista da me il 27 Giugno 1900 ed in parte il 29 Maggio 1902 (vedere la fotoincisione fig. 4 e la parte a destra della fig. 5). In questa specie di *Fata Morgana* appaiono le case della costa sicula (più specialmente quelle messinese) e quelle della punta di Gallico e Catona molto avvicinate ed ingrandite. Questo ingrandimento è esagerato poi in senso verticale o in quello orizzontale. Tutte le volte che fu visto questo fenomeno fu constatata la presenza di vapor acqueo sotto forma di fitto velo che ricopriva la costa sicula, (vedere fig. 3) il quale velo muovendosi cambiava successivamente di colore fino a prenderne uno fisso, grigio-ceruleo quando si fermava. Questo vapore impedirebbe ai raggi diretti solari di riscaldare fortemente il suolo della costa messinese, come supponemmo precedentemente per spiegare la "*Fata Morgana marina*" ed anzi agirebbe in modo tutt'affatto opposto.

Ciò premesso, facciamo le considerazioni seguenti:

Gli strati di aria più vicini alla superficie del mare sono gradatamente più densi perché in contatto o quasi a contatto dell'acqua del mare, la quale nella stagione estiva, o prossima alla estiva, è sempre di temperatura più bassa dell'aria in contatto, e per conseguenza rende gradatamente, sino ad una certa altezza, più densi gli strati più vicini ad essa, onde l'ordine della densità in questo luogo è gradatamente come quello dello stato naturale, ma più esaltato. Lo spesso strato che, per brevità di scrittura e più facile intelligenza, chiamo nebbioso, trovandosi in prossimità della costa messinese fino ad una certa altezza, evidentemente concorre a rendere l'aria più densa ancora a partire dalla costa sicula per divenire a mano a mano meno denso coll'avvicinarsi alla costa Calabria.

In poche parole siamo di fronte ad un caso anomalo di rifrazione ordinaria. Cosicché alcuni dei raggi luminosi diffusi dalla costa messinese e dai dintorni, prima di giungere all'occhio dell'osservatore, che si trova nell'ombra portata delle case prossime alla riva reggina, devono passare in un mezzo che da più denso va gradatamente rarefacendosi per poi acquistare, nell'ultimo lungo tratto densità pressoché uniforme e quindi seguire delle curve con la convessità rivolta verso il cielo. Conseguenza di ciò è questa che l'osservatore seguendo la direzione della tangente all'ultimo elemento di curva, vedrà la costa messinese in alto e deformata nel senso verticale od in quello orizzontale ciò dipendendo dalle maggiori o minori deformazioni nel senso orizzontale o verticale che potrà subire lo strato nebbioso in seguito ai leggieri venti che spirano nel canale di Messina, nel momento in cui si avvera il fenomeno.<sup>10)</sup>

Alla terza specie e cioè alla "*Fata Morgana aerea multipla*" apparterebbe quella veduta da me, dall'ing. Russo e dal prof. Modafferi (vedere parte a sinistra della fotoincisione 5) il 26 Marzo 1902. Però questa a causa delle scomparse intermittenti dei raggi solari non

---

<sup>10)</sup> Per rendere evidenti queste deformazioni in senso orizzontale o verticale, quando parlo di questo fenomeno ai miei scolari, mi servo di una lente piano cilindrica, la quale disposta a conveniente distanza d'innanzi ad un oggetto lo fa vedere a tutti molto allungato nel senso verticale se l'asse della lente è orizzontale, molto allungato in senso orizzontale e cioè schiacciato, se l'asse della lente è verticale e quindi, brevemente dico ai miei scolari che lo strato nebbioso sulla costa sicula si comporterebbe come una lente cilindrica.

comparve nel suo bellissimo e pieno sviluppo e tutta insieme come quando fu veduta anni or sono dal prof. Scerbo, dal signor Filippo Aloï e da altri, e di cui un fac-simile é rappresentato dalla fig. 6.<sup>11)</sup>

La spiegazione di questa specie di "Fata Morgana" si riconduce a quelle date precedentemente. infatti, ammessa l'esistenza dello strato nebbioso sulla costa sicula sarà facile supporre che gli strati di aria superiori ad un certo strato di aria limite si trovino nelle condizioni supposte, poco prima e supponendo inoltre che spiri nel Canale un leggero vento di nord-est, nord, o nord-ovest questo potrà spazzar via parte dello strato nebbioso che si trova a contatto o quasi della superficie del mare e quindi al disotto dello strato di aria limite avremo altri strati che vanno a diminuire di densità coll'avvicinarsi alla superficie del mare ed alla costa di Reggio. Conseguenza di questa ipotesi é che al disopra ed al disotto di un certo strato di aria limite dovranno esserci strati di aria, i quali, a mano a mano che si allontanano da quello, vadano diminuendo di densità e quindi un osservatore, che si trovi nell'ombra portata delle case sulla riva di Reggio, potrà direttamente vedere la costa sicula attraverso quello strato di aria limite, come pure potrà vedere due altre immagini della medesima costa una in alto in aria ed una in basso emergente dal mare. Il caso sarà rarissimo appunto per la specialissima disposizione degli strati atmosferici ma non sarà tanto raro quello in cui si vedranno due immagini (fig. 5). E si comprende facilmente come gli oggetti veduti potranno apparire più o meno ingranditi o deformati, essendo visti sempre attraverso uno strato nebbioso il quale é suscettibile di deformazioni.

### 11. - Riepilogo er condizioni meteoriche che accompagnano il fenomeno

Riepilogando possiamo dire che in alcune ore del giorno, date certe condizioni meteoriche, si osservano generalmente dalla spiaggia di Reggio Calabria e dai suoi dintorni, le immagini degli oggetti reali posti lungo il lato orientale della Sicilia e lungo la parte della costa Calabria che va dalla punta di Catona a Pentimele. Tali immagini nella circostanza in cui si presenta il fenomeno, si raddoppiano, si triplicano, o si deformano allungandosi o nel senso orizzontale o nel senso verticale. Le immagini talvolta si presentano molto al di qua dell'oggetto reale e più ingrandite, specialmente nel senso verticale, ma sopra la superficie del mare, come se fossero tanti altri corpi sollevati, regolari e distinti, i quali tuttavia non impediscono di vedere anche nei loro veri luoghi gli oggetti reali.

Altre volte si vedono porzioni del lido opposto cogli oggetti reali e contemporaneamente immagini sul mare che rappresentano ora isole, ora capi, ora istmi. Oppure si osservano gli oggetti reali al loro posto e le immagini di esse sospese in alto nell'aria; infine poi (e questo ogni volta che si presenta una delle accennate rappresentazioni) si vede all'inizio ed allo svanire del fenomeno una bianca nebbia fuggire velocemente.

Il verificarsi di una delle descritte condizioni costituisce il fenomeno comunemente detto della "Fata Morgana". Non é quindi da confondere con quelli di comune ed ordinaria riflessione sulle acque tranquille (come ritenevano e ritengono molti cittadini di Reggio che

---

<sup>11)</sup> Il fac-simile di questa Fata Morgana mi riesci facile farlo giacché i nominati spettatori, l'uno indipendente dall'altro, asseriscono di avere visto tre immagini, una sovrapposta all'altra, simili a quelle della fig. 4. Tali immagini non erano ugualmente distinti.

non l'hanno mai veduta), né con il fenomeno di Miraggio in genere.<sup>12)</sup> In questo gli oggetti reali si riproducono capovolti, in quello le immagini *si vedono sempre diritte*.

La "*Fata Morgana*" é tutta propria<sup>13)</sup> della città di Reggio per la sua posizione topografica (vedere fig.2) per la curvatura della costa, per il prospetto orientale della vicina Sicilia, per il mare che si frappone, per lo stretto del Faro, per i monti della Calabria e della Sicilia sovrastanti allo stretto e che gli fanno corona e per molte altre condizioni tutte particolari di questi luoghi.<sup>14)</sup>

Chiuderó questo mio studio col dire brevemente le condizioni meteoriche che fanno presumere l'avvenire del fenomeno. Esse sono:

a) Ore del mattino; trasparenza ottica in sommo grado dell'aria sovrastante il canale messinese la di cui superficie, specialmente verso la costa sicula, sará coperta da un leggerissimo e poco alto velo di nebbia: cielo purissimo; mare calmo, placido; temperatura assai elevata; aria calma o leggermente mossa da venti debolissimi di nord, affinché possa vedersi la *Fata Morgana marina* (cfr. 6).

b) Strato nebbioso in movimento formantesi sulla costa Sicula e sulla costa Calabra fin verso Catona; cielo puro o quasi puro; mare calmo od anche leggermento mosso; temperatura assai elevata; aria calma o leggermente mossa da venti debolissimi di nord; ore piú favorevoli dalle 10 alle 13 nell'epoca estiva; perché si possa vedere il fenomeno almeno parzialmente o in formazione, se non nel so bellissimo e straordinario aspetto, della *Fata Morgana aerea* semplice o multipla.

## APPENDICE

### Elenco alfabetico degli autori con un breve cenno critico delle opere consultate

AGRIPPA Cornelio: *De occulta philosoph.* dec. 10 lib.2<sup>0</sup>.

ALLEGGRANZA P.Giuseppe dell'ordine de' Predicatori: *Della Fata Morgana* - o sia - *Iride di Messina*. Opuscoli di autori siciliani Tomo I pag. 143. - Egli non ha mai veduto il fenomeno, riporta in parte quando disse il Kircher aggiungendo però che non condivide le

---

<sup>12)</sup> Nel presente lavoro non ho citato nessuno caso di Miraggio appunto perché era mia intenzione fermarmi ad illustrare solo il poco noto fenomeno della *Fata Morgana*, ma non voglio tralasciare di dire almeno in nota che fenomeni di Miraggio bellissimi e frequentissimi si hanno pure nel canale Messinese. Di questi ed altri fenomeni parleró in altro scritto a parte.

<sup>13)</sup> Secondo l'Herrera a Quito nell'America si vedono apparizioni che potrebbero ritenersi fenomeni simili alla *Fata Morgana*, come pure in Toletto e Nardó (Napoli) secondo il Mazzello; sopra il fiume di Gardempe vicinissimo alla città di Belac nel Limosino secondo il Mesnier; al lago d'Averno secondo il Ruffo; a Castel Gandolfo secondo il Minasi. Però tali immagini aeree furono isolatamente descritte dai soli autori citati e non confermate posteriormente, quindi é giustificata l'asserzione di cui sopra almeno fino a che non si confermi quanto fu visto nell'altipiano dell'Alaska pochi anni or sono.

<sup>14)</sup> La *Fata Morgana* non di rado si vede nella pianura del territorio di Mineo (prov. Catania), ove é il *Lago dei Pulici*, esalante anidride carbonica - Nota della Redazione.

sue idee nell'ammettere che il fenomeno avvenga per la formazione dei cristallini provenienti dai vapori ecc.

AMICO Ab: nelle sue note al Fazello.

ANONIMO: *La Fata Morgana* nella "Zagára" periodico religioso letterario in servizio della gioventú reggina 1871 Vol. II pag. 26 e segg. sotto il titolo: *Impressioni e reminiscenze di un artista*.

ANGELUCCI p. Lettera al p. Leone Sanzio scritta nel 1634 e riportata per primo dal Kircher a pag. 705 l.c.

APOLLOKIO-Argon lib.4 "Teti e le sue ninfe sollevano la nave con montagne d'acqua al disopra degli scogli; attirano sulla riva attoniti spettatori, mentre Giunone e Pallade si stringono assieme per la novità dell'evento. La nave pare campata in aria e solcare i vapori del cielo, e le Dee marine sono credute fantasmi aerei;..." riportata dal cav. Carbone-Griolo a pag.25 delle "Fonti mitiche e storiche dello Xiphias di Diego Vitrioli 1901".

ARCOVITO prof. Salvatore - *Sul fenomeno della Fata Morgana* - Giornale "La fata Morgana" n. 1 e 2 anno 1838.

ARISTOTELE De mirab. and de Meteor. lib. 3<sup>o</sup> (citato dal Gallo Andrea e dal Cacopardi).

BRINACIO Paolo napoletano, *Scintille poetiche o poesie sacre e morali*.

CACOPARDI-GROSSO Giuseppe: *La Fata Morgana* - nel giornale letterario del Gabinetto di Messina "Il Maurolico" Anno I, Tomo I, 1841 a pag. 196 - Ripete quanto ebbe a dire il Kircher e la spiega come lui senza aver preso visione del fenomeno.

CALINO Cesare: sopra il libro dei Re lib. I. pag. 112, 6<sup>o</sup> lezione nel 1723 riferisce quanto disse il Kircher.

CAMPAILLA Tommaso: Canto 8 stanze 49 e segg. *L'Adamo, ovvero il mondo creato* - Poema filosofico - Messina 1728.

CANALE prof. Alessandro: *Sulla spiegazione della Fata Morgana* - La Zagára (g.c. Anno 7 n.3 pag. 371).

CARNEVALE Giuseppe dottore in legge - *Historie et Descriptione del Regno di Sicilia* - Divise in due libri. In Napoli, appresso Horatio Salvioni 1591 Lib. II pag.171.

CAPOZZO Guglielmo - *Sul fenomeno della fata Morgana nello stretto di Messina* - Memorie su La sicilia Vol. I pag. 71 e 92 - Palermo 1840 - Esso non fa altro che riportare integralmente quanto dissero sull'argomento l'Angelucci, il Giardina, ed il Saffiotti.

CAPRI can. prof. filippo - *La Fata Morgana* nella Zagara (g.c.) Anno VI n. 22 a pag. 183 sotto il titolo "Cose Nostre".

CHIARELLO p. Benedetto - *Chimica filosofica, ovvero problemi naturali sciolti in uso morale* - in Messina Vincenzo d'Amico 1696 pag. 47 a pag. 56 - Prende argomento della Fata Morgana per fare un'insulsa chiaccherata; accenna a quanto ebbe a dire il Kircher che appella divin uomo(!).

CORSO dott. Diego da Nicotera - *Spiegazione della Fata Morgana*. La Zagára (g.c.) Anno VI n. 42 p. 341.

CUMBO Ignazio - *La maddalena liberata, poema eroico sacro* - Venezia P. Baglioni 1673, Ottave 24-25 del canto XVI.

DAMASCIO, nella vita d'Isidoiro filosofo rapportato dal Patriarca Fozio (citato dal Gallo Andrea) parla di sogni e di visioni nei sogni.

FAIELLO Tommaso - *Le due Deche dell'Histoire di Sicilia* - Divise in venti libri - Tradotte dal Latino in lingua Toscana dal P.M. Remigio Fiorentino. In Venezia appreso Domenico e giov. Battista Guerra - Anno 1573 pagg. 60-61.

GALLO Andrea messinese - Note al Discorso del P. Giardina - Opuscoli di autori Siciliani Tom. I p. 118 e 192. Riporta quanto già disse il Giardina e non aggiunge niente di nuovo, né di interessante.

GALLO Caio Domenico storico Ann. di Messina tom. I pag. 10 - Messina 1877 - Dichiara non averla vista, riporta la lettera dell'Angelucci e riferisce in prosa quanto disse in versi il Campailla.

GIANNETASII Nicolai Parthenii - *Opera Omnia Poetica* Tomo II - Nauticorum lib. V. - Neapoli, apud Berhad-Mich. Raillard 1715 - Morganae Rheginorum descriptio, pag. 164 a 167.

GIARDINA P. Domenico - *Discorso sopra la Fata Morgana di Messina comparsa nell'anno 1643* - Opuscoli di autori siciliani, Tomo I. pag. 137 a 148. In Catania presso di Gioacchino Pulejo. - In un lungo discorso ripete quanto già disse il Kircher, perdendosi in chiacchiere e non aggiungendo nulla di nuovo - Attesta di aver veduto un principio di Fata Morgana.

HOUEL, Jean, *peintre du Roi; de l'Academie des Beaux Arts d e Parme* - Tome II. A Paris - de l'impremerie de Monsieur - 1784 pag. 21-22 du Voyage Pittoresque des isle de Sicile, de Malta-et-de Lipari. Oú l'on traite des antiquités qui il s'y trouvent encore,-de principaux Phénomènes que la Nature y offre...ecc. - Non ha visto il fenomeno e lo descrive e spiega come il Kircher.

KIRCHER Athanas-*Ars magna lucis et umbrae*-in X libros digesta-Amsterdam-Apud Joannem laussonium á Waesberge - et Heredes Elisaei Weyerstraet Anno CICDXXI - Lib. X pars. II<sup>o</sup> cap. I. Parastasis I pag. 704 - Naturae sine de Morgana Rheginorum in Freto Mamertino rive Siculo.

LEONI Nicola - *Della Magna Grecia e delle Tre Calabrie*-ricercheetnografiche, etimologiche, topografiche, politiche ecc. - Vol. IV - Calabria meridionale - Napoli 1840 Cap. II - Del fenomeno "la Fata Morgana" pag. 13 a 22 - Riporta quanto scrisse l'Angelucci, il Varano, il Giardina ed il Saffiotti non aggiungendo nulla di nuovo.

MAZZELLO Scipione - In descriptione Regni Neapolit. fol. 117.

MESNIER Isaac - Prodigieuse forme de Processiome apparse proche la Ville de Belac en Limosin l'espace de six jours commençant les 15 Avril 1621 - Paris chez Isaac Mesnier 1621.

MINASI P. Antonio domenicano. Dissertazione prima *sopra un fenomeno volgarmente detto Fata Morgana*, o sia apparizione di varie, successive, bizzarre immagini, che per lungo tempo ha sedotti i popoli, e dato a pensare ai dotti. A sua eminenza il signor cardinale De Zelanda-In Roma MDCCLXXIII.

OMERO - II. I. 533 XVIII 35, 52-244.

PINDEMONTI Ippolito - Opere pag.394 - Napoli 1861

PIGNATARI Ab. Filippo Iacopo in una lettera scritta nel gennaio 1753 al signor Don Filippo d'Alessandria e pubblicata nel giornale "*Il Maurolico*" giornale di scienze lettere ed arti Messinese. Vol. IV-Fascicolo 3<sup>o</sup> - Gennaio 1840 - Dichiara non averla vista (la Fata Morgana) e confuta quanto disse il Kircher per svolgere in prosa quanto in versi disse il

Campailla.

PLINIO Natural, Hist. lib. 31 (citato dal Cacopardi) parla solamente della potenza e virtù delle acque in generale.

POLITI Marc'Antonio *Cronica della Nobil E Fedelissima Città di Reggio-In Messina*-Appresso Pietro Brea 1617 a pag. 18-19.

RAIMONDI Francesco *Idea teorica sul fenomeno della F. M.*-Appendice al Poliorama Pittoresco - Accenna dapprima a quanto disse il Minasi confutando le di lui asserzioni colle parole del Ruffo.

REGALDI Giuseppe *Apparizione della Fata Morgana il 20 Luglio alle ore 2 pom. 1843*-Nel giornale "La Fata Morgana Anno 3<sup>o</sup>, 1 agosto 1843 pag. 112.

REINA Placido. *Delle notizie Istoriche della città di Messina*In Messina 1658 p. 64 a 65-Quale storico accenna appena il fenomeno riportando quanto disse il Politi e ritenendo contrariamente al vero, che si vede dalla costa sicula.

RIBAUD Pietro: Trattato teorico pratico, istorico sulle correnti ed altri particolarità, e su i fenomeni che hanno luogo nel canale di Messina-Napoli presso Gabriele Masino 1824. Parte ottava pag. 109 a 117. Spettacolo fenomeno dell'Iride Mamertina, o Teatro Catottrico, o volgarmente Fata Morgana.

RUFFO Marchese Giuseppe: *Sulla Fata Morgana del Lago di Averno* - Memoria del Socio ordinario M. G. R. Letta nella tornata di 2 Dicembre 1833 - Ann. del Regno di Napoli fascicolo 7. 1834. L'A. ha veduto sul lago di Averno la mattina del 31 Marzo 1833 ad ore 7.30 una specie di Fata Morgana e prende occasione da questa osservazione per riportare quanto il Ribaud disse sul fenomeno che si osserva a Reggio Calabria. Crede erroneamente avvenire il fenomeno per riflessione come quello che ebbe a vedere sul Vesuvio l'anno 1824, simile allo spettro del monte Brocken della catena dell'Hartz nel regno di Annover, il quale spettro non é altro che l'ombra dell'osservatore proiettata sulla nebbia.

SAFFIOTTI Avv. Michele: *Lettera intorno al fenomeno Fata Morgana* - All'illustre Niccola Niccolini Ed. seconda - Napoli. Dalla tipografia solita Infrascata 1837. Sugli scritti dell'Angelucci, del Giardina, del Ribaud e specialmente del Minasi tesse una lunga dissertazione sul fenomeno non emettendo, nessuna idea nuova; aggiunge che il 26 aprile 1828 verso le ore 9 circa fu visto da persone degne di fede.

SAMPERI R.P. Placidi Messana S.P.Q.R Regumque Decreto-Nobile Exemplari-Et-Regni Siciliae-Caput Duodecim Titubus Illustrata-Opus Posthumum Messanae 1742. 1, II. pag.72-Riporta quanto disse il Fazello. SCHOTTI P. Gasparis: *Magia Universalis naturae et artis ecc.* Bamberge-sumpt Ioh, Martini Schonwetteri-Bibliopolae Francofurtensis M.D.C. LXXVII-Pars I lib. IV pag. 173 a 181. Riporta la lettera dell'Angelucci e molte cose già dette dal Kircher; poco o nulla aggiunge del suo non avendo visto il fenomeno.

VARANO Alfonso - *Visioni sacre e morali* - Parma, dalla Stamp. Reale - 1789.

VITRIOLI Alfonso: *Fata Morgana e poesia riportata dall'Iride Marmertina* diretta dal prof. F.I.Giuffré Anno II N. 4 Messina-Reggio 16 Febbraio 1899.

VITRIOLI Diego, figlio di Tommaso, accenna alla Fata Morgana, con versi latini, nello "Xiphias".



**B) - Scienza Araba della luce:  
La nascita dell'ottica moderna e del metodo sperimentale<sup>1)</sup>**

---

Un millennio fa, il mondo ha assistito a una grande rivoluzione attraverso il campo dell'ottica. Lo studio della Luce, libero da postulati e metodi assiomatici, fatto dallo studioso arabo Ibn-Al-Haytham ha segnato la nascita del metodo sperimentale con i suoi protocolli osservativi e analitici, e con l'uso della matematica per formalizzarli. Questa rivoluzione ha portato al risveglio delle scienze in Europa durante il Medioevo fino al Rinascimento.

---

Un millennio fa, i lavori dello studioso arabo **Al Hasan Ibn Al Haytham**<sup>2)</sup> rappresentarono una rivoluzione nel campo dell'Ottica che si sarebbe propagata gradualmente nell'Europa medievale, ma cosa più importante, rappresentano la nascita del metodo sperimentale così come gli scienziati lo praticano da allora.

Gli antichi Greci erano più interessati al fenomeno della Visione piuttosto che alla natura della Luce. Le loro teorie possono essere ampiamente classificate in: teorie di Extraemissione, specificamente attribuite a Euclide (325-265,a.C.) e alla Scuola matematica di Alessandria , in particolare a Claudio Tolomeo (100-170, d.C.), che richiedeva che i raggi visivi o particelle illuminanti siano emessi dall'occhio. Euclide stabiliva le leggi della riflessione e la sua Ottica è basata principalmente sul concetto di raggi visivi che si propagano in linea retta, il cono virtuale, con l'occhio come sua origine ed i contorni dell'oggetto osservato come la sua base e l'angolo visivo formato dai raggi che raggiungono i suoi bordi.

Le teorie dell'intraemissione, il cui principale difensore era Aristotele (384-322 a.C.), postulavano che l'oggetto inviava continuamente repliche microscopiche di se stesso che viaggiano fino all'occhio. Esse evitano alcuni ovvi problemi della teoria dell'extraemissione, ad es. che gli oggetti vicini e lontani siano simultaneamente visibili nel momento in cui l'occhio viene aperto. Un terzo approccio, difeso da Platone (Atene, 428/427 a.C. - Atene, 348/347 a.C.) e Galeno<sup>3)</sup> e in una certa misura anche da Aristotele, proponeva che la luce emessa dall'occhio interagisca in qualche modo con l'aria interposta e le suddette repliche. Tutte queste teorie, che hanno prevalso fino alla fine del primo millennio d.C., dividevano la premessa fondamentale che il contatto fisico tra occhio e oggetto fosse necessario per la visione.

La caduta dell'impero romano nel 476 e l'avvento dell'Islam (570-632) rappresentarono grandi eventi sociali e politici che avrebbero trasformato profondamente la Conoscenza e il Pensiero. La rapida espansione dell'Islam, prima sotto la dinastia degli Omayyadi con Damasco come capitale, poi dal 750 al 1250 sotto la dinastia degli Abbasidi con Baghdad

---

<sup>1)</sup> A. Boudrioua, M. Chergui and R. Rashed - Europhysicsnews 51/3, 2020, pag. 14.

<sup>2)</sup> Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham, conosciuto nell'Europa medioevale con il nome di Alhazen (Bassora, Iraq, 965 circa - Il Cairo, 1040 circa).

<sup>3)</sup> Galeno di Pergamo (Pergamo, Turchia, 129 d.C. - Roma, 201 circa d.C.) è stato un medico greco antico, i cui punti di vista hanno dominato la medicina occidentale per tredici secoli fino al Rinascimento.

come capitale, avrebbe portato a profondi cambiamenti nello sviluppo delle idee. Nel 786, Haroun Al Rashid divenne califfo in Baghdad ed iniziò una intensa attività intellettuale segnata dalla traduzione di testi Greci. Suo figlio, Al Mamun (813-833) creò in Baghdad uno dei primi centri di ricerca scientifica in Storia, il famoso Beit al-Hikman (House of Wisdom, trad. Casa della Saggezza). Prevalse una frenetica attività intellettuale con la traduzione, lo studio e il commento dei testi di greci, persiani, indiani, ecc., in un clima di apertura e rispetto verso tutte le religioni (Musulmani, Cristiani, Ebrei, Zoroastriani, Sabei, etc) e origine (Arabi, Persiani, Greci, etc). Questo è esemplificato da Hunayn Ibn Ishaq (808-873), un cristiano nestoriano, trilingue (arabo, siriano e greco) che era una autorità nella traduzione di lavori greci e un grande studioso. Egli scrisse un trattato sull'occhio e fra le altre scoperte, ha determinato che l'organo sensibile del cristallino si trova al suo centro. Durante questo periodo, tre studiosi principali sono emersi nello sviluppo dell'ottica come scienza: **Yaqub Ibn Ishaq Ibn Sabah Al Kindi (801-873)**, **Al-Alla Ibn Sahl (940-1000)**, e **Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al Haytham<sup>2)</sup>**.

**Al-Kindi** ha modificato la teoria dell'extraemissione di Euclide considerando i raggi visivi come stampe tridimensionali prodotte dall'oggetto osservato. Due importanti manoscritti teorici e sperimentali scritti dal matematico di Bagdad Ibn Sahl sono stati scoperti tre decenni fa a Damasco e Teheran dallo storico della scienza Roshdi Rashed, che li ha analizzati in grande dettaglio.<sup>4),5),6)</sup> Essi riferiscono, tra gli altri, metodi meccanici di trafilatura continua di coniche. Ibn-Sahl non considerava solo specchi ustori<sup>7)</sup> (curvi), ma lenti. Egli contribuì alla prima descrizione matematica di lenti ustori, incluse lenti piane, convesse e biconvesse. Questo lo ha portato a considerare il problema della rifrazione della luce, che ha trattato per una superficie piana che separa due mezzi, portando alla formulazione della legge di rifrazione cinque secoli prima di **Willebrord Snell** e **Renè Descartes**.

Il disegno della figura 1 riproduce la legge di rifrazione. Ibn Sahl si riferisce al rapporto tra le lunghezze:  $DB/DA$ , che egli afferma è una costante per il cristallo, e lo riconosce come il rapporto dei seni degli angoli rifratti ( $\theta_R$ ) e incidenti ( $\theta_i$ ), e quindi il rapporto degli

---

<sup>4)</sup> R. Rashed, Isis 81,464 (1990).

<sup>5)</sup> R. Rashed, Optique et mathematiques, Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe, (1994).

<sup>6)</sup> R. Rashed, Science 297, 773, (2002).

<sup>7)</sup> Gli specchi ustori (o brucianti, in inglese burning) sono specchi in grado di concentrare i raggi paralleli provenienti dal Sole in un punto, detto fuoco dello specchio.

indici di rifrazione.

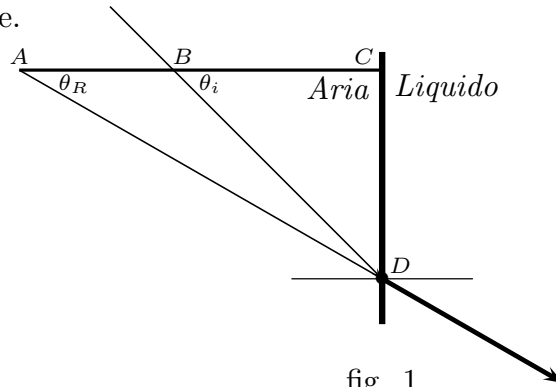


fig. 1

I lavori di cui sopra hanno aperto la strada alla grande rivoluzione scientifica iniziata da **Ibn al-Haytham** (noto come **Alhazen** o Alhacen nell'Europa medievale). Nato a Bassora (Iraq), egli trascorse la maggior parte del suo tempo al Cairo, sotto il regno del califfo Fatimid al-Hakim, che mostrò un forte interesse per la scienza e la filosofia. Alhazen ha lavorato presso la famosa Università Al-Azhar, allora un importante centro di ricerca accademica. egli ha lasciato quasi 100 titoli, in matematica, ottica, astronomia, filosofia, astrologia, statica e idrostatica e varie altre materie. Il suo principale risultato è il 'Kitab Al Manazir' (Libro di Ottica), che rappresenta una rivoluzione nella scienza. Infatti, per la prima volta, le condizioni della propagazione della luce e quelle della visione vengono separate. La luce diventa un oggetto fisico e l'ottica non è più una "geometria della percezione". Alla base di questo sviluppo c'è il legame che ha stabilito per la prima volta, tra matematica e fenomeni naturali: *"Il nostro argomento è oscuro e la via che conduce alla conoscenza della sua natura è difficile; inoltre la nostra ricerca richiede una combinazione delle scienze naturali e matematiche"*. Questo metodo va ben oltre l'ottica e mira *"a inventare i mezzi e le procedure per applicare la matematica alle idee dei fenomeni naturali"*.

Ibn-Al-Haytham ha introdotto nuovi concetti, come: raggi di luce e fasci di luce come un insieme di linee dritte che si propagano indipendentemente l'una dall'altra, a una velocità molto alta ma finita, o che l'incidenza della luce sulla materia crea riflessione. Egli ha spiegato la rifrazione in base al fatto che la velocità della luce venga influenzata dalla densità del mezzo. Egli ha anche introdotto la descrizione vettoriale della propagazione della luce.

*Kitab Al Manazir* è il primo vero libro di testo scientifico, che combina esperimenti con convalida matematica. È una serie di libri che trattano argomenti specifici riguardanti la luce. Lo storico della scienza, Abdelhamid I. Sabra, ha curato la prima versione critica in arabo dei primi 3 libri e la loro traduzione in inglese, e Roshdi Rashed ha pubblicato l'edizione critica di parti del 7<sup>o</sup> libro. I libri I e III sono dedicati alla teoria della visione, alla fisiologia dell'occhio e alla psicologia della percezione. Viene presentato il modello di visione corretto: una ricezione passiva da parte dell'occhio dei raggi riflessi dagli oggetti, ma anche spiegazioni fisiologiche della percezione visiva e delle illusioni ottiche. I libri da IV a VII contengono una formulazione completa delle leggi della riflessione e un'indagine dettagliata sulla rifrazione, inclusi esperimenti che coinvolgono angoli di incidenza e deviazione. Essi contengono anche il *"problema di Alhazen"*, che consiste nel determinare il punto di riflessione da una superficie piana o curva, dato il centro dell'occhio e il punto osservato, e viene

risolto per mezzo di sezioni coniche. Altre opere ottiche includono Daw 'al-qamar ("Sulla luce della Luna"), al-Halawa-qawzah ("Sull'effetto Alone e l'Arcobaleno"), Surat-al-kusuf ("Sulla forma dell'Eclissi") e al-Daw ' ("Discorso sulla Luce"). Questo ultimo presenta una discussione su illusioni ottiche, percezione visiva, arcobaleni, densità atmosferica, vari fenomeni celesti (l'eclissi, il crepuscolo e il chiaro di luna), la rifrazione, la catottrica, la diottria, gli specchi sferici e parabolici, ecc.

Dando ascesa alle osservazioni piuttosto che al postulato, dissociando l'oggetto fisico dalla percezione e dalla formalizzazione matematica delle osservazioni, **Ibn-Al-Haytham** ha introdotto il linguaggio matematico (e la sua logica intrinseca) come elemento strutturante della scienza.

*Kitab Al Manazir* ha una profonda influenza sul lavoro di molti studiosi fino al Rinascimento. La prima traduzione in latino fu di Gerardo da Cremona (1114-1187) con il titolo *Perspectiva*. Il monaco della Slesia Erazmus Ciolek Witelo (1230-1292) sosterrà attivamente le opere e le idee di Ibn-Al-Haytham in Europa. John Peckham (1230-1292) ha scritto un manuale per l'insegnamento dell'ottica, ispirato da *Kitab Al Manazir*. Quattordici traduzioni di quest'ultimo sono identificate in Europa, sei delle quali in Gran Bretagna. L'ultima versione sarà pubblicata nel 1572 da Friedrich Risner a Basilea, oltre cinque secoli dopo la morte di Ibn Al Haytham. Il metodo sperimentale sarà solo in seguito completamente formalizzato da **Francis Bacon** (York House, London, U.K., 1561 - Highgate, London, U.K., 1626) con il *Novum Organum* e **Renè Descartes** (1596-1650) con *Le discours de la Methode*. Infine, il lavoro di Ibn-Al-Haytham in ottica influenzerà anche l'attività artistica fino al XVII secolo, poichè rimase un riferimento nella pittura grazie alle sue opere sulla prospettiva. Le sue scoperte sono invocate anche nei romanzi medievali più celebri: *Le Roman de la Rose* (Guillaume de Lorris and Jean de Meun) e *The Canterbury Tales* (Geoffroy Chaucer).

**La conoscenza non è mai stata il prodotto di un singolo gruppo, civiltà o paese. È un processo trasformativo caratterizzato da un flusso continuo di idee, esalazioni, sperimentazioni e razionalizzazioni che si muovono nel tempo e nello spazio. L'ascesa della scienza in Europa a partire dal Rinascimento fa parte di questo flusso e non può essere dissociata da ciò che l'ha preceduta durante gli otto secoli della civiltà araba.**