

Cap. 21

Magnetoidrodinamica

21.1 - Introduzione

La branca della fisica conosciuta come **Magnetoidrodinamica** (MHD acronimo di **MagnetoHydroDynamics**) o più in generale come **Magnetofluidodinamica** (MFD) studia il moto di un fluido elettricamente conduttore immerso in un campo magnetico.

Le correnti elettriche indotte nel fluido per effetto del moto modificano il campo, mentre per la presenza di questo si determinano forze che influiscono variamente sul moto stesso. Questa mutua azione fa insorgere fenomeni, detti magnetofluidodinamici, non contemplati nello elettromagnetismo o nella fluidodinamica. Associando le equazioni che caratterizzano queste due ultime branche della fisica, si ottengono quelle che regolano i fenomeni della magnetofluidodinamica, considerati sotto l'aspetto continuo. La teoria è detta anche magnetoidrodinamica o idromagnetismo nel caso di un liquido, magnetogasdinamica nel caso di un fluido compressibile, magnetoplasmadinamica nel caso di un plasma.¹⁾

I fenomeni magnetofluidodinamici svolgono un ruolo fondamentale nel cosmo. Poiché le stelle consistono in gran parte di materia ionizzata, quindi elettricamente conduttrice, la MHD regola molti dei processi che vi avvengono. La MHD è anche importante per lo studio della radiazione cosmica, della ionosfera e della magnetosfera terrestre (e dei fenomeni a questa connessi come le aurore polari e le tempeste geomagnetiche).¹⁾

Essa è stata inventata dall'astrofisico e ingegnere svedese, **Hannes Olof Gösta Alfvén**²⁾ che, tra gli altri successi, è stato il primo (con N. Herlofson) nel 1950³⁾ a rivelare e identificare radiazione non termica (di sincrotrone⁴⁾) proveniente dal cosmo, fu il primo nel 1963 a prevedere la natura filamentosa su larga scala dell'universo, ed è **universalmente considerato l'inventore e padre di MHD per cui ha vinto (in condivisione con il fisico francese Louis Néel) il premio Nobel per la Fisica nel 1970.**⁵⁾

Quando la sua teoria che prevedeva l'esistenza di ciò che oggi sono conosciute come **Onde di Alfvén** fu pubblicata per la prima volta, essa fu accolta con notevoli critiche e derisioni. Era la prima volta che qualcuno suggeriva che onde elettromagnetiche di qualsiasi tipo potessero essere sostenute da un conduttore medio (ed esattamente opposto a quanto presunto "ovvio" dai tempi di Maxwell, vale a dire che tutti i conduttori attenuano le onde elettromagnetiche al loro interno) e commenti come "Se una cosa del genere fosse possibile,

¹⁾ Enciclopedia Treccani alla voce Magnetofluidodinamica.

²⁾ Hannes Olof Gösta Alfvén: Norrköping, Sweden 30 Maggio 1908 - Danderyd, Sweden 2 Aprile 1995.

³⁾ H. Alfvén and N. Herlofson: Cosmic Radiation and Radio Stars - Phys. Rev. 78, 616, Published 1 June 1950.

⁴⁾ S.Barbarino: Appunti di Campi elettromagnetici pag.12.35.

⁵⁾ David A. Clarke: A primer on Magnetohydrodynamics (mhd-primer) - February, 2015, Web.

lo stesso Maxwell lo avrebbe scoperto" era spesso il modo in cui le idee di Alfvén venivano respinte. Si dice che alla fine del 1950 mentre teneva una delle sue lezioni all'Università di Chicago, niente meno che Enrico Fermi fu sentito da tutti dire "Certo!", a quel punto il ridicolo cessò. Tuttavia, il vero trionfo di Alfvén avvenne nel 1958, quando le onde di Alfvén furono indiscutibilmente rilevate in laboratorio. Fu da quel momento che MHD divenne improvvisamente parte del "mainstream physics", al punto da essere considerata "ovvia"! ⁵⁾

MHD è un esempio della fisica classica, e che questo avvenne 35 anni dopo l'avvento della meccanica quantistica prima che i fisici cominciarono a familiarizzarsi con essa è un fatto storico anomalo. Nonostante il suo carattere classico, l'MHD è una branca relativamente nuova della fisica. ⁵⁾

La magnetoidrodinamica è una branca della fluidodinamica che studia il movimento di un fluido elettricamente conduttore immerso in un campo magnetico.

Già nel mese di Gennaio del 1832 Michael Faraday tentò di studiare il movimento delle acque del fiume Tamigi immerse nel campo magnetico terrestre.

Nel primo volume dei suoi libri "Experimental researches in electricity", alle pagine 55 ÷ 56 si legge: ⁶⁾

§188. Sebbene l'elettricità ottenuta per induzione magnetoelettrica in pochi piedi di filo sia di piccola intensità, e non sia stata ancora osservata se non nei metalli e nel carbonio in uno stato particolare, ha tuttavia il potere di passare attraverso l'acqua salata (§23); e, poichè la maggiore lunghezza della sostanza su cui si agisce produce un aumento di intensità, speravo di ottenere effetti da estese masse d'acqua in movimento, sebbene l'acqua quiescente non ne producesse. Feci quindi esperimenti (per preferenza) al Waterloo Bridge, stendendo un filo di rame lungo novecentosessanta piedi (292.8 metri) sul parapetto del ponte, e facendo cadere dalle sue estremità altri fili con estese piastre di metallo attaccate ad essi per completare con l'acqua. Così il filo e l'acqua formavano un circuito conduttore; e come l'acqua diminuiva o scorreva con la marea, speravo di ottenere correnti analoghe a quelle della palla di ottone (§161.).

§189. Ottenevo costantemente deflessioni al galvanometro, ma erano molto irregolari, e furono, in successione, deferite ad altre cause oltre a quella ricercata. La diversa condizione dell'acqua quanto alla purezza sulle due sponde del fiume; la differenza di temperatura; lievi differenze nelle piastre, nella lega utilizzata, nel contatto più o meno perfetto realizzato mediante torsione o altro; tutti gli effetti prodotti a loro volta; e sebbene avessi sperimentato sull'acqua che passava solo attraverso gli archi centrali; piastre usate di platino invece che di rame; e presi ogni altra precauzione, dopo tre giorni non potei ottenere alcun risultato soddisfacente.

§190. In questo senso sembra una conseguenza necessaria che dove scorre l'acqua ivi si formino correnti elettriche: ad esempio, se si immagina una linea che va da Dover a Calais attraverso il mare, e ritornando attraverso la terra sommersa fino a Dover, si traccia un circuito di materia conduttrice, una parte della quale, quando l'acqua si muove

⁶⁾ Michael Faraday: *Experimental Researches in Electricity*, Second Edition 1849, Cambridge University Press, 2012.

su o giù per il canale, taglia le curve magnetiche della terra, mentre l'altra è relativamente a riposo. Questa è una ripetizione dell'esperimento del filo (§171.), ma con conduttori peggiori. Tuttavia ci sono tutte le ragioni per credere che la corrente elettrica scorra nella direzione generale del circuito descritto, in un modo o nell'altro, a seconda che il passaggio dell'acqua avvenga su o giù per il canale. Dove l'estensione laterale dell'acqua in movimento aumenta enormemente, non sembra improbabile che l'effetto diventi sensibile; e la Corrente del Golfo può così, forse, dalle correnti elettriche che la attraversano, per induzione magnetoelettrica dalla terra, esercitare un'influenza sensibile sulle forme delle linee di variazione magnetica.

Teoricamente, anche una nave o una barca quando passa sulla superficie dell'acqua, alle latitudini settentrionali o meridionali, dovrebbe essere attraversata da correnti elettriche direttamente lungo la linea del suo movimento; o se l'acqua scorre oltre la nave all'ancora, dovrebbero verificarsi correnti simili.

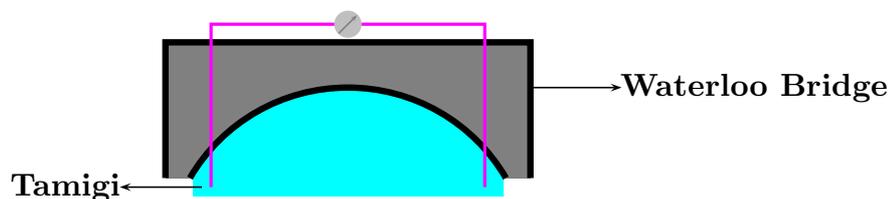


fig.21.1-1

§191. Sebbene non siano stati ancora ottenuti risultati positivi dall'azione della terra sull'acqua e sui fluidi acquosi, tuttavia, poichè gli esperimenti sono molto limitati nella loro estensione e poichè tali fluidi producono correnti mediante magneti artificiali (§23.), (poichè il trasferimento della corrente è la prova che essa può essere prodotta (§213.)), la supposizione fatta che la terra produce in sé queste correnti indotte (§181.) in conseguenza della sua rotazione diurna, è ancora altamente probabile (§222.,§223.); e se si considera che le masse in movimento si estendono per migliaia di miglia attraverso le curve magnetiche, tagliandole in varie direzioni all'interno della sua massa, così come in superficie, è possibile che l'elettricità possa raggiungere un'intensità considerevole.

21.2 - Conduttori liquidi^{1),2)}

Se un conduttore liquido è posto in un campo magnetico costante, ogni moto del liquido dà origine ad una f.e.m. che produce correnti elettriche. L'interazione fra il campo magnetico e queste correnti causa forze meccaniche che cambiano lo stato di moto del liquido.

Quindi l'applicazione di un campo magnetico a un conduttore liquido provoca una reciproca interazione tra moto idrodinamico e corrente elettrica. Così l'energia cinetica può essere convertita in energia elettromagnetica e viceversa. Questo meccanismo rende

¹⁾ Hannes Alfvén: Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves - Nature, No 3805, 3 Ottobre 1942, pag.405.

²⁾ Hannes Alfvén: On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves - Arkiv för Matematik, Astronomi Och Fysik. Band 29 B. N:o 2, 1942.

possibile l'esistenza di una sorta di combinato onda elettromagnetica-idrodinamica, che per quanto ne so - non ha ancora attirato l'attenzione.¹⁾

Scriviamo le equazioni di Maxwell riferite ad un sistema di riferimento inerziale. La corrente di spostamento $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ sia trascurabile rispetto alla densità della corrente di conduzione \vec{J} .

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (21.2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (21.2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (21.2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho. \quad (21.2.4)$$

dove $\vec{B} = \mu \vec{H}$, \vec{H} è l'intensità del campo magnetico, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, \vec{E} è l'intensità del campo elettrico; ρ denota la densità di carica elettrica libera e \vec{J} a densità della corrente elettrica. La permeabilità μ e la permittività ϵ sono presi come appartenenti al libero spazio, ossia:

$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Henry} \cdot \text{metro}^{-1}; \quad \epsilon = (36\pi \cdot 10^9)^{-1} \text{ Farad} \cdot \text{metro}^{-1}, \quad (21.2.5)$$

e

$$\epsilon\mu = \frac{1}{c^2}, \quad (21.2.6)$$

essendo c la velocità della luce nel vuoto e avendo omesso l'usuale suffisso zero su μ e ϵ . In tutte queste equazioni tutti i vettori e gli scalari sono "collettivi", cioè essi sono considerati quantità su larga scala mediate su regioni grandi rispetto alla scala delle fluttuazioni casuali.

Trasformiamo le formule predette rispetto ad un sistema di riferimento in moto con un elemento fluido; per questo applichiamo le formule di trasformazione dei campi date nel capitolo 1, ossia le formule 1.21.25 a pag. 1-97, 1.21.27 e 1.21.28 a pag.1-98. Supponiamo velocità piccole rispetto alla velocità della luce (ossia $\gamma \simeq 1$) e quindi i campi trasformati si possono scrivere in forma compatta facile da verificare:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2, \quad (21.2.7)$$

Analogamente per la formula 1.23.36 a pag.1-105 e tenendo conto che $\vec{J} = \mu\rho\vec{v}$, sempre per $\gamma \simeq 1$ si ha:

$$\rho' = \rho - \frac{\vec{v} \cdot \vec{J}}{c^2}, \quad \vec{J}' = \vec{J} - \rho\vec{v}, \quad (21.2.8)$$

Le quantità accentate sono misurate nel sistema di riferimento in moto. È necessaria un'altra equazione per completare le equazioni elettromagnetiche, ossia la legge della conduzione. In un conduttore stazionario la legge di Ohm stabilisce che:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (21.2.9)$$

essendo σ la conducibilità elettrica. Nel trasformare in un sistema di riferimento mobile, occorre ricordare che la conducibilità dipende dallo stato locale del fluido conduttore e quindi deve essere valutata nel sistema di riferimento mobile. La legge di Ohm modificata è quindi:

$$\vec{J}' = \sigma \vec{E}' = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (21.2.10)$$

In magnetoidrodinamica noi ci occupiamo di fluidi conduttori con conduttività molto grande, anche se le correnti sono limitate. Segue dall'equazione (21.1.10) che, poichè σ è molto grande, \vec{E}' deve essere molto piccolo, cioè il campo elettrico in un sistema di riferimento in moto con velocità importante è molto prossimo allo zero. Così noi abbiamo $\vec{E}' = 0$, da cui:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (21.2.11)$$

Allora, sostituendo la (21.2.11) nella seconda equazione (21.2.7), si ottiene:

$$\vec{B}' = \vec{B} + \mu\epsilon\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (21.2.12)$$

Per la relazione vettoriale (vedi Formulario):

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (21.2.13)$$

la (21.2.12) si scrive:

$$\vec{B}' = \vec{B} + \mu\epsilon\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{B}) - \mu\epsilon\vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (21.2.14)$$

Essendo $\mu\epsilon = \frac{1}{c^2}$, il secondo e il terzo termine del secondo membro sono trascurabili rispetto al primo termine; ne segue che la (21.2.7) si può approssimativamente scrivere:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B}, \quad (21.2.15)$$

Queste equazioni devono essere combinate con l'equazione di Eulero della idrodinamica:³⁾

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\delta} \vec{\nabla} p + \vec{J} \times \vec{B}. \quad (21.2.16)$$

Equazione di Eulero

in presenza di

Campo magnetico

³⁾ Sebastiano Barbarino: Appunti di Fisica I, Capitolo 9, pag.9-3, eq.(9.2.6).

dove δ denota la densità di massa del liquido e p la pressione idrostatica. Se inoltre supponiamo che il liquido sia incompressibile, poniamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (21.2.17)$$

e, quindi la formula di Eulero (21.2.16) diventa:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\delta} \vec{\nabla} p + \vec{J} \times \vec{B}.$$

**Equazione di Eulero
in presenza di
Campo magnetico per
liquidi incompressibili**

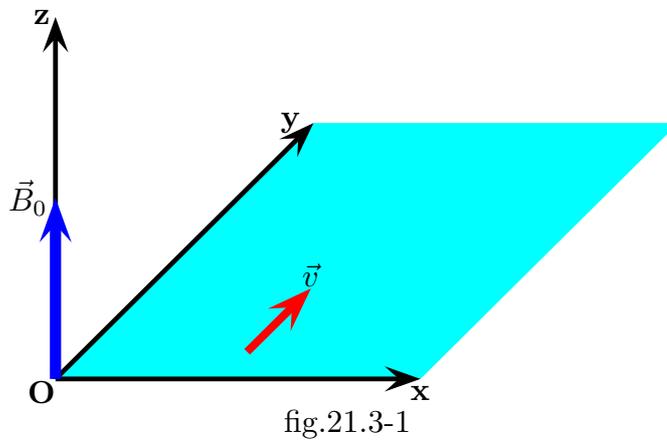
(21.2.18)

21.3 - Onde elettromagnetiche idrodinamiche

Per studiare il fenomeno sotto le più semplici condizioni possibili, supponiamo che il campo magnetico primario H_0 sia omogeneo e parallelo all'asse z di un sistema di coordinate ortogonali, la conduttività σ sia infinita, e δ è costante.

Il campo magnetico \vec{H} è costituito dal campo primario H_0 e dal campo H' che è causato dalla densità di corrente \vec{J} . Al fine di studiare un'onda piana nella direzione di H_0 , assumiamo che tutti i vettori siano indipendenti da x e y (ma dipendono da z e dal tempo t).

Consideriamo, allora, il seguente sistema di riferimento:



La densità di corrente superficiale è allora:

$$\vec{J} = \vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \hat{x} v_y B_0 \quad (21.3.1)$$

Ne consegue:

$$J_y = J_z = 0 \quad (21.3.2)$$

Allora il primo membro dell'equazione (21.2.1) diventa:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(z,t) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x(z,t) & H_y(z,t) & H_z(z,t) \end{vmatrix} = -\hat{x} \frac{\partial H_y'(z,t)}{\partial z} + \hat{y} \frac{\partial H_x'(z,t)}{\partial z} \quad (21.3.3)$$

Ne segue, inoltre, $H_z = \text{costante} = H_0$.

Dalle (21.31), (21.3.2) e (21.3.2) troviamo allora:

$$\begin{cases} J_x = -\frac{\partial H_y'(z,t)}{\partial z} \\ J_y = J_z = 0 \\ H_x' = \text{costante} = 0 \\ H_z = H_0 \end{cases} \quad (21.3.4)$$

Tenendo conto che:

$$\vec{J} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ J_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{y}(-J_x B_z) + \hat{z}(J_x B_y) \quad (21.3.5)$$

l'equazione (21.2.18) può essere così esplicitata:

$$\begin{aligned} \hat{x} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \hat{y} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \hat{z} \frac{\partial v_z}{\partial t} = \\ = -\frac{1}{\delta} \hat{x} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\delta} \hat{z} \frac{\partial p}{\partial z} + \hat{y}(J_x B_z) - \hat{z}(J_x B_y) \end{aligned} \quad (21.3.6)$$

Poichè $v_z = 0$ anche $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ e, quindi, l'equazione (21.3.6) si scrive:

$$\hat{x} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \hat{y} \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\delta} \hat{x} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial y} + \hat{y}(J_x B_z) \quad (21.3.7)$$

Dalla (21.1.7) segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \implies v_x = \text{costante} = 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\mu_0 H_0 \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} \\ v_z = 0 \end{cases} \quad (21.3.8)$$

Inoltre:

$$\frac{dp}{dz} = \mu H_y \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} \quad (21.3.9)$$

Alla luce di questi risultati il termine $\vec{v} \times \vec{B}$ nella (21.1.5) si sviluppa:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & \mu H_y & \mu H_0 \end{vmatrix} = \hat{x} \mu v_y H_0 \quad (21.3.10)$$

Poichè \vec{J} è finita, per la (21.2.5) si ha:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \mu H \quad (21.3.11)$$

che, per la (21.3.10), diventa:

$$\begin{cases} E_x = -\mu v_y H_0 \\ E_y = E_z = 0 \end{cases} \quad (21.3.12)$$

Per la (21.1.2) risulta:

$$\vec{\nabla} \times \hat{x}(-\mu v_y H_0) = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (21.3.13)$$

Eaando:

$$\vec{\nabla} \times \hat{x}(-\mu v_x H_0) = -\mu H_0 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & v_y & 0 \end{vmatrix} = -\mu H_0 \left(\hat{x} \frac{\partial v_y}{\partial z} - \hat{z} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (21.3.14)$$

l'equazione (21.3.13) si scrive:

$$-\mu H_0 \left(\hat{x} \frac{\partial v_y}{\partial z} - \hat{z} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (21.3.15)$$

Dalla prima delle (21.2.12) risulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\mu} \frac{1}{H_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (21.3.16)$$

Quindi la (21.3.15) diventa:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (21.3.17)$$

Per la prima delle (21.3.16), la (21.3.17) si scrive:

$$H_0 \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (21.3.18)$$

Derivando parzialmente rispetto al tempo, si ha:

$$H_0 \frac{\partial^2 v_y}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad (21.3.19)$$

Dalla (21.3.8) segue che:

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial t} = -\mu_o H_0 \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial z^2} \quad (21.3.20)$$

Sostituendo nella (21.3.19), si ottiene:

$$\frac{\partial^2 H'_y}{\partial t^2} = \frac{\mu_o H_0^2}{\delta} \frac{\partial^2 H'_y}{\partial z^2}.$$

**Equazione
d'onda** (21.3.21)

L'equazione (21.3.21) è l'equazione di un'onda elettromagnetica che si propaga lungo l'asse z con velocità:

$$V = \frac{\sqrt{\mu} H_0}{\sqrt{\delta}}.$$

**Velocità di
propagazione** (21.3.22)

La velocità dell'onda elettromagnetica-idrodinamica è indipendente sia dalla frequenza che dall'ampiezza.

Onde di questo tipo possono essere importanti in fisica solare. Poichè il Sole ha un campo magnetico generale, e poichè la materia solare è un buon conduttore, la condizione per l'esistenza di onde elettromagnetiche idrodinamiche sono soddisfatte. Se in una regione del Sole noi abbiamo $H_0 = 15 \text{ gauss}$ e $\delta = 0.005 \text{ gm} \cdot \text{cm}^3$, la velocità dell'onda è:

$V \sim 60 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}.$

**Velocità di
propagazione** (21.3.23)
nel Sole

Questa è circa la velocità con la quale la zona delle macchie solari si muove verso l'equatore durante il ciclo delle macchie. I valori sopra indicati di H_0 e δ si riferiscono ad una distanza di circa 10^{10} cm al di sotto della superficie solare dove la causa originale delle macchie solari può essere trovata. Così è possibile che le macchie solari sono associate a una perturbazione magnetica e meccanica che si manifesta come un'onda elettromagnetica e idrodinamica.

21.4 - Soluzione dell'equazione delle onde elettromagnetiche-idrodinamiche¹⁾

Consideriamo l'equazione (21.3.21). Se noi poniamo (omettendo l'apice):

$$H_y = A \sin \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \quad (21.4.1)$$

Riscriviamo la (21.3.18):

$$H_0 \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (21.3.18)$$

$$H_0 \frac{\partial v_y}{\partial z} = A \omega \cos \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \quad (21.4.2)$$

da cui:

$$v_y = \frac{A \omega}{H_0} \int \cos \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) dz \quad (21.4.3)$$

ossia:

$$v_y = \frac{A \omega}{H_0} \left(-\frac{V}{\omega} \right) \sin \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \quad (21.4.4)$$

In definitiva:

$$v_y = -\frac{AV}{H_0} \sin \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \quad (21.4.5)$$

Riscriviamo la prima equazione delle (21.3.3):

$$J_x = -\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} \quad (21.4.6)$$

ossia:

$$J_x = \frac{A \omega}{V} \cos \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \quad (21.4.7)$$

Riscriviamo la 21.3.17:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (21.3.17)$$

ossia:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu A \omega \cos \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \quad (21.4.8)$$

Integrando rispetto a z si ottiene:

$$E_x = \mu AV \sin \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \quad (21.4.9)$$

Riscriviamo la (21.3.9):

$$\frac{dp}{dz} = \mu H_y \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} \quad (21.3.9)$$

¹⁾ Hannes Alfvén: On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves - Arkiv for Matematik, Astronomi Och. Fysik. Band 29 B. N:o 2, 1943.

ossia:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -\frac{\mu A^2 \omega}{V} \sin \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \cos \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) = \\ &= \frac{\mu A^2 \omega}{2V} \sin 2\omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \end{aligned} \quad (21.4.10)$$

Integrando rispetto a z:

$$p = -\frac{\mu A^2}{4} \cos 2\omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \quad (21.4.11)$$

21.5 - Linee di campo magnetico¹⁾

Le linee di campo magnetico, che in assenza di onde erano linee rette

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad (21.5.1)$$

cambiano forma in curve sinusoidali:

$$x = x_0, \quad y = y_0 + \frac{A}{\omega} \cos \omega \left(t - \frac{z}{V} \right) \quad (21.5.2)$$

Le onde elettromagnetiche-idrodinamiche sono probabilmente molto importanti nella fisica solare. Il campo magnetico generale del sole costituisce il campo primario H_0 in cui si muovono le onde. Grazie alla sua ionizzazione, la materia solare è un buon conduttore elettrico. Il fatto che nelle macchie solari si osservino movimenti meccanici e forti campi magnetici indica che essi potrebbero essere associati a onde di questo tipo, sebbene più complesse delle onde piane che abbiamo studiato.

Durante il periodo di 11 anni, la zona delle macchie solari si sposta da una latitudine di circa 30° verso l'equatore con una velocità dell'ordine di $100 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$. Poichè il campo magnetico generale è dell'ordine di 15 gauss, la velocità di un'onda elettromagnetica-idrodinamica ammonta a $100 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$. Se $\mu = 1$ e

$$\delta = \frac{H_0^2}{V^2} = 0.002 \text{ g/cm}^3 \quad (21.5.2)$$

La densità solare ha questo valore a circa un decimo del raggio solare sotto la superficie. La causa originaria delle macchie solari potrebbe essere situata a quella profondità. Pertanto, la causa delle macchie solari potrebbe essere costituita da onde elettromagnetiche-idrodinamiche che probabilmente hanno origine all'interno del sole e raggiungono la superficie nelle zone di macchie solari. Il problema delle onde elettromagnetiche-idrodinamiche nel sole sarà trattato in una pubblicazione successiva. Poichè il termine "onde elettromagnetiche idrodinamiche" è alquanto complicato, potrebbe essere più opportuno chiamare il fenomeno "onde magnetoidrodinamiche". (Il termine "idromagnetico" è ancora più breve, ma non del tutto adeguato.)

¹⁾ Hannes Alfvén: On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves - Arkiv for Matematik, Astronomi Och. Fysik. Band 29 B. N:o 2, 1943., pag.4, §4.

Appendice al Capitolo 21

21A.1 - H. Alfvén and N. Herlofson: Cosmic Radiation and Radio Stars - Phys. Rev. 78, 616, Published 1 June 1950.

L'emissione normale di onde radio dal Sole ammonta a 10^{-17} della radiazione termica e aumenta durante le esplosioni fino a 10^{-13} . Se una radio stella, ad esempio la sorgente nel Cigno, si trova a una distanza di 100 anni luce, la sua emissione radio è dell'ordine di 10^{-4} della radiazione termica del nostro sole. È molto improbabile che l'atmosfera di una stella possa essere così diversa da quella solare da consentire un'emissione radio che è da 10^9 a 10^{13} volte maggiore, e sembra quindi escluso che la sorgente possa essere piccola come una stella. La recente scoperta che le variazioni di intensità delle stelle radio sono un "battito di ciglia" rende possibile ipotizzare dimensioni maggiori.

Ryle ha suggerito che dovrebbe esserci una connessione tra le radio stelle e la radiazione cosmica.

Secondo un recente sviluppo della teoria della radiazione cosmica di Teller e Richtmyer, il Sole dovrebbe essere circondato da un "campo di intrappolamento" dell'ordine di 10^{-6} - 10^{-5} gauss, che confina i raggi cosmici in una regione con dimensioni di circa 10^{17} cm (0,1 anni luce). È probabile che quasi ogni stella abbia una propria radiazione cosmica, intrappolata in una regione di dimensioni simili. Noi suggerisce che l'emissione delle stelle radio sia prodotta dagli elettroni dei raggi cosmici nel campo di intrappolamento di una stella.

Gli elettroni con un'energia $W \gg m_0c^2$ che si muovono in un campo magnetico H irradiano a una velocità

$$-\frac{dW}{dt} = (2e^2/3c) \omega_0^2 \alpha^2, \quad (1)$$

dove $\omega_0 = eH/m_0c$ è la giro-frequenza corrispondente alla massa a riposo m_0 , e $\alpha = W/m_0c^2$. La maggior parte dell'energia è emessa con una frequenza dell'ordine: j

$$\nu = \omega_0 \alpha^2 / 2\pi = 2.8 \cdot 10^6 H \alpha^2 \text{ sec}^{-1}. \quad (2)$$

Non appena l'energia è molto più alta dell'energia a riposo, la frequenza emessa diventa molto più alta della girofrequenza, un fenomeno che si osserva nei grandi sincrotroni, dove il fascio di elettroni emette luce visibile.

Secondo la (2) un'emissione di onde radio di 100 Mc/sec. richiede

$$H \alpha^2 = 36 \text{ gauss} \quad (3)$$

Il processo di accelerazione della radiazione cosmica dovrebbe accelerare sia gli elettroni che le particelle positive. Nell'ambiente solare, la componente elettronica viene eliminata dalle collisioni Compton con i quanti di luce solare, come discusso da Feenberg e Primakoff. Nelle vicinanze di una stella che non emette molta luce, gli elettroni verrebbero accelerati fino a quando la loro energia non fosse così elevata da irradiare. La lunghezza d'onda rientra nella banda del metro se, ad esempio, $\alpha = 300$ ($W = 1.5 \cdot 10^8 \text{ eV}$) e $H = 3 \cdot 10^{-4} \text{ gauss}$. Questo campo è circa 100 volte l'intensità stimata del campo di intrappolamento solare. Poiché l'intensità è determinata dal "vento interstellare", una

stella radio dovrebbe trovarsi in una nube interstellare che si muove piuttosto rapidamente rispetto alla stella.

Per spiegare l'energia totale emessa da una stella radio, dobbiamo supporre che l'emissione radio sia un fenomeno transitorio, la cui durata è breve rispetto alla vita media dei raggi cosmici nel campo di intrappolamento (10 anni), oppure che l'accelerazione dei raggi cosmici in prossimità della stella sia integrata da un processo di Fermi più lontano nel campo di intrappolamento.

Secondo le ipotesi qui presentate, una stella radio non dovrebbe emettere molta luce e dovrebbe trovarsi in una nube interstellare. Questo spiegherebbe perchè è così difficile trovare oggetti astronomici associabili alle stelle radio.