

Cap. 20

Linee di trasmissione¹⁾

Nell'ultimo paragrafo del capitolo 12 degli Appunti di Fisica II, presenti in questo sito, abbiamo dimostrato come dalle equazioni di Maxwell si arrivi alla teoria dei circuiti ossia la descrizione circuitale di sistemi elettrici è equivalente alla descrizione effettuata con le equazioni di Maxwell. Per questo la trattazione delle linee di trasmissione viene in generale trattata con i metodi dei circuiti che risultano più semplici. Abbiamo già discusso nei capitoli precedenti delle guide d'onda, del cavo coassiale, delle guide dielettriche e delle striplines applicando le equazioni di Maxwell in maniera diretta. In questo Capitolo ci proponiamo di discutere la linea bifilare con i metodi circuitali. Per il trattamento delle linee di trasmissioni adottiamo il seguente piano:

1) Il trattamento circuitale in cui le grandezze sconosciute sono la tensione V e la corrente I lungo la linea, è usato per derivare le equazioni della linea di trasmissione. Questa è una procedura breve (§20.2) rispetto al trattamento più generale in cui le grandezze sconosciute sono *il campo elettrico* ed *il campo magnetico*. Una proprietà delle linee con due conduttori (coassiale, bifilare, stripline) è quella che nei modi principali il campo elettrico ed il campo magnetico sulla linea sono trasversali alla direzione di propagazione dell'onda. Tali campi elettromagnetici trasversali sono conosciuti come modi TEM . Per i modi TEM le quantità scalari V ed I sono in modo univoco correlate al vettore \vec{E} e \vec{H} della linea di trasmissione. Quindi per le linee a due conduttori, il più semplice trattamento circuitale è adeguato. D'altro lato, le guide d'onda che sono strutture a singolo conduttore cavo, le guide a barre dielettriche, hanno campi elettromagnetici con componenti nella direzione della propagazione delle onde. La configurazione di tali campi (conosciuta come *modi di ordine più alto*) possono essere analizzati solo in termini di trattamento dei campi.

20.1 - Introduzione

Il principale uso delle linee di trasmissione è nella trasmissione di segnali e di potenza. Le linee di trasmissioni sono larghe in una dimensione e piccole nelle altre due. Alle frequenze utilizzate per trasmissione di potenza, le dimensioni trasversali sono molto piccole rispetto alla lunghezza d'onda λ ; per esempio, per una frequenza di 60 Hz , la lunghezza d'onda è 5000 km e le dimensioni trasversali sono normalmente dell'ordine di un metro o meno. Anche la dimensione longitudinale è solo una frazione di una lunghezza d'onda, poichè la lunghezza delle linee di trasmissione di potenza raramente supera 500 km . A più alte frequenze la lunghezza delle linee di trasmissione può essere di molte lunghezze d'onda, con le dimensioni della sezione trasversale che restano sempre di circa una frazione di lunghezza d'onda. Per esempio, ad 1 GHz , che è la frequenza superiore limite per la maggior parte delle linee pratiche quali il cavo coassiale e la linea bifilare, le dimensioni della sezione trasversale è dell'ordine di 0.03λ . Sopra 1 GHz , le perdite nelle linee di trasmissione ordinaria diventano proibitive. Nel range di frequenze fra 1 e 100 GHz le guide d'onda che non hanno molte perdite sono usate. Le dimensioni della sezione trasversale delle guide

¹⁾ Martin A. Plonus: Applied Electromagnetics - McGraw-Hill, Inc. - 1978, pag. 552 - 592.

d'onda sono dell'ordine della lunghezza d'onda. A 10 GHz che è una tipica frequenza operativa delle guide d'onda, un guide d'onda lunga 10 metri ha parecchie centinaia di lunghezze d'onda. Sopra i 100 GHz , le guide d'onda diventano impraticabili perchè le dimensioni della loro sezione trasversale richiedono una tecnica di costruzione con elevata precisione. Recentemente le guide d'onda ottiche sono diventate disponibili che hanno perdite (2 dB/km) al di sotto di quelle delle linee coassiali ordinarie ($\approx 300\text{ dB/km}$) o delle guide d'onda ($\approx 30\text{ dB/km}$). Esse operano a frequenze nel range di 500 THz . Le dimensioni della loro sezione trasversale sono larghe in termine di lunghezze d'onda, usualmente superiori ai 100λ (tipicamente i diametri della fibra sono da 75 a $100\ \mu\text{m}$). Naturalmente ogni lunghezza pratica della fibra ottica è molti milioni di lunghezze d'onda.

Una tipica disposizione è mostrata in figura 20.1-1. Una linea di trasmissione coassiale è connessa ad un generatore di segnali la cui impedenza interna e tensione sono Z_g e V_g rispettivamente. Ai terminali di uscita la corrente è I_s e la tensione attraverso la linea è V_s . Ai terminali del ricevitore la linea di trasmissione termina su un carico di impedenza Z_R . Un segnale viaggiante sulla linea causerà una corrente I_R e tensione V_R come mostrato.

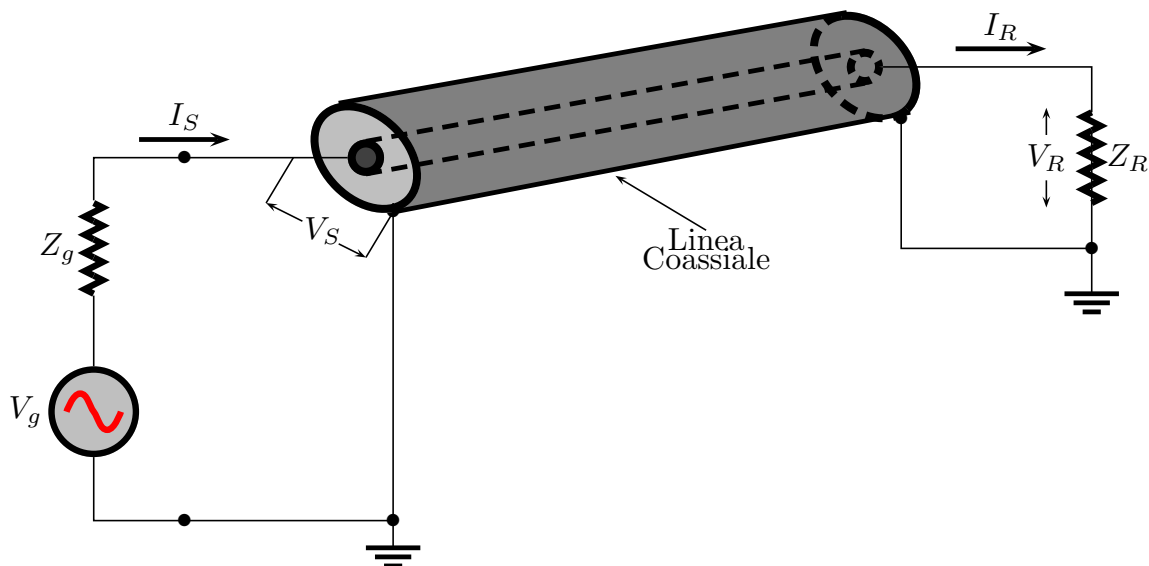


fig.20.1-1

20.2 - Linea di trasmissione uniforme

Una linea di trasmissione a fili paralleli, come mostrata in figura 20.2-1, ha induttanze e resistenze in serie, nonché capacità e conduttanze distribuite uniformemente lungo la

linea.

Linea di trasmissione con fili paralleli e con parametri distribuiti

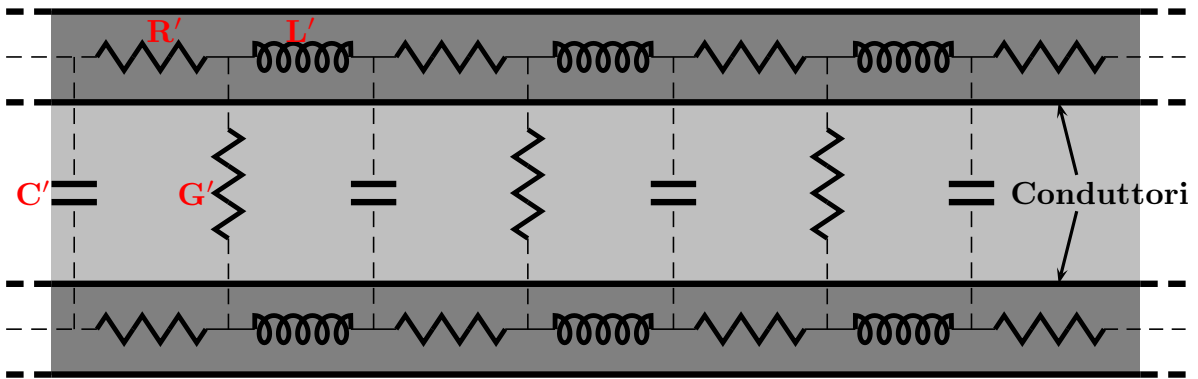


fig.20.2-1

Una linea di trasmissione è quindi una rete di parametri distribuite in cui le quantità R', L', G' e C' sono i parametri per unità di lunghezza di linea. La teoria convenzionale dei circuiti concentrati può essere applicata a una lunghezza infinitesima dz di linea di trasmissione, come mostrato in figura (20.2-2).

Circuito equivalente di un tratto dz di linea

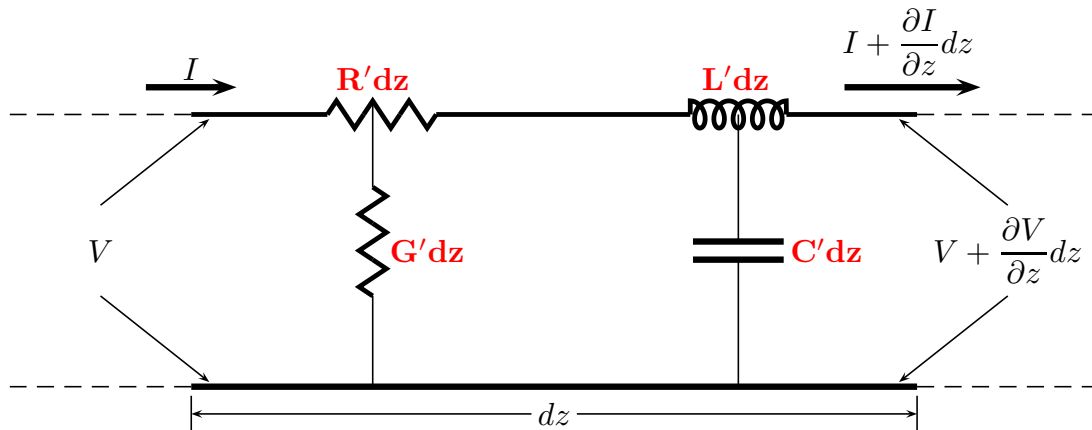


fig.20.2-2

Tale porzione di fili può essere trattata come una rete a quattro terminali con serie di resistenze concentrate $R'dz$, serie di induttanze concentrate $L'dz$, conduttanze di shunt concentrate $G'dz$ e condensatori di shunt di capacità $C'dz$. Il risultato di tale analisi rivelerà che onde di tensione V e di corrente I viaggiano lungo la linea. Le onde di tensione e di corrente sono intimamente correlate alle onde di \vec{E} e \vec{H} nello spazio fra i conduttori della linea di trasmissione. A causa della natura unidimensionale della propagazione ondosa, le quantità scalari V e I unicamente determinano i vettori \vec{E} e \vec{H} della linea di trasmissione. Quindi è più semplice descrivere i campi elettromagnetici delle linee di trasmissione in termini di tensione, di corrente e di impedenza.

La legge di Kirchhoff per le tensioni applicata alla rete di figura 20.2-2 si scrive:

$$-V + (R'dz)I + (L'dz)\frac{\partial I}{\partial t} + V + \frac{\partial V}{\partial z}dz = 0 \quad (20.2.1)$$

La legge di Kirchhoff per le correnti applicata alla rete di figura 19.1-2 si scrive:

$$I - (G'dz)V - (C'dz)\frac{\partial V}{\partial t} - \left(I + \frac{\partial I}{\partial z}dz \right) = 0 \quad (20.2.2)$$

che si possono scrivere:

$$R'I + L'\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (20.2.3)$$

$$-G'V - C'\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (20.2.4)$$

Esse formano la base per lo studio delle linee di trasmissione da un punto di vista circuitale.

20.3 - Linea di trasmissione uniforme senza perdite

Le importanti caratteristiche di propagazione e di riflessione dei segnali possono essere meglio illustrate se studiamo la linea di trasmissione ideale. Quindi ignoriamo le perdite I^2R e le perdite di isolamento G^2V trascurando R' e G' . Fortunatamente, in molte situazioni pratiche le perdite sulla linea sono veramente trascurabili, il che rende il caso senza perdite di grande significato pratico. Le equazioni di una linea senza perdite sono allora:¹⁾

$$L'\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (20.3.1)$$

$$-C'\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (20.3.2)$$

Deriviamo la prima equazione rispetto a z e la seconda rispetto a t , ottenendo:

$$L'\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (20.3.3)$$

$$-C'\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} = 0 \quad (20.3.4)$$

Dalla equazione (20.3.4) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} = -C'\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (20.3.5)$$

che, sostituita nella (20.3.3), comporta:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - L'C'\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0} \quad (20.3.6)$$

¹⁾ Le equazioni (20.3.1) e (20.3.2) sono equivalenti alle equazioni di Maxwell che nel caso di onda piana propagantesi lungo la direzione z di componenti E_x e H_y si scrivono: $-\partial E_x/\partial z = \mu\partial H_y/\partial t$ e $-\partial H_y/\partial z = \epsilon\partial E_x/\partial t$.

Viceversa, derivando l'equazione (20.3.1) rispetto a t e la (20.3.2) rispetto a z , si ottiene:

$$L' \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial z} = 0 \quad (20.3.7)$$

$$-C' \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial z} - \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = 0 \quad (20.3.8)$$

Dalla equazione (20.3.7) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial z} = -L' \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (20.3.9)$$

che, sostituita nella (20.3.8), comporta:

$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - L' C' \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0} \quad (20.3.10)$$

Le equazioni (20.3.6) e (20.3.10) sono equazioni d'onda unidimensionali. Quindi, abbiamo onde di tensione e di corrente che viaggiano sulla linea con velocità:

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}} \quad (20.3.11)$$

che è eguale alla velocità della luce, come abbiamo dimostrato nel capitolo 17 nel caso del cavo coassiale e di linea a strisce (stripline).

Nel caso di linea bifilare si ha:¹⁾

$$C' = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{s}{\rho}\right)} \quad e \quad L' = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \operatorname{arccosh}\left(\frac{s}{\rho}\right) \quad (20.3.12)$$

essendo ρ il raggio di ciascun filo e s la distanza fra i centri dei fili.

Dalla (20.3.12):

$$L' C' = \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r = \epsilon \mu \longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (20.3.13)$$

che è la velocità della luce nel mezzo di parametri ϵ_r e μ_r . Nel caso $\epsilon_r = \mu_r = 1$, $v = c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

¹⁾ Per la capacità vedi Appunti di Fisica II, capitolo 3, pag. 3-12, formula 3.7.9 che è riportata dal libro Martin A. Plonus: Applied Electromagnetics - McGraw-Hill, Inc. - 1978, pag. 168; per l'induttanza pag. 269, W. R. Smythe and C. Yeh: 5b. Formulas pag. 5-56.

Nel caso di cavo coassiale si ha:²⁾

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{b}{a}} \quad e \quad L' = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (20.3.14)$$

essendo a e b i raggio di ciascun conduttore.

Dalla (20.3.14):

$$L'C' = \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r = \epsilon\mu \longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (20.3.15)$$

che è la velocità della luce nel mezzo di parametri ϵ_r e μ_r . Nel caso $\epsilon_r = \mu_r = 1$, $v = c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

La soluzione per V e I è una combinazione di onde incidenti e riflesse come abbiamo dimostrato nel capitolo 2. Si ha, quindi:

$$V = V^i \left(t - \frac{z}{v} \right) + V^r \left(t + \frac{z}{v} \right) \quad (20.3.16)$$

$$I = I^i \left(t - \frac{z}{v} \right) + I^r \left(t + \frac{z}{v} \right) \quad (20.3.17)$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} t - \frac{z}{v} &= \xi \\ t + \frac{z}{v} &= \eta \end{aligned} \quad (20.3.18)$$

da cui:

$$t = \frac{\begin{vmatrix} \xi & -\frac{1}{v} \\ \eta & +\frac{1}{v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{v} \\ 1 & +\frac{1}{v} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\xi}{v} + \frac{\eta}{v}}{\frac{2}{v}} = \frac{\xi + \eta}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi \\ 1 & \eta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{v} \\ 1 & +\frac{1}{v} \end{vmatrix}} = \frac{\eta - \xi}{\frac{2}{v}} = \frac{(\eta - \xi)}{2}v \quad (20.3.19)$$

Si ha:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV^i(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{dV^r(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (20.3.20)$$

²⁾ Per la capacità vedi Appunti di Fisica II, capitolo 3, pag. 3-8, formula 3.4.7; per l'induttanza vedi W. R. Smythe and C. Yeh: 5b. Formulas pag. 5-56.

Dalle (20.3.18) risulta:

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{1}{v} \quad (20.3.21)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = +\frac{1}{v} \quad (20.3.22)$$

L'equazione (20.3.20) si può, allora, scrivere:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{v} \frac{dV^i(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{v} \frac{dV^r(\eta)}{d\eta} \quad (20.3.23)$$

Dalla (20.3.1) si ha:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{L'} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (20.3.24)$$

Sostituendo l'equazione (20.2.23), l'equazione (20.2.24) si scrive:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = +\frac{1}{L'} \frac{1}{v} \frac{dV^i(\xi)}{d\xi} - \frac{1}{L'} \frac{1}{v} \frac{dV^r(\eta)}{d\eta} \quad (20.3.25)$$

Risulta:

$$\frac{1}{L'} \frac{1}{v} = \frac{1}{L'} \sqrt{L'C'} = \sqrt{\frac{C'}{L'}} \quad (20.3.26)$$

L'inverso della quantità all'ultimo membro della (20.2.26) è una grandezza importante nella teoria delle linee di trasmissione. Si ha:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{C'}{L'}}$$

**Impedenza
caratteristica
della linea di
trasmissione**

(20.3.27)

L'equazione (20.3.25) si scrive, allora:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{Z_0} \frac{dV^i(\xi)}{d\xi} - \frac{1}{Z_0} \frac{dV^r(\eta)}{d\eta} \quad (20.3.28)$$

Integrando rispetto al tempo si ha:

$$I = \frac{1}{Z_0} \left[V^i \left(t - \frac{z}{v} \right) - V^r \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \quad (20.3.29)$$

L'impedenza caratteristica Z_0 è il rapporto fra la tensione e la corrente di un'onda individuale sulla linea. Cioè, per l'onda incidente $Z_0 = V^i/I^i$, e per l'onda riflessa $Z_0 = -V^r/I^r$. Non è corretto dire che $Z_0 = V/I$, come può facilmente essere visto prendendo il rapporto fra la (20.3.16) e la (20.3.29). Il segno meno nella legge di Ohm per l'onda

riflessa, $Z_0 = -V^r/I^r$, denota che in figura 20.2-2 la corrente scorre nella direzione negativa dell'asse z .

Alla domanda cosa è l'impedenza caratteristica si può rispondere come segue: Essa è il rapporto fra la tensione e la corrente su una linea di trasmissione infinitamente lunga.

20.4 - Linea di trasmissione infinitamente lunga alimentata da una tensione costante

La figura 20.4-1 mostra una batteria, che fornisce una tensione V_b , che viene applicata istantaneamente ad una linea infinitamente lunga. Come risultato una tensione a gradino ed una corrente a gradino avanzano lungo la linea con velocità $v = 1/\sqrt{L'C'}$. In altre parole ad ogni istante di tempo t dopo che l'interruttore è stato chiuso, l'equazione (20.3.16) implica che la tensione $V = V^i = V_b$, e la (20.3.29) implica che una corrente $I = I^i = V_b/Z_0$ esistono sulla linea fino al punto $z = vt$ e zero tensione e zero corrente oltre.

Il flusso di energia dalla batteria va a caricare la capacità e stabilire una corrente nell'induttanza della linea. L'energia ΔW_c immagazzinata nella capacità di una linea di lunghezza dz è eguale all'energia ΔW_L nell'induttanza; cioè:

$$\Delta W_C = \frac{1}{2} (C' dz) V_b^2 = \frac{1}{2} (C' dz) (Z_0 I)^2 = \frac{1}{2} (C' dz) \left(\frac{L'}{C'} I^2 \right) = \frac{1}{2} (L' dz) I^2 = \Delta W_L \quad (20.4.1)$$

dove le unità di misura di C' e di L' sono date in *Farad/m* ed *Henry/m*, rispettivamente. L'energia totale in una sezione infinitesima di linea é data da:

$$\Delta W = \Delta W_c + \Delta W_L = C' V_b^2 dz \quad (20.4.2)$$

che implica che l'energia totale che lascia la batteria all'istante t è:

$$W = C' V_b^2 z = C' V_b^2 vt = \frac{V_b^2}{Z_0} t \quad (20.4.3)$$

Cioè, la batteria fornisce potenza continuamente al tasso $P = dW/dt = V_b^2/Z_0$. Poichè

la linea è assunta essere infinitamente lunga, non esiste alcuna onda riflessa.

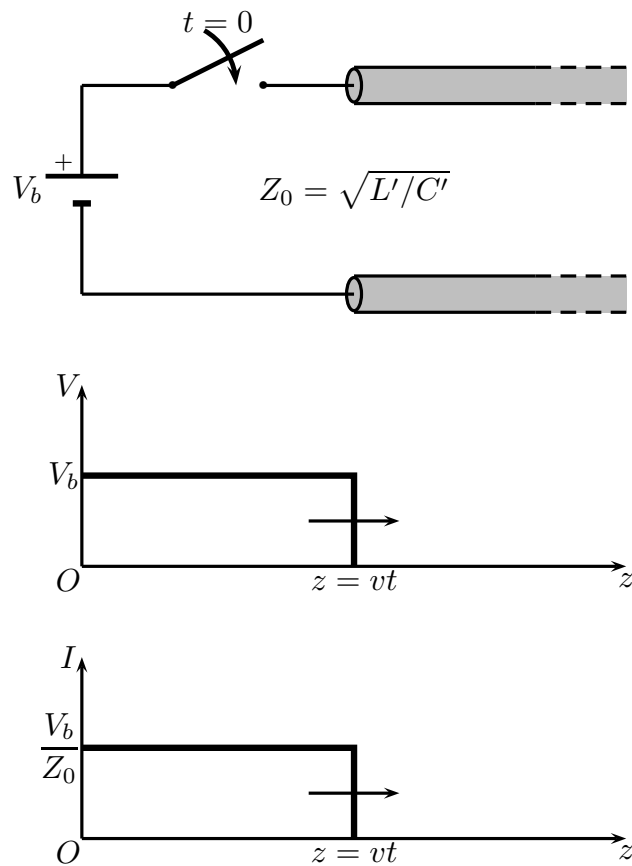


fig.20.4-1

20.5 - Riflessione e Trasmissione in una discontinuità alla fine di una linea di trasmissione

Sia una linea di trasmissione di lunghezza finita che termina su una resistenza di carico R_R , come mostrato in figura 20.5-1. Il pedice R denota la ricezione di un segnale. La tensione V_R al carico è ora la somma di una tensione incidente e di una tensione riflessa, come dato dall'equazione (20.3.16),

$$V_R = V^i + V^r \quad (20.5.1)$$

La corrente che fluisce in R_R è similmente data da:

$$I_R = I^i + I^r = \frac{1}{Z_0} (V^i - V^r) \quad (20.5.2)$$

Al terminale quindi:

$$R_R = \frac{V_R}{I_R} = \frac{V^i + V^r}{I^i + I^r} = \frac{V^i + V^r}{\left(\frac{1}{Z_0}\right) (V^i - V^r)} \quad (20.5.3)$$

Linea chiusa su una Resistenza

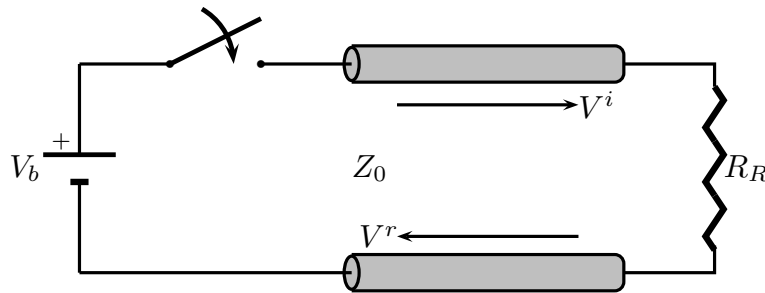


fig.20.5-1

Il coefficiente di riflessione Γ è definito come il rapporto fra la tensione riflessa e la tensione incidente. Utilizzando l'equazione (20.5.3) possiamo scrivere:

$$R_R \left(\frac{V^i}{Z_0} - \frac{V^r}{Z_0} \right) = V^i + V^r \quad (20.5.4)$$

$$V^i \left(\frac{R_R}{Z_0} - 1 \right) = V^r \left(\frac{R_R}{Z_0} + 1 \right) \quad (20.5.5)$$

da cui:

$$\Gamma = \frac{V^r}{V^i} = \frac{R_R - Z_0}{R_R + Z_0} \quad (20.5.6)$$

Si osservi che Γ in termini delle correnti associate alle onde incidente e riflessa è $\Gamma = -I^r/I^i$. Il coefficiente di trasmissione τ è definito come il rapporto fra la tensione nel carico e la tensione incidente ed è dato da:

$$\tau = \frac{V_R}{V^i} = \frac{V^i + V^r}{V^i} = 1 + \Gamma = \frac{2R_R}{R_R + Z_0} \quad (20.5.7)$$

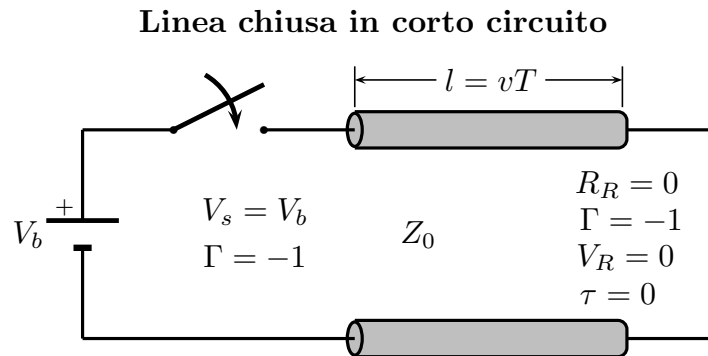
Il coefficiente di riflessione Γ è un importante parametro nella pratica delle linee di trasmissione perchè esprime l'intensità relativa dell'onda riflessa che è generata dalle discontinuità sulla linea. Può avere valori compresi fra $-1 \leq \Gamma \leq +1$, dove i valori estremi sono dovuti ad una linea di trasmissione cortocircuitata ($\Gamma = -1$ per $R_R = 0$) e ad una linea a circuito aperto ($\Gamma = 1$ per $R_R = \infty$).

Un caso speciale si ha fra i due estremi: Quando la linea termina con una resistenza di carico $R_R = Z_0$, la linea è adattata ($\Gamma = 0$) e nessuna tensione riflessa è generata dal carico e tutta la potenza ($V^i I^i$) dell'onda incidente è assorbita dalla R_R . Quindi una seconda risposta alla domanda di cosa è l'impedenza caratteristica può essere data come segue: È quella resistenza che

quando connessa ad una linea di trasmissione di lunghezza finita, non farà risultare un'onda riflessa.

20.6 - Linea chiusa in corto circuito

Un linea di trasmissione di lunghezza l sia chiusa in corto circuito come mostrato in figura 20.6-1.



All'istante $t = 0$, l'interruttore viene chiuso, connettendo una batteria di voltaggio V_b ai terminali di una linea di trasmissione.

- a) Determinare le onde di tensione e di corrente dell'onda incidente e dell'onda riflessa.
- b) Determinare la tensione e la corrente agli estremi di ricezione della linea.

Osserviamo prontamente che alla fine una corrente infinita deve fluire se la batteria rimane collegata. Il modo in cui la corrente aumenta, tuttavia, è interessante. Nell'intervallo $0 \leq t < T$, un'onda avanza sulla linea che è identica a quella che scorre sulla linea infinita mostrata in figura 20.4-1. All'istante $t = T$ l'onda incidente raggiunge il corto circuito che si traduce nel lancio di un'onda riflessa, poichè la tensione totale nel corto circuito deve essere zero; cioè, $V_R = V^i + V^r = 0$, quindi $V^r = -V^i$, o $\Gamma = \frac{V^r}{V^i} = -1$. D'altro canto la corrente associata all'onda riflessa è $I^r = \Gamma I^i$, e quindi essa si aggiunge alla corrente associata all'onda incidente. Utilizzando la (20.3.17) si ha che la corrente totale in R_R è $I_R = I^i + I^r = \frac{V_b^i}{Z_0} - \frac{V_b^r}{Z_0} = \frac{2V_b^i}{Z_0}$. L'onda riflessa (per $T \leq t < 2T$) lascia zero tensione e corrente $\frac{2V_b^i}{Z_0}$ sulla linea di trasmissione. All'istante $t = 2T$, l'onda riflessa raggiunge la batteria. Una batteria che abbiamo assunto ideale e che, quindi, ha resistenza interna nulla e perciò un coefficiente di riflessione $\Gamma = -1$. L'onda quindi viene riflessa dalla batteria così come essa viene riflessa dal corto circuito. L'onda continua a rimbalzare avanti e indietro sulla linea mentre la corrente si accumula e la tensione sulla linea oscilla tra zero e la tensione della batteria V_b . La figura 20.6-2 mostra le onde in tre istanti di tempo. È possibile verificare le cifre di cui sopra in quanto devono essere coerenti con le condizioni

di fine linea. Poche $R_R = 0$, la tensione a $z = l$ diviso la corrente a $z = l$ deve dare zero.

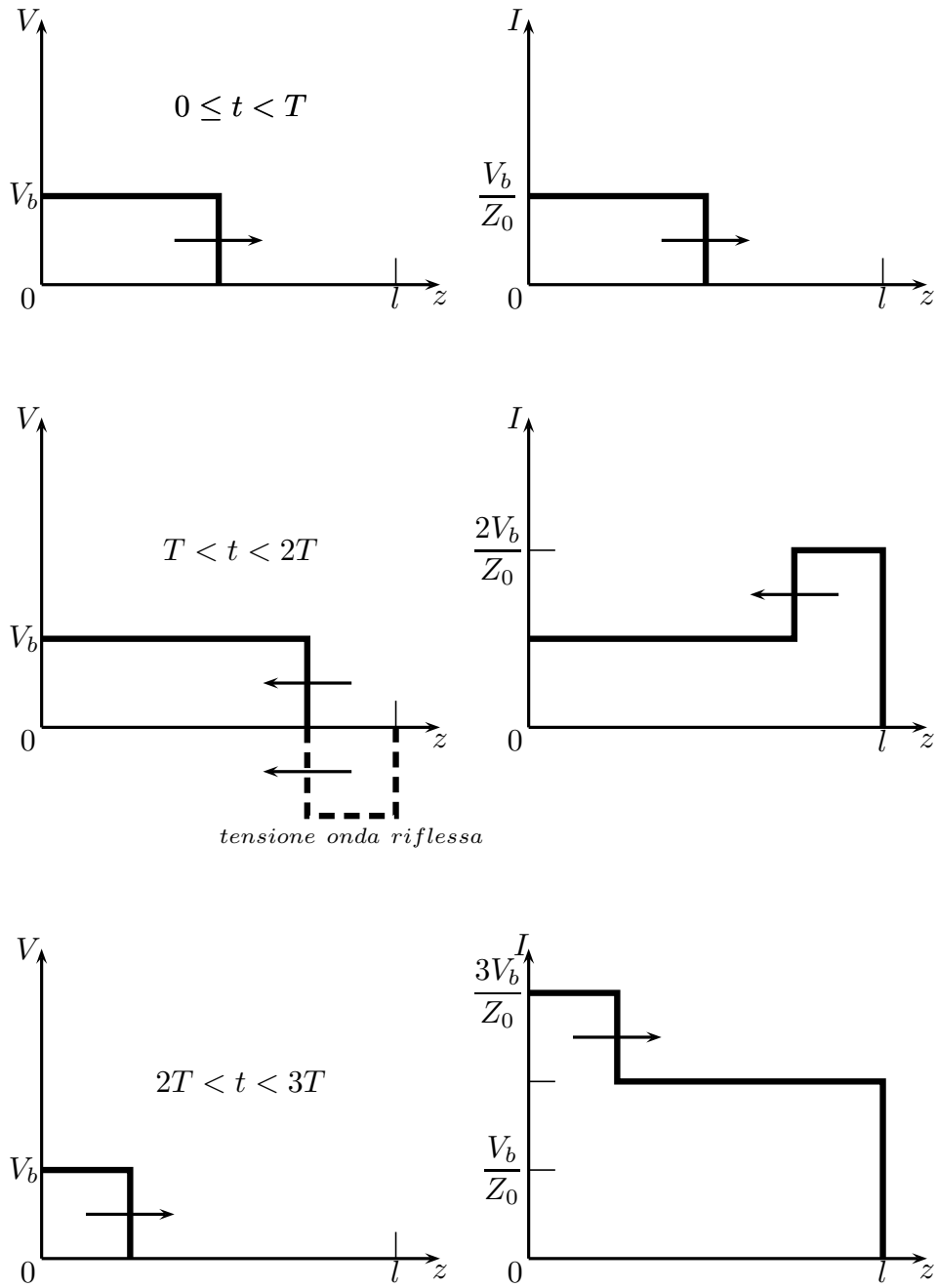


fig.20.6-2

Analogamente nella figura 20.6-3 grafichiamo la corrente e la tensione fra i terminali

d'ingresso nonchè la corrente e la tensione nel cortocircuito al variare del tempo.

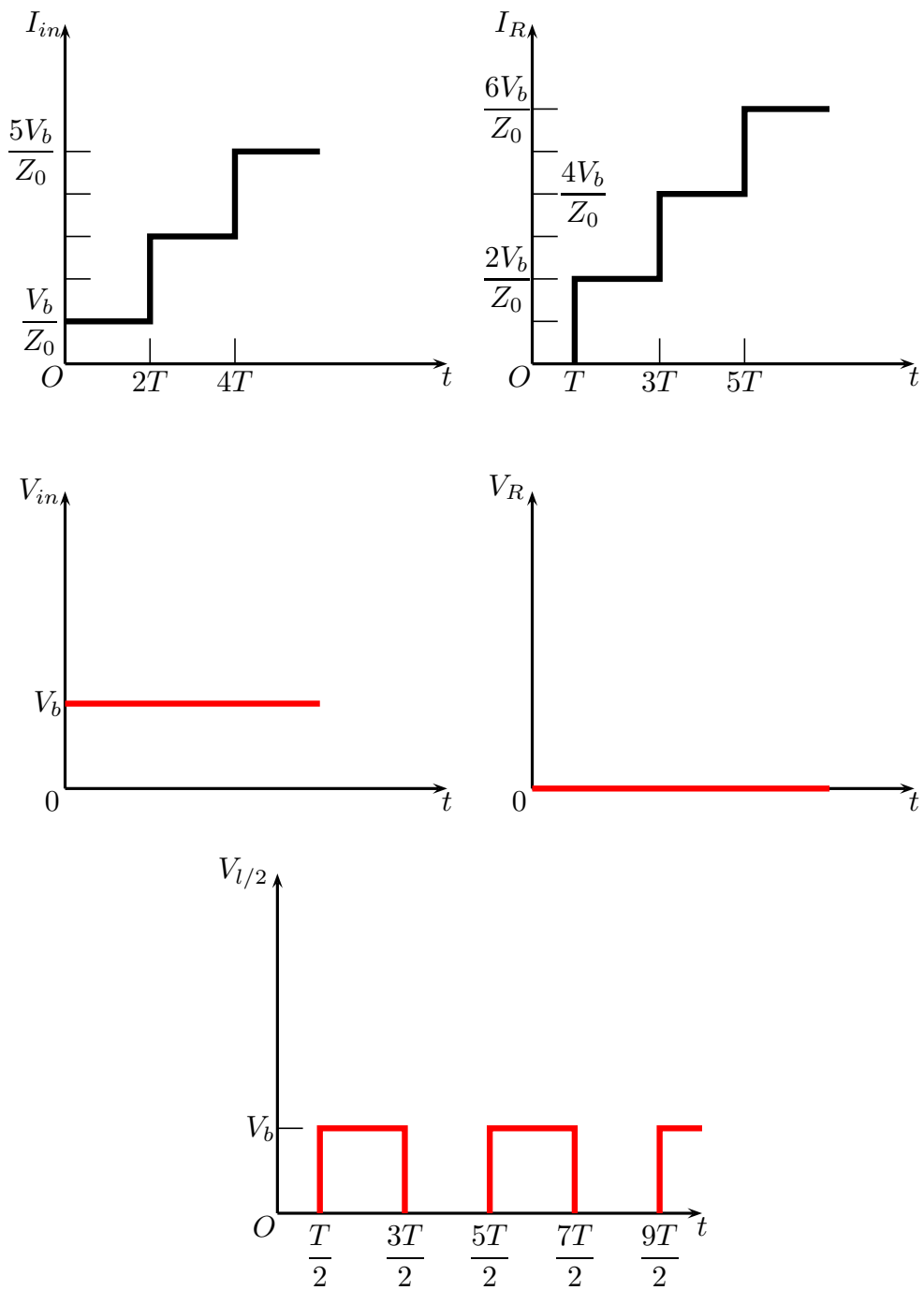


fig.20.6-3

20.7 - Linea aperta

La figura 20.7-1 mostra una linea di trasmissione che è aperta ai terminali riceventi. Ai terminali d'ingresso una batteria in serie con una resistenza R è connessa all'istante $t = 0$ alla linea. Vogliamo mostrare la distribuzione della tensione e della corrente.

Dopo la chiusura dell'interruttore e per l'intervallo di tempo $0 < t < 2T$, l'impedenza d'ingresso della linea è l'impedenza caratteristica Z_0 . Durante questo intervallo di tempo la tensione ai terminali d'ingresso è quindi:

$$V_{in} = I_{in}Z_0 = \frac{V_b}{3Z_0 + Z_0}Z_0 = \frac{V_b}{4} \quad (20.7.1)$$

che dà luogo ad un'onda di tensione V_{in} che viaggia verso i terminali aperti e dove essa viene riflessa con il coefficiente di riflessione:

$$\Gamma = \lim_{R_R \rightarrow \infty} \frac{R_R - Z_0}{R_R + Z_0} = \lim_{R_R \rightarrow \infty} \frac{1 - Z_0/R_R}{1 + Z_0/R_R} = 1 \quad (20.7.2)$$

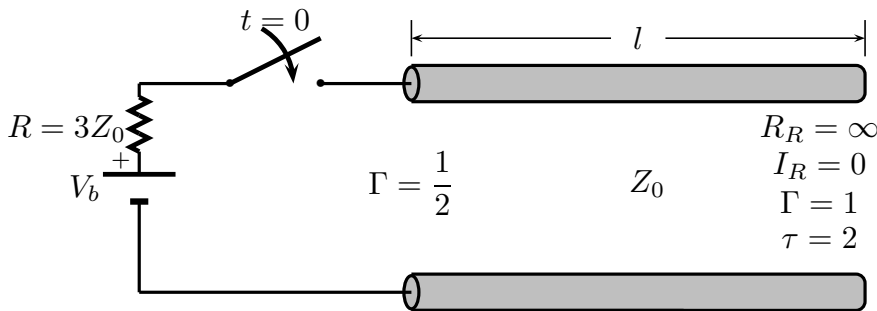


fig.20.7-1

Essa viaggia indietro verso i terminali d'ingresso dove essa è riflessa di nuovo con il coefficiente $\Gamma_s = (3Z_0 - Z_0)/(3Z_0 + Z_0) = 1/2$.

La figura 20.7-2 mostra l'onda in tre istanti di tempo sulla linea. La tensione sulla linea aumenta a gradini fino a che essa raggiunge la tensione della batteria V_b , mentre la corrente sulla linea tende a zero a gradini come mostrato in figura 20.7-3. Noi possiamo considerare il dispositivo di figura 20.7-1 come uno in cui la linea di trasmissione è caricata ad un potenziale V_b . Questo problema è simile a quello della carica di un condensatore da una batteria attraverso una resistenza. Infatti trattando la linea aperta come un condensatore di capacità $C = C'l$, dove C' è la capacità per unità di lunghezza della linea, la costante di tempo del circuito di carica equivalente di figura 20.7-1 è:

$$RC = (3Z_0)(C'l) = \left(3\sqrt{\frac{L'}{C'}} \right) (C'l) = 3\sqrt{L'C'}l = \frac{3l}{v} = 3T \quad (20.7.3)$$

dove T é il tempo impiegato dall'onda per attraversare una distanza l . Usando la formula della carica di un condensatore si ha:

$$V_{in} = V_b \left(1 - e^{-t/3T} \right) \quad (20.7.4)$$

che è graficata come curva colorata in rosso in figura 20.7-3. La corrente di carica è mostrata in figura 20.7-3. Questa figura mostra la differente natura della risposta in un circuito a costante concentrate e distribuite.

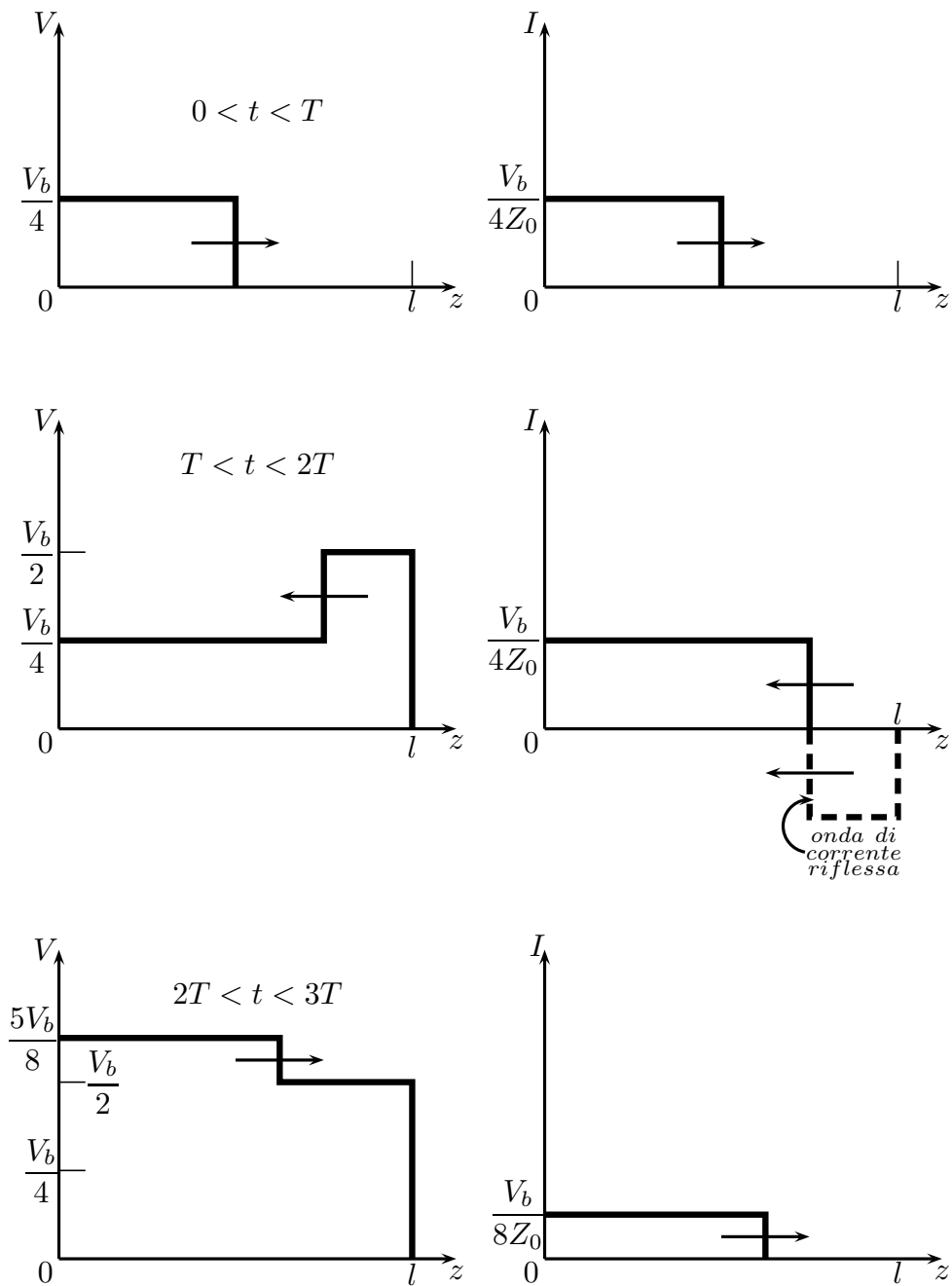


fig.20.7-2

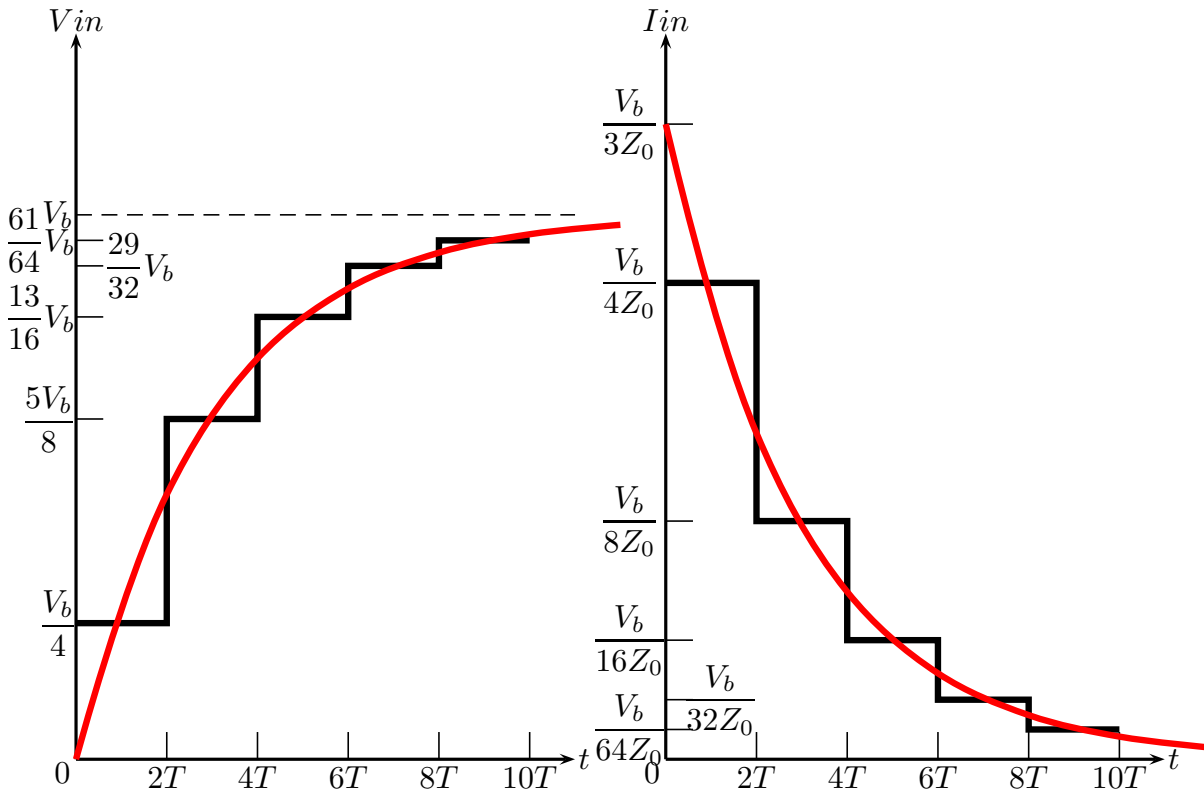


fig.20.7-3

20.8 - Scarica di una linea carica

La figura 20.8-1 a) mostra una linea di trasmissione che è caricata ad una tensione V_b . All'istante $t = 0$, una resistenza R è connessa alla linea. La chiusura dell'interruttore disturba le condizioni di equilibrio della linea. Il transiente dà luogo ad un'onda che viaggia lungo la linea. Per calcolare l'intensità del transiente, usiamo il circuito equivalente di figura 20.8-1 b), che comporta:

$$V_s = -I_s R = \frac{V_b}{Z_0 + R} R \quad (20.8.1)$$

per la tensione imposta fra i terminali d'ingresso della linea. Quindi poichè V_s è differente da V_b , viene lanciata un'onda che lascia dietro di sé una tensione V_s . Un transitorio può essere evitato solo se $V_s = V_b$, che è possibile solo per $R \rightarrow \infty$. Per R finito, $V_s < V_b$, e l'onda lanciata la cui ampiezza è V^i spazza via una parte della tensione iniziale V_b sulla linea. Per trovare V^i osserviamo che la tensione attraverso R è la somma della tensione iniziale V_b e la tensione V^i dell'onda lanciata:

$$V_s = V_b + V^i \quad (20.8.2)$$

Sostituendo la (20.8.1) possiamo risolvere per V^i .

$$V^i = -V_s \frac{Z_0}{R} = -V_b \frac{Z_0}{Z_0 + R} = I_s Z_0 \quad (20.8.3)$$

Quando quest'onda raggiunge i terminali aperti, essa viene riflessa con un coefficiente $\Gamma = 1$. Al raggiungimento R , essa sarà riflessa di nuovo con un coefficiente di riflessione $\Gamma = (R - Z_0)/(R + Z_0)$. Queste riflessioni saranno continue fino a che la tensione sulla linea raggiunge lo zero.

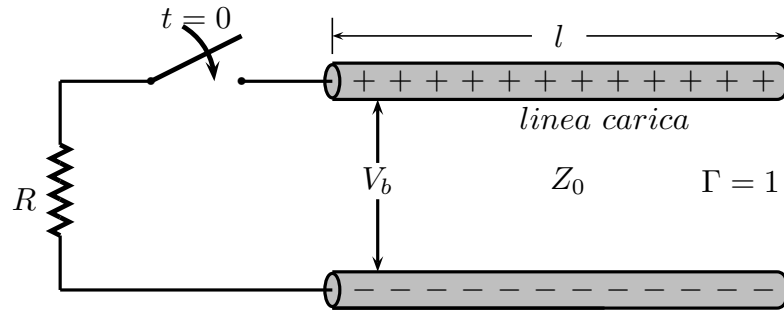


fig.20.8-1 a)

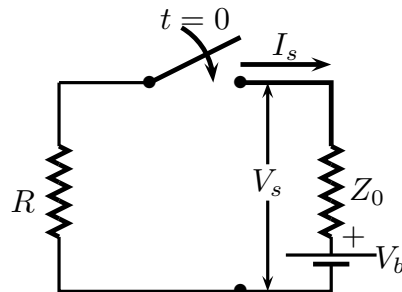


fig.20.8-1 b)

La figura 20.8-2 mostra le onde di tensione e di corrente a due istanti di tempo, per il caso $R = 2Z_0$. La linea tratteggiata è l'onda incidente lanciata all'istante $t = 0$.

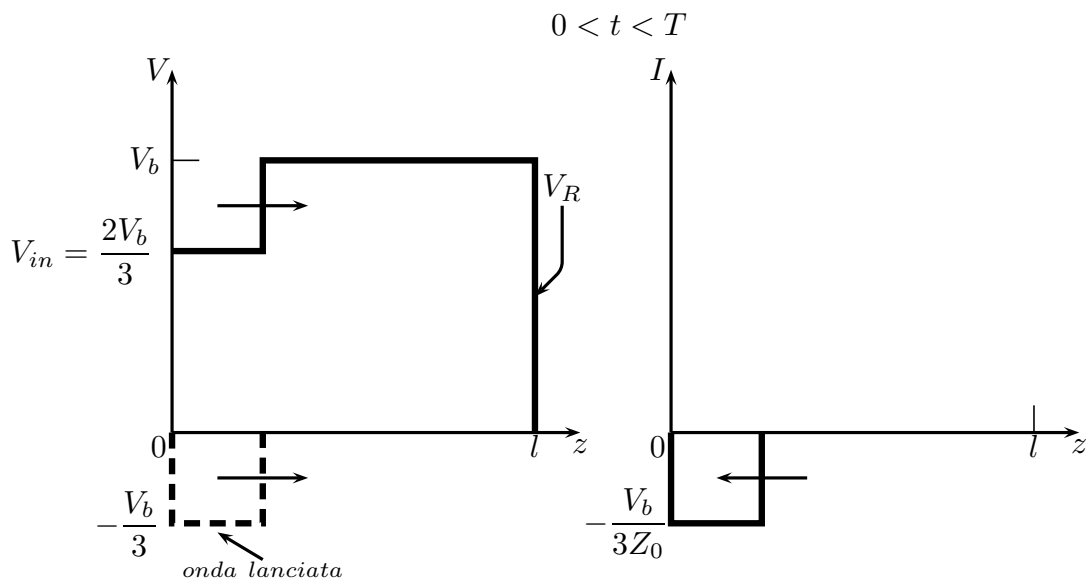


fig.20.8-2 a)

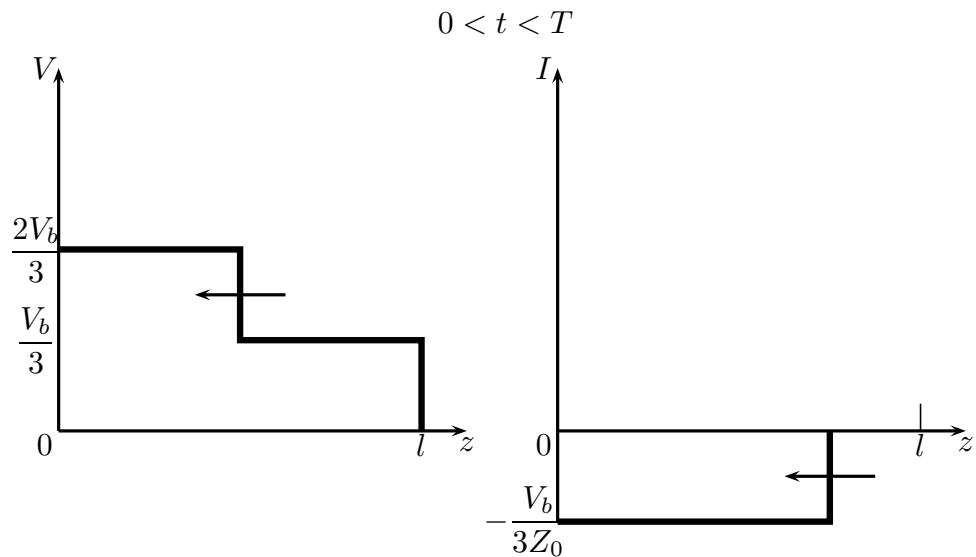


fig.20.8-2 b)

Le tensioni e le correnti all'ingresso e alla fine sono mostrate in figura 20.8-3 per tre differenti valori di R . **I tre casi corrispondono a circuiti sovrasmorzati, criticamente smorzati e sottosmorzati.** Il caso di $R = Z_0$ è di speciale interesse: Un'onda di tensione $-V_b/2$ è lanciata. Essa viene riflessa alla fine (circuitto aperto) e lascia zero voltaggio sulla linea mentre si sposta verso R . Quando l'onda riflessa raggiunge R , essa è assorbita perchè $R = Z_0$. Nessuna riflessione avrà luogo dopo $t = 2T$, la linea può essere considerata scarica.

Le linee cariche possono essere usate nella generazione di impulsi, in cui la larghezza dell'impulso è controllata dalla lunghezza della linea.

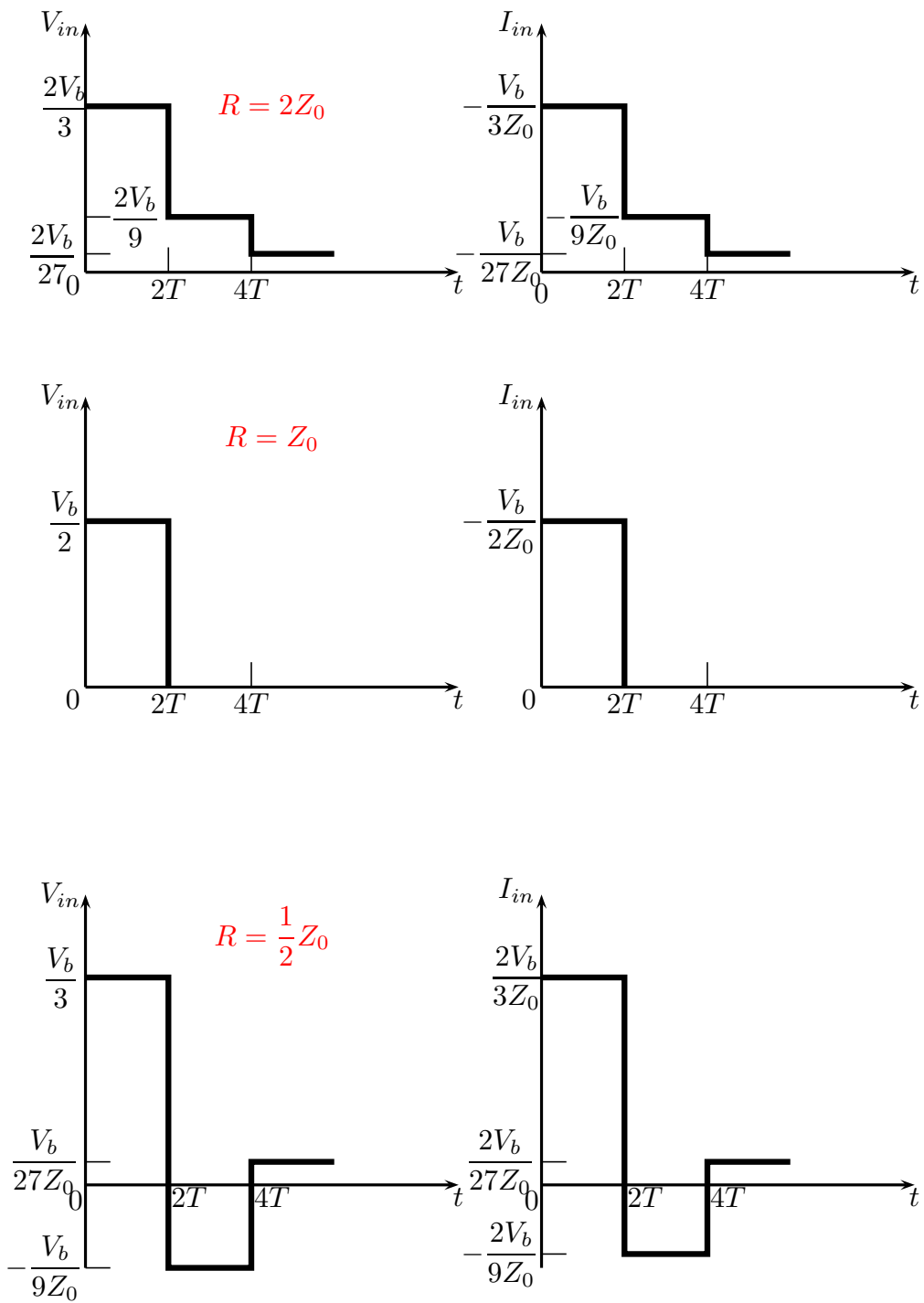


fig.20.8-3

20.9 - Linea di trasmissione con tensione impulsata in ingresso

Una linea di trasmissione coassiale mostrata in figura 20.9-1a ha una impedenza caratteristica di 50Ω , velocità di propagazione di $200 \text{ m}/\mu\text{s}$, lunghezza di 400 metri e termina con una resistenza di carico $R_R = 16.7\Omega$. Ai terminali di ingresso la linea è connessa ad un generatore di impulsi che ha una resistenza interna di 150Ω e produce un impulso di $1 \mu\text{s}$ a 40 Volt . Trovare le forme d'onda delle correnti e delle tensioni ai terminali di ingresso.

All'istante $t = 0$ l'impulso non è influenzato dall'estremità ricevente e inizia a viaggiare lungo la linea come se la linea fosse infinitamente lunga. Inizialmente l'impulso a 40 V si divide tra la resistenza del generatore R_g e l'impedenza caratteristica Z_0 della linea per dare un impulso ai terminali di ingresso della linea:

$$V_s = \frac{40}{R_g + Z_0} Z_0 = \frac{40}{150 + 50} 50 = 10V \quad (20.9.1)$$

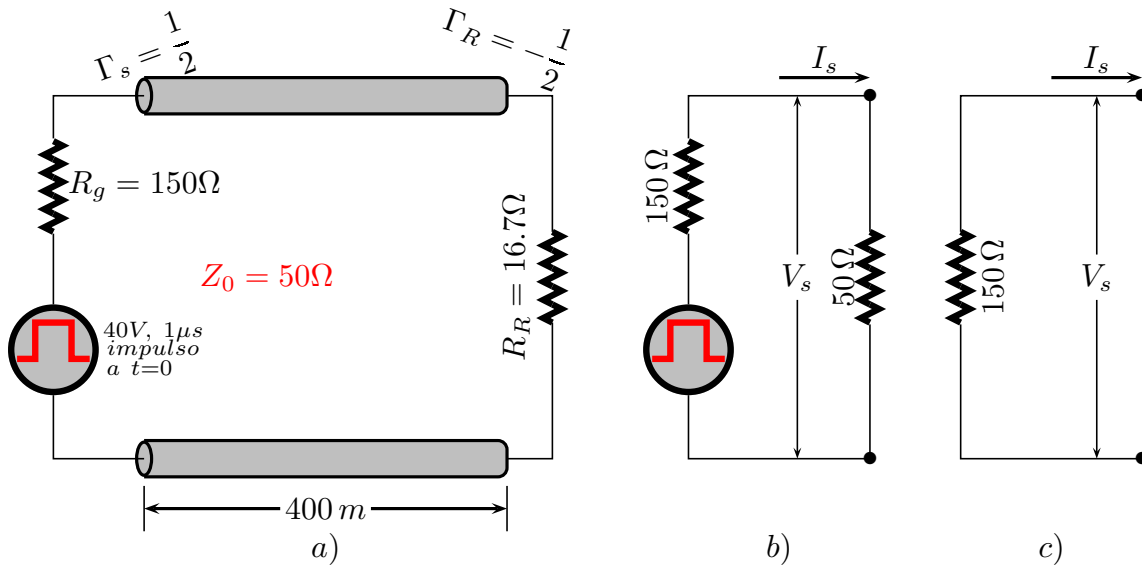


fig.20.9-1

L'impulso da 10 V viaggia verso il carico in $2 \mu\text{s}$ ed è parzialmente assorbito e parzialmente riflesso con il coefficiente $\Gamma_R = -\frac{1}{2}$. L'impulso riflesso che è di -5V , viaggia verso il generatore in $2\mu\text{s}$ ed è parzialmente riflesso dalla resistenza disadattata R_g . IL coefficiente di riflessione al generatore è $\Gamma_s = \frac{1}{2}$ che risulta in un impulso riflesso di -2.5V . Da questo punto in avanti il processo si ripete con l'impulso invertito dimezzato al carico e dimezzato al generatore.

Quando l'impulso riflesso arriva ai terminali del generatore, esso lascia un mezzo con una impedenza caratteristica Z_0 ed incontra la resistenza R_g . La riflessione ci sarà fino a mmo che non sia $R_g = Z_0$. La tensione totale ai terminali d'ingressòè la somma delle tensioni delle onde incidenti e riflesse. Così:

$$V_{in} = V^i + V^r = V^i(1 + \Gamma_s) \quad (20.9.2)$$

Il circuito equivalente per questo istante è dato dalla figura 20.8.1b. Usando questo circuito, la corrente ai terminali del generatore è $I_Z = -V_s/R_g$. Per esempio, all'istante $t = 4\mu s$, $V_s = -5 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = -7.5V$ e $I_s = 7.5/150 = 0.05A$. La corrente è positiva quando ha il vers mostrato in figura 20.9-1c. I versi di V_s e I_s sono mostrati in figura (20.9-2).

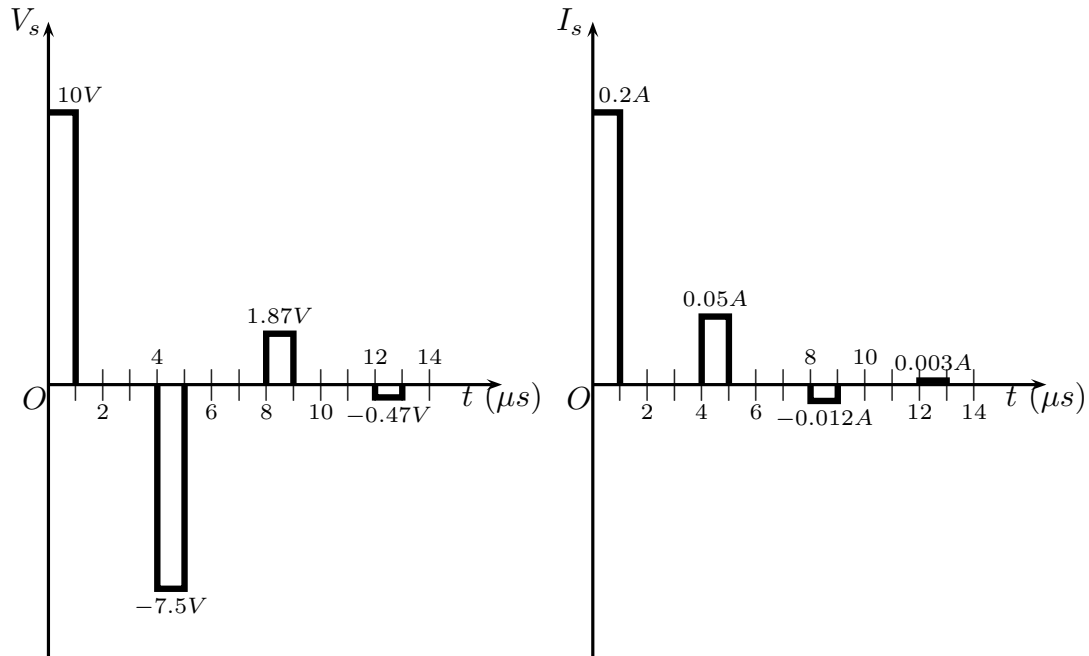


fig.20.9-2

20.10 - Riflessione e Trasmissione in una discontinuità sulla linea

Una discontinuità può esistere ovunque lungo una linea di trasmissione. La figura 20.10-1a rappresenta un caso generale.

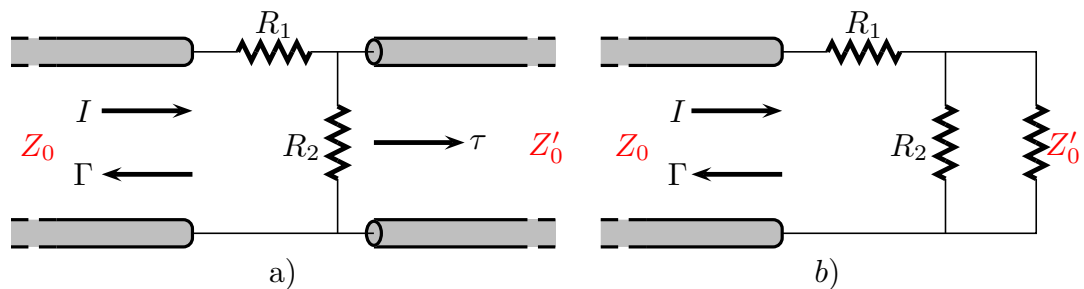


fig.20.10-1

Essa è composta di tre discontinuità separate: 1) Una linea di trasmissione di impedenza caratteristica Z_0 interrotta da una resistenza in serie concentrata R_1 ($R_2 = \infty$, $Z_0 = Z'_0$); 2) Una linea di trasmissione chiusa da una resistenza concentrata R_2

($R_1 = 0$, $Z_0 = Z'_0$); 3) Due linee di trasmissione di impedenze caratteristiche Z_0 e Z'_0 collegate fra loro ($R_1 = 0$, $R_2 = \infty$). È molto più probabile che nella pratica si incontri una delle discontinuità separate. Tuttavia, poichè il caso generale non è difficile da risolvere, verrà presentato.

Un'onda di tensione di ampiezza unitaria è assunta essere incidente sulla discontinuità. L'onda riflessa avrà allora ampiezza Γ e l'onda trasmessa ampiezza τ come mostrato in figura a). Il circuito equivalente per l'onda incidente è mostrato in figura 20.10-1b. Quindi la resistenza equivalente della discontinuità è data da:

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 Z'_0}{R_2 + Z'_0} \quad (20.10.1)$$

Il coefficiente di riflessione che è definito come $\Gamma = V^r/V^i$, è quindi, usando la (20.5.6):

$$\Gamma = \frac{V^r}{V^i} = \frac{R_{eq} - Z_0}{R_{eq} + Z_0} = \frac{R_1 + R_2 Z'_0 / (R_2 + Z'_0) - Z_0}{R_1 + R_2 Z'_0 / (R_2 + Z'_0) + Z_0} \quad (20.10.2)$$

Il coefficiente di trasmissione τ fornisce la parte dell'onda incidente che passa nella seconda linea di trasmissione. Quindi τ è il rapporto fra la tensione che esiste nella combinazione in parallelo di R_2 e Z'_0 e la tensione dell'onda incidente, ossia:

$$\tau = (1 + \Gamma) \frac{R_2 Z'_0 / (R_2 + Z'_0)}{R_1 + R_2 Z'_0 / (R_2 + Z'_0)} = \frac{2R_2 Z'_0}{(R_1 + Z_0)(R_2 + Z'_0) + R_2 Z'_0} \quad (20.10.3)$$

Osserviamo che l'ampiezza dell'onda trasmessa, $1 + \Gamma$, si divide fra R_1 e la seconda linea di trasmissione, che spiega la presenza del fattore moltiplicativo $1 + \Gamma$ nell'equazione (20.10.3).

A titolo di esempio consideriamo una linea di trasmissione di impedenza caratteristica Z_0 sulla quale in qualche punto è posta una resistenza R , come mostrato in figura 20.10-2. Trovare la potenza trasmessa oltre la discontinuità, se la tensione incidente $V^i = 10V$ e $Z_0 = R = 300\Omega$.

Utilizzando la (20.10.2) e la (20.10.3), i coefficienti di riflessione e di trasmissione sono:

$$\Gamma = \frac{-Z_0}{2R + Z_0} \quad e \quad \tau = 1 + \Gamma = \frac{2R}{2R + Z_0} \quad (20.10.4)$$

Applicando la conservazione dell'energia alla discontinuità, noi possiamo stabilire che la potenza dell'onda incidente deve essere eguale alla somma della potenza riflessa, trasmessa e assorbita in R ; cioè:

$$P^i = P^r + P^t + P_R \quad (20.10.5)$$

ossia:

$$\frac{(V^i)^2}{Z_0} = \frac{(\Gamma V^i)^2}{Z_0} + \frac{(\tau V^i)^2}{R} \quad (20.10.6)$$

Così la potenza trasmessa è:

$$P^t = \frac{(V^i)^2}{Z_0} \left(1 - \Gamma^2 - \frac{\tau^2 Z_0}{R} \right) \quad (20.10.7)$$

Utilizzando i valori dati, troviamo che la potenza incidente è $P^i = (V^i)^2/Z_0 = 0.33 \text{ W}$ e la potenza trasmessa è $P^t = \tau^2 P^i = (2/3)^2 \cdot 0.33 = 0.148 \text{ W}$. Quindi solo il 44 per cento della potenza incidente supera la discontinuità.

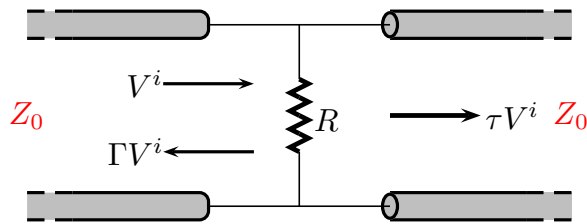


fig.20.10-2

20.11 - Linea di trasmissione con terminazione capacitiva

La riflessione ad una terminazione induttiva o capacitiva, quale quella mostrata in figura 20.11-1 è molto difficile da analizzare perchè ora la relazione fra tensione e corrente attraverso la terminazione è una funzione del tempo. Questo rende il coefficiente di riflessione anche una funzione del tempo.

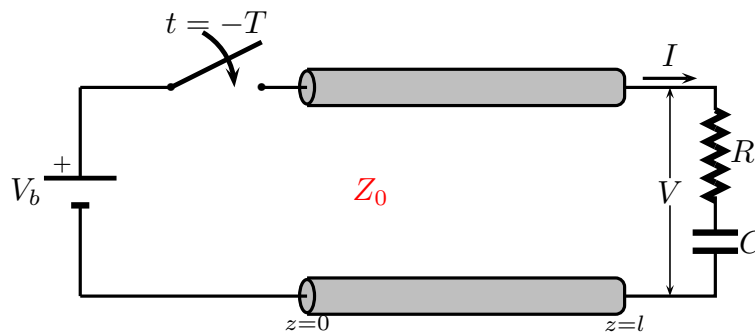


fig.20.11-1

Consideriamo il capacitore C di figura inizialmente scarico; si ha:

$$V_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 I dt = 0 \quad (20.11.1)$$

La tensione totale V attraverso la terminazione è la somma delle tensioni incidente e riflessa ed è correlata alla corrente totale dalla:

$$V = V^i + V^r = RI + \frac{1}{C} \int_0^t I dt \quad (20.11.2)$$

La corrente totale in $z = l$ è analogamente data da:

$$I = I^i + I^r = \frac{V^i}{Z_0} - \frac{V^r}{Z_0} \quad (20.11.3)$$

Derivando la (20.11.2) rispetto al tempo e osservando che $dV^i/dt = 0$, possiamo ottenere una equazione differenziale per la tensione riflessa:

$$\frac{dV^r}{dt} + \frac{V^r}{C(Z_0 + R)} = \frac{V^i}{C(Z_0 + R)} \quad (20.11.4)$$

la cui soluzione è:

$$V^r = V^i \left[1 - \frac{2Z_0}{(Z_0 + R)} e^{-t/C(Z_0 + R)} \right] = V^i \Gamma(t) \quad (20.11.5)$$

dove $V^i = V_b$ e $t = 0$ è l'istante di tempo in cui l'impulso arriva alla terminazione (il switch è chiuso all'istante $t = -T$, dove $T = l/v$). Poichè il condensatore è inizialmente scarico, esso agisce inizialmente (all'istante $t = 0$) come un corto circuito, e la riflessione dell'onda è causata dalla resistenza R . La condizione iniziale che era usata per determinare le costanti sconosciute nella soluzione (20.11.5) è quindi:

$$V^r = V^i \frac{(R - Z_0)}{(R + Z_0)} = V^i \Gamma(0) \quad (20.11.6)$$

La soluzione di cui sopra può essere scelta utilizzando i casi limiti: $R = \infty$ dà $\Gamma = 1$; il condensatore si cortocircuita ponendo $C = \infty$ che dà $\Gamma = (R - Z_0)/(R + Z_0)$; $R = 0$ dà $\Gamma(t) = 1 - 2e^{-t/CZ_0}$.

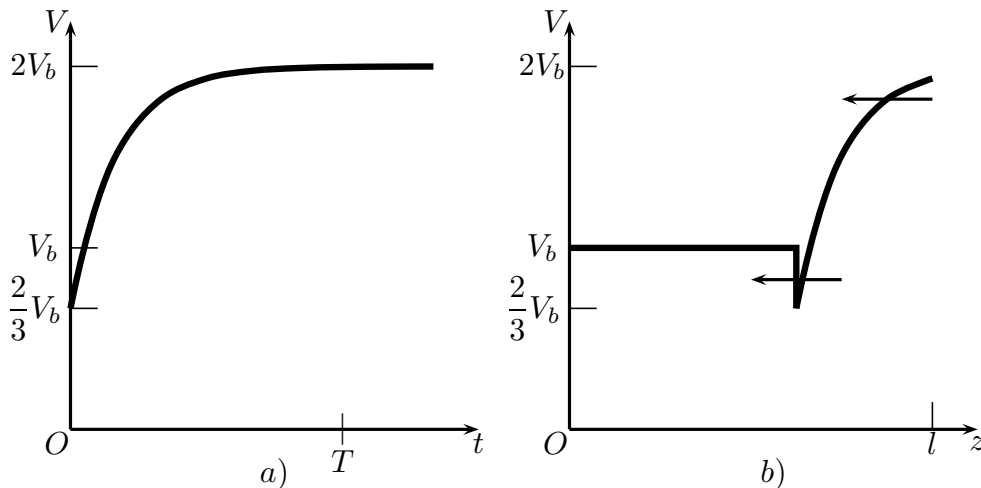


fig.20.11-2

La figura 20.11-2 rappresenta le forme d'onda della tensione totale ai terminali del ricevitore e la tensione totale sulla linea dopo la riflessione per $0 < t < T$. Si è assunto

$R = Z_0/2$. La capacità C viene scelta essere sufficientemente piccola tale che la costante di tempo $(Z_0 + R)C \ll T$. In particolare nel tracciare le figure abbiamo assunto $T = 3$ e la costante di tempo eguale a $0.3 [(1/10)T]$. Il condensatore può essere considerato pienamente carico in un tempo minore di T e quindi si comporta come un circuito aperto.

A titolo di esempio consideriamo una linea di trasmissione mostrata in figura 20.11-3 che ha una discontinuità nel mezzo della linea nella forma di una capacità concentrata C che è inizialmente scarica. Calcolare la forma d'onda della tensione ai terminali d'ingresso, a quelli del ricevitore e ai terminali di C .

All'istante $t = 0$ un gradino di tensione di grandezza $V_s = V_b/2$ inizia ai terminali d'ingresso. All'istante $t \geq T/2$, il gradino di tensione viene riflesso da C con un coefficiente di riflessione $\Gamma(t) = -e^{-2(t - T/2)/CZ_0}$, come dato dalla (20.11.5). La parte trasmessa del gradino di tensione è determinata dal coefficiente di trasmissione $\tau(t) = 1 + \Gamma(t)$ ed è assorbito dalla terminazione adattata Z_0 . Per mostrare la variazione completa della forma d'onda, scegliamo C in modo tale che il tempo di carica sia piccolo rispetto a T ; cioè $Z_0C \ll T$. Il capacitore, una volta pienamente carico, agisce come un circuito aperto e non disturba la linea successiva. La tensione ovunque sulla linea di trasmissione allora si stabilizza al valore $V_b/2$.

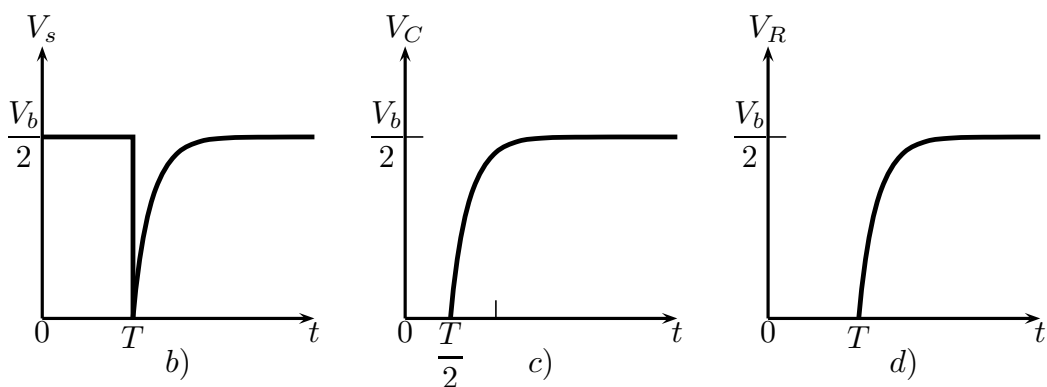
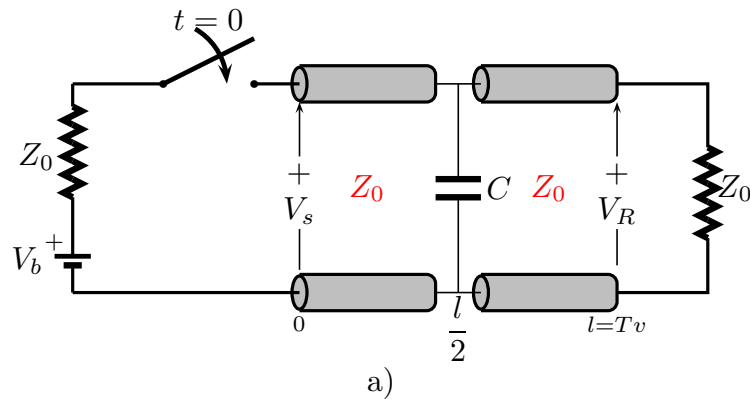


fig.20.11-3

20.12 - Linea di trasmissione priva di perdite con sorgente di tensione sinusoidale

Nei paragrafi precedenti non è stata fatta restrizione alcuna sulle variazioni temporali della tensione applicata alle linee di trasmissione. Poichè la maggior parte dei generatori pratici hanno tensioni di uscita variabili in modo sinusoidale, consideriamo una tensione di frequenza $\nu = \omega/2\pi$:

$$V(0, t) = V \cos \omega t = \Re \left(V e^{i\omega t} \right) \quad (20.12.1)$$

applicata ai terminali d'ingresso in $z = 0$.

La tensione applicata causa un'onda viaggiante sulla linea di trasmissione che è:

$$V(z, t) = \Re \left(V^i e^{i\omega(t - z/v)} \right) \quad (20.12.2)$$

dove la pulsazione ω rappresenta la variazione di fase per unità di tempo e ω/v rappresenta la variazione di fase per unità di lunghezza. La velocità di fase sulla linea è data dalla (20.2.11) ($v = 1/\sqrt{L'C'}$). La costante di propagazione β e la lunghezza d'onda λ sono allora date da $\omega/v = \beta = 2\pi/\lambda$.

Quando è presente la riflessione, la tensione totale e la corrente sulla linea sono costituite da onde che viaggiano in modo opposto che, utilizzando la (20.3.16) e la (20.3.29), sono date da:

$$V(z, t) = \Re \left(V^i e^{i(\omega t - \beta z)} + V^r e^{i(\omega t + \beta z)} \right) \quad (20.12.3)$$

$$I(z, t) = \Re \left[\frac{1}{Z_0} \left(V^i e^{i(\omega t - \beta z)} - V^r e^{i(\omega t + \beta z)} \right) \right] \quad (20.12.4)$$

dove $V^i/I^i = Z_0$ e $V^r/I^r = -Z_0$.

Poichè le tensioni e le correnti ovunque lungo la linea oscillano alla frequenza della tensione applicata, il fattore $e^{i\omega t}$ può essere omissso. Le tensioni e le correnti sono allora scritte nella formula semplice:

$$V(z) = V^i e^{-i\beta z} + V^r e^{+i\beta z} \quad (20.12.5)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} \left(V^i e^{-i\beta z} - V^r e^{+i\beta z} \right) \quad (20.12.6)$$

ricordando che le grandezze effettive sono le tensioni e le correnti istantanee che si ottengono rimoltiplicando per $e^{i\omega t}$ e considerando la parte reale (\Re) delle espressioni risultanti.

In pratica le misure più utili sono quelle rispetto all'estremità ricevente della linea.

pertanto l'origine $z = 0$ è presa all'estremità ricevente, come mostrato in figura (20.12-1).

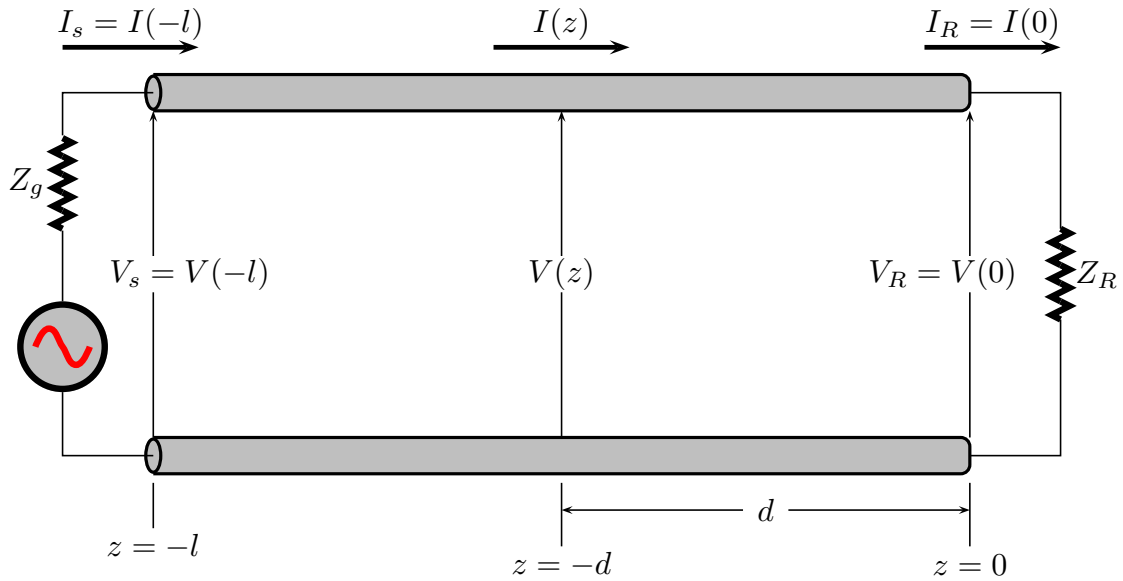


fig.20.12-1

Il coefficiente di riflessione Γ è il rapporto fra la tensione riflessa e quella incidente nel punto di riflessione ($\Gamma = V^r/V^i$). Esso è determinato ponendo $z = 0$ nell'equazione (20.12.5) e (20.12.6). Si ha:

$$V(0) = V^i + V^r \quad (20.12.7)$$

$$I(0) = \frac{1}{Z_0} (V^i - V^r) \quad (20.12.8)$$

$$\frac{V(0)}{I(0)} = Z_0 \frac{V^i + V^r}{V^i - V^r} = Z_0 \frac{1 + \frac{V^r}{V^i}}{1 - \frac{V^r}{V^i}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (20.12.9)$$

Poichè $V(0)/I(0) = V_R/I_R = Z_R$, la 20.12.9 si può scrivere:

$$Z_R = Z_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (20.12.10)$$

$$Z_R - Z_R \Gamma = Z_0 + Z_0 \Gamma \quad (20.12.11)$$

$$Z_R - Z_0 = (Z_R + Z_0) \Gamma \quad (20.12.12)$$

ossia:

$$\Gamma = \frac{V^r}{V^i} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} \quad (20.12.13)$$

Γ è in accordo con la formula (20.5.6) ma ora è valida per un'impedenza di carico complessa. I problemi che coinvolgono carichi reattivi (Γ è una costante complessa) non possono essere gestiti con la stessa facilità di quelli con carichi resistivi (Γ è una costante reale). L'impedenza in una posizione arbitraria $z = -d$ sulla linea può essere trovata dividendo la (20.12.5) per la (20.11.6), mettendo in evidenza il termine $V^i e^{-i\beta z}$ al numeratore e al denominatore.

$$\begin{aligned} Z(-d) &= \frac{V(-d)}{I(-d)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma e^{-i2\beta d}}{1 - \Gamma e^{-i2\beta d}} = Z_0 \frac{1 + \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} e^{-i2\beta d}}{1 - \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} e^{-i2\beta d}} = \\ &= Z_0 \frac{(Z_R + Z_0) + (Z_R - Z_0) e^{-i2\beta d}}{(Z_R + Z_0) - (Z_R - Z_0) e^{-i2\beta d}} = \\ &= Z_0 \frac{Z_R (1 + e^{-i2\beta d}) + Z_0 (1 - e^{-i2\beta d})}{Z_R (1 - e^{-i2\beta d}) + Z_0 (1 + e^{-i2\beta d})} \end{aligned} \quad (20.12.14)$$

$$\begin{aligned} (1 + e^{-i2\beta d}) &= 1 + \cos 2\beta d - i \sin 2\beta d = 1 + \cos^2 \beta d - \sin^2 \beta d - 2i \sin \beta d \cos \beta d = \\ &= 2 \cos^2 \beta d - 2i \sin \beta d \cos \beta d \end{aligned} \quad (20.12.15)$$

$$\begin{aligned} (1 - e^{-i2\beta d}) &= 1 - \cos 2\beta d + i \sin 2\beta d = 1 - \cos^2 \beta d + \sin^2 \beta d + 2i \sin \beta d \cos \beta d = \\ &= 2 \sin^2 \beta d + 2i \sin \beta d \cos \beta d \end{aligned} \quad (20.12.16)$$

L'equazione (20.11.14) si può, allora, scrivere, dopo aver diviso per 2 numeratore e denominatore:

$$Z(d) = Z_0 \frac{Z_R \cos \beta d (\cos \beta d - i \sin \beta d) + i Z_0 \sin \beta d (\cos \beta d - i \sin \beta d)}{Z_0 \cos \beta d (\cos \beta d - i \sin \beta d) + i Z_R \sin \beta d (\cos \beta d - i \sin \beta d)} \quad (20.12.17)$$

Dividendo per il comune fattore $(\cos \beta d - i \sin \beta d)$ si ha, finalmente:

$$Z(d) = Z_0 \frac{Z_R \cos \beta d + i Z_0 \sin \beta d}{Z_0 \cos \beta d + i Z_R \sin \beta d} \quad (20.12.18)$$

Si ha:

$$V(d) = V^i e^{i\beta d} (1 + \Gamma e^{-i2\beta d}) = \frac{V_R}{1 + \Gamma} e^{i\beta d} (1 + \Gamma e^{-i2\beta d}) \quad (20.12.19)$$

$$I(d) = \frac{V^i}{Z_0} e^{i\beta d} (1 - \Gamma e^{-i2\beta d}) = \frac{V_R}{Z_0 (1 + \Gamma)} e^{i\beta d} (1 - \Gamma e^{-i2\beta d}) \quad (20.12.20)$$

Si noti che d è una distanza positiva misurata dall'estremità ricevente. L'espressione (20.11.18) mostra che l'impedenza della linea è periodica (con periodo $\beta d = \pi$) e varia fra valori massimi e minimi attorno a Z_0 . Moltiplicando numeratore e denominatore della (20.11.18) per I_R/Z_0 , e tenendo conto che $V_R = Z_R I_R$, la tensione e la corrente dovunque sulla linea sono determinate da:

$$V(d) = V_R \cos \beta d + i I_R Z_0 \sin \beta d \tag{20.12.21}$$

$$I(d) = I_R \cos \beta d + i \frac{V_R}{Z_0} \sin \beta d \tag{20.12.22}$$

Ponendo nelle equazioni (20.12.21) e (20.12.22) $d = l$ si ottengono la tensione e la corrente ai terminali di ingresso V_s e I_s in termini di V_R e I_R . Infatti $V(d = l) = V_s$ e $I(d = l) = I_R$.

È importante osservare che spesso è necessario avere una espressione in termine di quantità riferite ai terminali d'ingresso ossia V_s , I_s e Z_s . Ponendo $V(z = 0) = I_s Z_s$ e $I(z = 0) = I_s$ nella (20.12.5) e (20.12.6) e risolvendo per V^i e V^r , otteniamo:

$$V(z) = V_s \cos \beta z - i I_s Z_0 \sin \beta z \tag{20.12.23}$$

$$I(z) = I_s \cos \beta z - i \frac{V_s}{Z_0} \sin \beta z \tag{20.12.24}$$

dove $Z_s = V_s/I_s$ e z è una distanza positiva misurata dai terminali d'ingresso e che in questo caso è a $z = 0$. Le quantità ai terminali di ingresso ed ai terminali del ricevitore possono essere correlati ponendo $z = l$, dove $V_R = V(l)$ e $I_R = I(l)$; così:

$$V_R = V_s \cos \beta l - i I_s Z_0 \sin \beta l \tag{20.12.25}$$

$$I_R = I_s \cos \beta l - i \frac{V_s}{Z_0} \sin \beta l \tag{20.12.26}$$

Consideriamo come esempio un cavo coassiale RG-58C/U che ha una impedenza caratteristica di 50Ω ed una velocità di propagazione di $200 \text{ m}/\mu\text{s}$. Calcolare l'impedenza di ingresso di un cavo di 50 metri che termina su un carico di 25Ω . La frequenza operativa è 27 MHz . Si ha:

$$\beta d = \frac{\omega}{v} d = \frac{2\pi(27 \cdot 10^6)}{200 \cdot 10^6} 50 = 42.41 \text{ rad}. \tag{20.12.27}$$

Utilizzando la (20.12.18), risulta:

$$Z(d) = 50 \frac{25 + i50 \tan 42.41}{50 + i25 \tan 42.41} = 100 \Omega \tag{20.12.28}$$

Due casi sono di speciale interesse:

1. Una linea cortocircuitata ai terminali del ricevitore ha $Z_R = 0$, e quindi $V_R = 0$, Sostituendo $Z_R = 0$ nella (20.12.18), l'impedenza d'ingresso è:

$$Z_{sc} = i Z_0 \tan \beta d \tag{20.12.29}$$

essendo $sc=$ short-circuit.

Poichè nessuna potenza può essere dissipata in un corto circuito, l'impedenza di ingresso di una linea cortocircuitata è puramente reattiva.

La figura 20.12-2a mostra la variazione della reattanza con la distanza d dal cortocircuito.

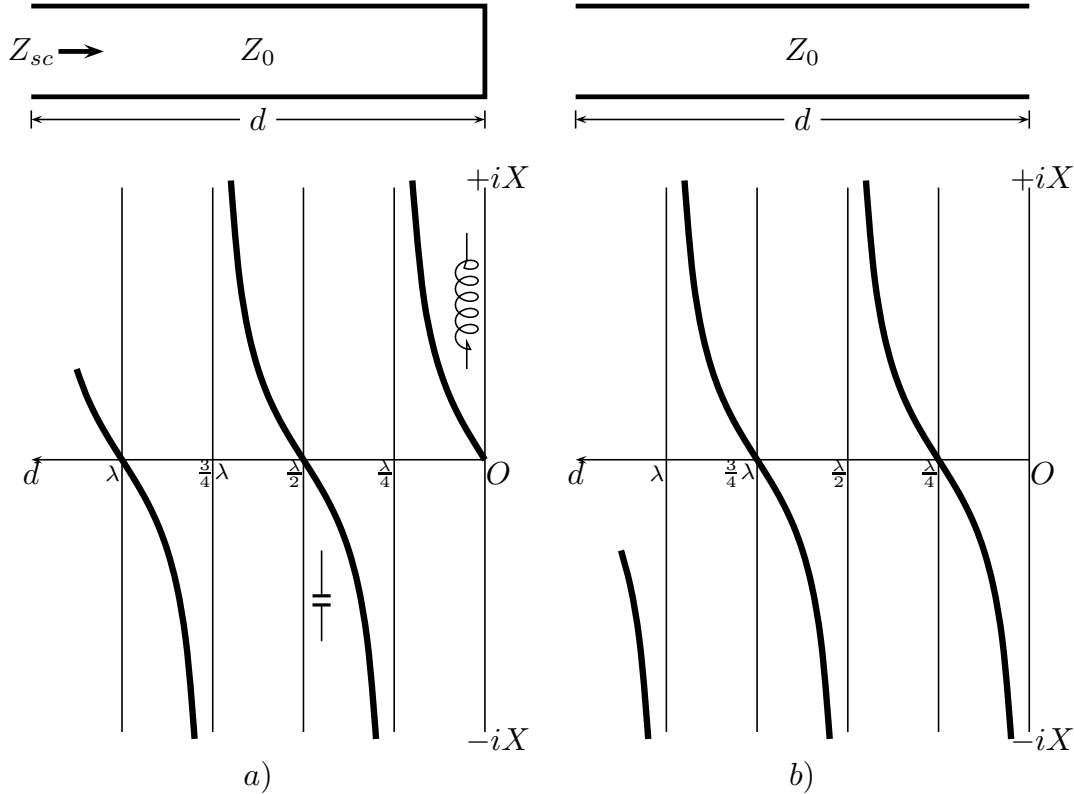


fig.20.12-2

Osserviamo che per $d < \lambda/4$, la linea cortocircuitata è induttiva, e per $\lambda/4 < d < \lambda/2$, essa è capacitiva. Per $d = \lambda/4$, l'impedenza d'ingresso è teoricamente infinita, e la linea agisce come un circuito antirisonante comparabile ad un circuito LC parallelo a costanti concentrate. Per $d = \lambda/2$, l'impedenza d'ingresso è zero e la linea agisce come un circuito risonante nel senso di un circuito LC in serie a costanti concentrate. Il grafico si ripete con periodicità di $\lambda/2$.

2. Una linea che è un circuito aperto ai terminali del ricevitore ha $Z_R = \infty$, e quindi $I_R = 0$. Sostituendo $Z_R = \infty$ nella 20.11.18, l'impedenza d'ingresso diventa:

$$Z_{oc} = -iZ_0 \cot \beta d \tag{20.12.30}$$

essendo $oc=$ open circuit. La figura 20.12-2 b) mostra l'impedenza d'ingresso di una linea a circuito aperto. Essa è capacitiva per $d < \lambda/4$ ed induttiva per $\lambda/4 < d < \lambda/2$ e così via. Una linea in cortocircuito induttiva equivale quindi a una linea a circuito aperto più lunga di $\lambda/4$.

Poichè un cortocircuito o un circuito aperto non può accettare l'alimentazione, deve avvenire una riflessione completa su tali terminazioni; cioè $|\Gamma| = 1$. Per la stessa ragione

riflessione completa si ha anche ad una terminazione reattiva, $\pm iX_R$, che dà un coefficiente di riflessione $|\Gamma| = |(\pm iX_R - Z_0) / (\pm iX_R + Z_0)| = 1$. Questo non è inaspettato poiché ogni terminazione puramente reattiva è equivalente ad una lunghezza finita di linea cortocircuitata o a circuito aperto. Quindi un carico che è un induttore o un condensatore può essere sostituito da una sezione di linea cortocircuitata o a circuito aperto.

In conclusione, una terza risposta alla domanda di cosa è l'impedenza caratteristica può essere stabilita come segue: Z_0 è la radice quadrata del prodotto dell'impedenza d'ingresso di una linea di trasmissione di lunghezza finita cortocircuitata e a circuito aperto; cioè:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{sc}Z_{op}}$$

**Impedenza
Caratteristica** (20.12.31)

Come esempio consideriamo una linea di trasmissione senza perdite per la quale $Z_0 = 400\Omega$, lunga un quarto di lunghezza d'onda. I terminali di ingresso sono connessi ad un generatore che ha una impedenza interna $Z_g = 50\Omega$ ed una tensione $V_g = 10V$. Calcolare la tensione ai terminali del ricevitore che è un circuito aperto. Utilizzando le formule (20.12.22) e (20.12.23) e sostituendo $\beta d = \pi/2$, risulta:

$$V_R = -iI_s Z_0 \tag{20.12.32}$$

I_s può essere trovata dal circuito equivalente d'ingresso. Utilizzando la (20.12.30), otteniamo $Z_s = 0$ che comporta $I_s = V_g/Z_g = 0.2 A$. La tensione ai capi del ricevitore è quindi:

$$V_R = -i(0.2)(400) = -i80 V \tag{20.12.33}$$

In termini di valori istantanei, $V_g(t) = \sqrt{2}(10 \cos \omega t)$ e $V_R(t) = \sqrt{2}(80 \sin \omega t)$. La linea aperta $\lambda/4$ agisce quindi come un dispositivo di salto di tensione. Osserviamo che il salto di tensione V_R/V_s è infinito, come per un circuito aperto a quarto d'onda senza perdite è zero.

20.13 - Rapporto di onda stazionaria S

Poichè le onde che viaggiano in modo opposto, vedi equazione (20.12.5), subiscono diversi cambiamenti di fase, ci saranno posizioni di massimi e minimi di tensione sulla linea, corrispondenti a posizioni di interferenza costruttiva e distruttiva. Il "Standing-wave ratio S " ("Rapporto d'onda stazionaria S ") è definito come il rapporto fra l'intensità della tensione massima e quella della tensione minima,

$$S = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{|V^i| + |V^r|}{|V^i| - |V^r|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad \text{Rapporto d'onda Stazionaria} \quad (20.13.1)$$

dove $\Gamma = V^r/V^i$. A seconda dell'intensità dell'onda riflessa, il valore di S può variare da uno a infinito. S può essere espresso altrettanto bene in termini di corrente; cioè, $S = I_{max}/I_{min}$, dove $I_{max} = (|V^i| + |V^r|)/Z_0$ e $I_{min} = (|V^i| - |V^r|)/Z_0$. Il rapporto d'onda stazionaria è correlato al coefficiente di riflessione come:

$$|\Gamma| = \frac{S - 1}{S + 1} \quad \text{Coefficiente di Riflessione} \quad (20.13.2)$$

S è facilmente misurabile spostando una sonda lungo una linea aperta o, per una linea coassiale, tagliando una sottile fessura assiale nel cilindro esterno lungo la quale la sonda può essere spostata. La sonda è connessa ad un rivelatore che legge i valori assoluti della variazione nella tensione lungo la linea. Per esempio, se la linea termina con una pura resistenza R_R , il rivelatore leggerà utilizzando la (20.12.21) e la (20.12.22),

$$|V(d)| = V_R \sqrt{\cos^2 \beta d + (Z_0/Z_R)^2 \sin^2 \beta d} = V^i \sqrt{(1 + \Gamma)^2 \cos^2 \beta d + (1 - \Gamma)^2 \sin^2 \beta d} \quad (20.13.3)$$

$$|I(d)| = I_R \sqrt{\cos^2 \beta d + (R_R/Z_0)^2 \sin^2 \beta d} \quad (20.13.4)$$

dove:

$$V_R = I_R R_R, \quad V_R = V^i + V^r, \quad I_R = (V^i - V^r)/Z_0 \quad (20.13.5)$$

Poichè la (20.13.3) e la (20.13.4) sono periodiche con periodo $\beta d = \pi$, la distanza fra i minimi sulla linea è $d = \lambda/2$.

Una posizione dove le onde riflessa e incidente interferiscono per dare un massimo di tensione, è un posizione di minimo in corrente. Questo risultato è una diretta conseguenza del segno meno nella (20.12.6). In questa posizione sulla linea l'impedenza è un massimo ed è puramente resistiva:

$$R_{max} = \frac{V_{max}}{I_{min}} = Z_0 \frac{|V^i| + |V^r|}{|V^i| - |V^r|} = Z_0 S \quad (20.13.6)$$

Analogamente, V_{min} , I_{max} , e R_{min} avvengono insieme, un quarto di lunghezza d'onda da V_{max} , I_{min} , e R_{max} :

$$R_{min} = \frac{V_{min}}{I_{max}} = Z_0 \frac{|V^i| - |V^r|}{|V^i| + |V^r|} = \frac{Z_0}{S} \quad (20.13.7)$$

R_{min} è di nuovo puramente resistivo. Ricordiamo che per una linea senza perdite, Z_0 è una pura resistenza.

La distribuzione della tensione e della corrente per cinque differenti terminazioni sono graficate in figura 20.13-1 utilizzando l'equazione (20.13.3) e l'equazione (20.13.4). Le variazioni sono simili a quelle dei campi nelle onde piane. Le seguenti osservazioni possono ora essere fatte: Per terminazioni puramente resistive, la terminazione ricevente è una posizione di impedenza massima o minima. Questo segue o dalle formule (20.13.6) e (20.13.7) o direttamente dal calcolo di S , che per terminazione puramente resistiva comporta:

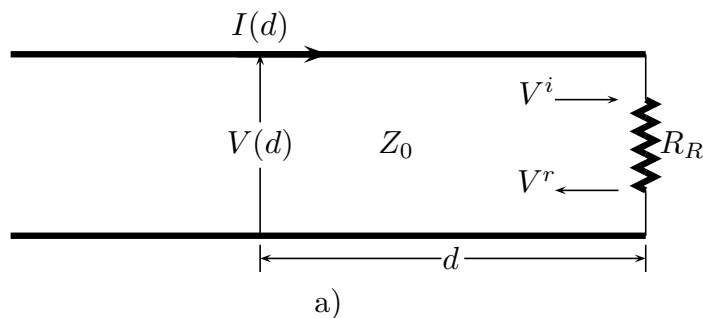
$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + (R_R - Z_0)/(R_R + Z_0)}{1 - (R_R - Z_0)/(R_R + Z_0)} \quad (20.13.8)$$

ossia:

$$S = \begin{cases} \frac{R_R}{Z_0} & \text{per } R_R > Z_0 \\ \frac{Z_0}{R_R} & \text{per } R_R < Z_0 \end{cases} \quad (20.13.9)$$

Il valore di una impedenza sconosciuta alla terminazione ricevente può ora essere facilmente determinato da misure relative della tensione e della corrente lungo la linea, a condizione che l'estremità ricevente sia una posizione di massimo o minimo. Se questo è il caso, la terminazione sconosciuta è puramente resistiva ed ha un valore $R_R = Z_0(V_{max}/V_{min})$ o $R_R = Z_0(V_{min}/V_{max})$, dove Z_0 può essere calcolato dalle dimensioni della linea o ottenuto direttamente dalle misure come:

$$Z_0 = \frac{V_{min}}{I_{min}} = \frac{V_{max}}{I_{max}} \quad (20.13.10)$$



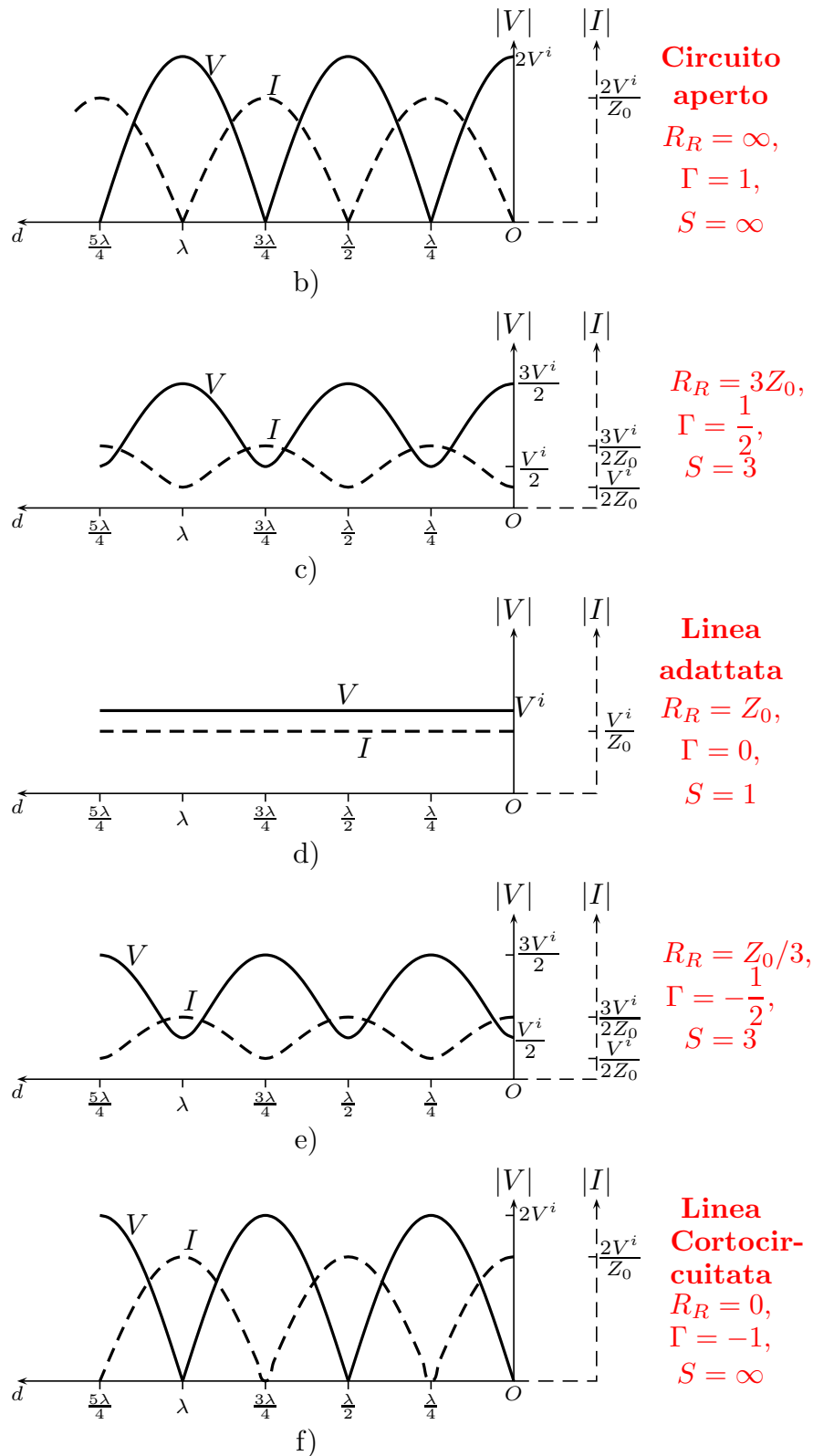


fig.20.13-1

20.14 - Determinazione di un'impedenza sconosciuta

Supponiamo che la linea di trasmissione sia chiusa da una impedenza sconosciuta. Se la tensione massima o minima si trova in una posizione diversa dall'estremità ricevente, l'impedenza sconosciuta Z_R è complessa ed ha una parte resistiva ed una parte reattiva.

Per determinare Z_R , il coefficiente di riflessione Γ deve essere determinato prima. Z_R è allora data dalla (20.12.10):

$$Z_R = Z_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = Z_0 \frac{1 + |\Gamma|e^{i\theta}}{1 - |\Gamma|e^{i\theta}} \quad (20.14.1)$$

Il valore assoluto di Γ è determinato da una misura del rapporto di onda stazionaria S della linea che termina in Z_R ; cioè:

$$|\Gamma| = \frac{(S - 1)}{(S + 1)} \quad (20.14.2)$$

Per determinare l'angolo di fase θ di Γ , la distanza da Z_R al primo minimo della tensione è necessaria.¹⁾ Un minimo di tensione si ha quando la fase $2\beta d$ di $\Gamma e^{-i2\beta d}$ nella (20.12.19) è 180° . Cioè:

$$\Gamma e^{-i2\beta d} = |\Gamma|e^{i(\theta - 2\beta d)} = |\Gamma|e^{-i\pi} \quad (20.14.3)$$

ossia:

$$\theta = -\pi + 2\beta d_{min} \quad (20.14.4)$$

Il coefficiente di riflessione dovuto ad una terminazione sconosciuta è quindi:

$$\Gamma = |\Gamma|e^{i\theta} = \frac{S - 1}{S + 1} e^{i(-\pi + 2\beta d_{min})} \quad (20.14.5)$$

La figura (20.14-1) mostra due casi di terminazioni reattive. La figura a) la terminazione induttiva; la figura b) la terminazione capacitiva.

¹⁾ Il minimo, piuttosto del massimo, è scelto perchè il minimo è più chiaro.

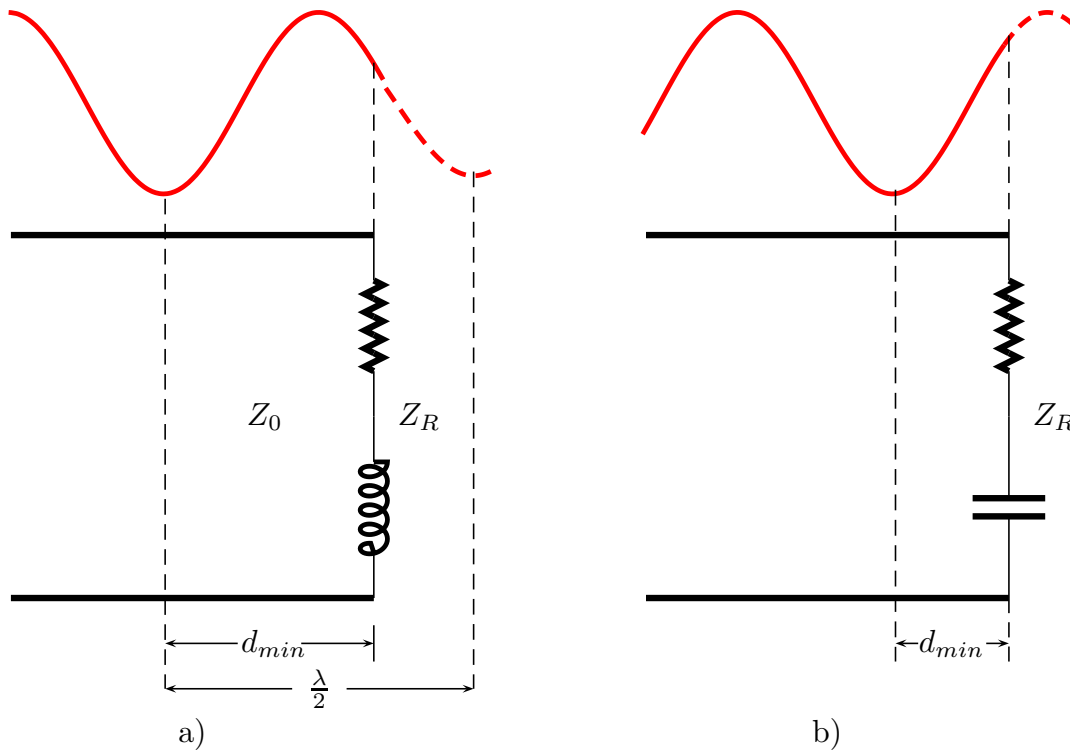


fig.20.14-1

Consideriamo il seguente Esempio: Una linea di trasmissione di impedenza caratteristica 300 Ohm termina su una impedenza di carico sconosciuta Z_R . Il rapporto d'onda stazionaria misurato è $S = 3$, la distanza fra i minimi è 50 cm , e la distanza fra Z_R al primo minimo vale 30 cm . Calcolare Z_R .

La componente reale e immaginaria di Z_R , dall'equazione (20.14.1), può essere espressa direttamente in termini di S e d_{min} come:

$$R = \frac{SZ_0}{S^2 \cos^2 \beta d_{min} + \sin^2 \beta d_{min}} \quad (20.14.6)$$

$$X_R = \frac{-Z_0 (S^2 - 1) \cos \beta d_{min} \sin \beta d_{min}}{S^2 \cos^2 \beta d_{min} + \sin^2 \beta d_{min}} \quad (20.14.7)$$

dove $Z_R = R_R + iX_R$. La lunghezza d'onda è $\lambda = 100 \text{ cm}$, e $\beta d_{min} = (2\pi/\lambda)d_{min} = (2\pi/100)30 = 188$, che fornisce $Z_R = 510.22 + i399.87 \text{ } \Omega$.

20.15 - Potenza trasferita da una linea

La potenza media trasmessa lungo una linea e consegnata al carico è:

$$P_R = \frac{1}{2} \Re(VI^*) \quad (20.15.1)$$

dove V e I sono la tensione totale e la corrente totale e l'asterisco denota il complesso coniugato. Per una linea senza perdite per cui Z_0 è reale, utilizzando la (20.12.19) e la (20.12.20) risulta:

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{|V^i|^2}{Z_0} (1 + \Gamma e^{-i\beta 2d}) (1 - \Gamma^* e^{+i\beta 2d}) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{|V^i|^2}{Z_0} (1 - |\Gamma|^2 + \Gamma e^{-i\beta 2d} - \Gamma^* e^{+i\beta 2d}) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V^i|^2}{Z_0} (1 - |\Gamma|^2) \end{aligned} \quad (20.15.2)$$

essendo $\Gamma e^{-i\beta 2d} - \Gamma^* e^{+i\beta 2d}$ puramente immaginario. **Il primo termine è la potenza associata all'onda incidente**, $P^i = |V^i|^2/2Z_0$; **il secondo termine rappresenta la potenza associata all'onda riflessa**. La potenza massima è consegnata al carico quando il carico è adattato nella linea ($Z_R = Z_0; \Gamma = 0$) perchè allora la potenza associata all'onda incidente è assorbita dal carico. Per consegnare la stessa potenza al carico quando le riflessioni sono presenti bisogna aumentare la potenza dell'onda incidente; le più alte tensioni risultanti per aumentare la potenza possono causare la rottura dell'isolamento sulla linea. Condizioni operative ottimali richiedono quindi un valore del rapporto d'onda stazionaria il più vicino possibile a uno. L'espressione (20.15.2) si può scrivere:

$$\frac{P_R}{P^i} = 1 - |\Gamma|^2 = \frac{4S}{(1+S)^2} \quad (20.15.3)$$

La (20.15.3) fornisce il rapporto fra la potenza P_R che è assorbita dal carico e la potenza P^i che raggiungerebbe il carico se il sistema (linea di trasmissione e carico) fosse adattato. **Un sistema adattato ha quindi la massima capacità di potenza.**

La capacità di potenza, basata sul breakdown dell'isolatore ($V_{max} < V_{diel. breakdown}$), può essere espressa utilizzando la (20.15.2) e la (20.13.9):

$$P_R = \frac{1}{2} \frac{|V^i|^2}{Z_0} (1 - |\Gamma|)(1 + |\Gamma|) = \frac{1}{2} \frac{|V^i|^2}{Z_0} \frac{(1 + |\Gamma|)^2}{S} = \frac{1}{2} \frac{V_{max}^2}{Z_0 S} \quad (20.15.4)$$

che mostra che per la stessa potenza consegnata al carico, V_{max} deve aumentare del fattore \sqrt{S} come S aumenta. Ogni deviazione dalla condizione di adattamento ($S = 1$) aumenta la tensione.

Come esempio consideriamo una linea di impedenza caratteristica di 50Ω chiusa da un carico di 50Ω che trasmette una potenza di 450 Watt che risulta in una tensione di $\sqrt{450 \cdot 50} = 150V$ sulla linea. La stessa linea con un carico di 500Ω avrebbe una tensione massima di $150(1 + |\Gamma|) = 150(1 + 9/11) = 273 V (rms)$ (rms=root mean square). Così una variazione del rapporto d'onda stazionaria da $S = 1$ a $S = 10$ praticamente raddoppia la tensione massima sulla linea. Se la linea adattata opera vicino alla tensione massima, la linea non adattata può andare in breakdown. Se la posizione delle tensione massima coincide con i terminali di uscita dal trasmettitore, si possono causare danni agli elementi a stato solido nel trasmettitore che sono particolarmente sensibili alle sovratensioni.

20.16 - Adattamento e trasformazione dell'impedenza

In generale è desiderabile: 1) adattare l'impedenza di carico alla linea per eliminare le onde riflesse; 2) adattare l'impedenza del generatore alla linea per avere il massimo trasferimento di potenza dal generatore alla linea.

Adattamento d'impedenza utilizzando linee di derivazione (Stub Lines)

Una impedenza di carico complessa può essere adattata ad una linea senza perdite aggiungendo la reattanza di un filo più corto o in serie o shuntato alla linea come mostrato in figura 20.16-1.

Uno studio dell'equazione (20.12.18) mostra che l'impedenza $Z(d)$ di una linea, che termina in un carico di impedenza complessa Z_R , ha ad una certa distanza d_1 sulla linea una parte reale che è Z_0 ; cioè $Z(d_1) = Z_0 + iX$. Se a questa distanza la linea viene interrotta e ad essa viene aggiunta una reattanza $-iX$ in serie, la combinazione della linea e della reattanza avrà un'impedenza $(Z_0 + iX) - iX = Z_0$. La linea appare essere terminata in d_1 nella sua impedenza caratteristica ed è quindi adattata. Fra i terminali iniziali e d_1 la linea è compensata con $S = 1$.

In pratica, per gli adattamenti vengono utilizzati tronchi shunt poichè la discontinuità creata dall'interruzione della linea disturba i campi della linea. Per determinare la posizione del tronco, è più facile se i calcoli sono fatti sulla base dell'ammettenza. L'ammettenza $Y(d)$ della linea può essere ottenuta dall'inverso dell'equazione (20.12.18):

$$Y(d) = Y_0 \frac{Y_R + iY_0 \tan \beta d}{Y_0 + iY_R \tan \beta d} \quad (20.16.1)$$

essendo $Y_R = 1/Z_R$ e $Y_0 = 1/Z_0$. Assumiamo che il rapporto d'onda stazionaria S è causato da un carico puramente resistivo $R_R > Z_0$, allora $S = R_R/Z_0$ come stabilito dall'equazione (20.13.9), il carico è ad una posizione di massimo voltaggio, e la distanza dal carico ad un punto d_1 sulla linea dove la parte reale della (20.16.1) è eguale ad Y_0 è data da:

$\tan \beta d_1 = \sqrt{S}$

(20.16.2)

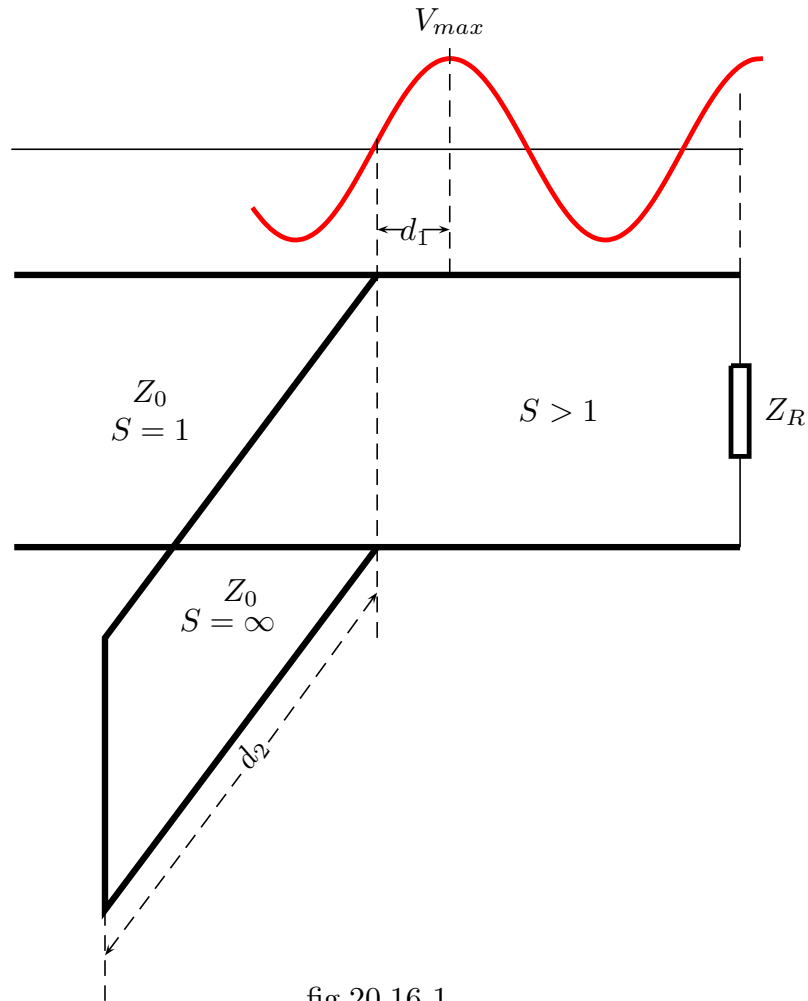


fig.20.16-1

Un tronco più corto ha una ammettenza puramente immaginaria che dalla (20.12.29) è eguale a $Y_{st} = -iY_0 \cot \beta d_2$. Se il tronco è connesso a d_1 , la parte immaginaria della (20.16.1) sarà cancellata se la lunghezza del tronco d_2 è data dalla seguente equazione:

$$\boxed{\tan \beta d_2 = \frac{\sqrt{S}}{S - 1}} \quad (20.16.3)$$

che lascia la linea con una terminazione uguale a Y_0 a d_1 . La linea è quindi adattata poichè un'onda incidente non è riflessa nella posizione dello stub anche se le onde riflesse esistono fra lo stub ed il carico.

Nel caso di un carico con impedenza complessa la linea è adattata quando la posizione dello stub è ad una distanza d_1 misurata da qualsiasi tensione massima verso i terminali d'ingresso come mostrato in figura 20.16-1. La condizione di adattamento è indicata dalla tensione invariabile a sinistra della posizione dello stub. Quindi, ogni carico con impedenza (complessa o reale, conosciuta o sconosciuta) può essere adattata alla linea se il rapporto d'onda stazionaria S e la posizione di V_{max} che il carico produce può essere misurato o calcolato. Le equazioni per l'adattamento dello stub sono le (20.16.2) e (20.16.3).

Teoricamente uno stub a circuito aperto può essere usato per cancellare la parte immaginaria di $Y(d)$. In pratica, tuttavia, gli stubs a corto-circuito sono usati perchè un corto è meno sensibile ad influenze esterne e radia meno di un circuito aperto.

Ogni impedenza di carico (tranne una puramente reattiva) può essere adattata con un singolo stub cortocircuitato. Tuttavia la posizione di uno stub sulla linea (specialmente su una linea coassiale) non può essere facilmente cambiata se un carico variabile richiede il riadattamento. Quando con un singolo stub l'adattamento non è ben realizzabile, l'adattamento con doppio stub, ossia con due stub la cui lunghezza possa essere variata, può essere usato. La posizione degli stubs sulla linea è arbitraria ma rimane fissa durante la procedura di adattamento. L'adattamento è accompagnato dalla variazione della lunghezza dei due stubs. Un sistema a doppio stub può adattare un largo range di impedenze, non può adattare tutte le impedenze.

Per meglio capire l'adattamento con singolo stub, portiamo il seguente esempio: Progettare un sistema a singolo stub per adattare un carico di ammettenza $Y_R = 0.0275 + i0.0175$ ad una linea di impedenza caratteristica di 100Ω .

Il coefficiente di riflessione Γ e la distanza d_{min} , equazione (20.14.4), dal carico al primo minimo di tensione è necessario prima.

$$\Gamma = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = \frac{Y_0 - Y_R}{Y_0 + Y_R} = \frac{1 - Y_R/Y_0}{1 + Y_R/Y_0} = \frac{1 - (2.75 + i1.75)}{1 + (2.75 + i1.75)} = 0.598e^{-i2.793} \quad (20.16.4)$$

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.598}{0.598} = 3.976 \quad (20.16.7)$$

$$d_{min} = \frac{\theta + \pi}{2\beta} = \frac{-2.793 + \pi}{4\pi} \lambda = 0.0277\lambda \quad (20.16.8)$$

Utilizzando le equazioni (20.16.2) e (20.16.3) si ha:

$$d_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \sqrt{3.976} = 0.176\lambda \quad (20.16.9)$$

$$d_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \frac{\sqrt{3.976}}{3.976 - 1} = 0.0939\lambda \quad (20.16.10)$$

Lo stub che ha la stessa impedenza caratteristica della linea, ha una lunghezza di 0.0939λ ed è posto attraverso la linea ad una distanza $d_1 = 0.176\lambda$ (verso il generatore) da qualsiasi tensione massima. La distanza della posizione dello stub dal carico è:

$$d = d_{min} + \lambda/4 + d_1 = 0.454\lambda \quad (20.16.11)$$

Un sistema di stub alternativo utilizzando la (20.16.3) è dato da:

$$d_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \sqrt{\frac{1}{3.976}} = 0.0740\lambda \quad (20.16.11)$$

$$d_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \left(\arctan \sqrt{\frac{3.976}{1 - 3.976}} + \pi \right) = 0.406\lambda \quad (20.16.12)$$

La posizione di questo stub dal carico è $d = d_{min} + d_1 = 0.102\lambda$. Se questa posizione è più vicina al carico rispetto al precedente, è preferita poichè il più della linea opera sotto condizione di adattamento.

20.17 - Trasformatore a mezz'onda

Uno studio dell'equazione (20.12.18) mostra che le impedenze si ripetono ad intervalli di $\lambda/2$. L'impedenza di uscita di una linea di mezza lunghezza d'onda che termina in Z_R è:

$$Z\left(\frac{\lambda}{2}\right) = Z_0 \frac{Z_R \cos \pi + iZ_0 \sin \pi}{Z_0 \cos \pi + iZ_R \sin \pi} = Z_R \quad (20.17.1)$$

Una linea a mezz'onda è quindi un trasformatore 1 a 1. Essa è utile nella connessione del carico alla sorgente quando essi non sono adiacenti l'uno con l'altra.

Consideriamo il seguente esempio. Il trasferimento di potenza massima risulta quando la resistenza del carico si adatta alla resistenza del generatore. Per il trasferimento di massima potenza un generatore di 50Ω dovrebbe essere collegato ad un carico di 50Ω per mezzo di una linea di impedenza caratteristica di 50Ω . Se la linea disponibile ha $Z_0 = 300 \Omega$ e $v_p = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, trovare la lunghezza della linea per il massimo trasferimento di potenza ad una frequenza di 27 MHz .

Se la lunghezza l è scelta essere un numero intero di mezza lunghezze d'onda la impedenza sarà vista ai terminali d'ingresso. Quindi:

$$l = n(\lambda/2) = n \left[(2 \cdot 10^8) / 2 \cdot 27 \cdot 10^6 \right] = n3.7 \text{ m} \quad n = 1, 2, \dots \quad (20.17.2)$$

La linea a 300Ω opererà con un rapporto d'onda stazionaria di $S = Z_0/R_R = 300/50 = 6$. Poichè il trasformatore a mezz'onda non dipende da Z_0 , una linea di qualsiasi impedenza caratteristica darà un perfetto adattamento fintanto che viene rispettata la restrizione di lunghezza di $n(\lambda/2)$. Solo il rapporto d'onda stazionaria aumenterà quando l'impedenza caratteristica devia da R_R . Se i parametri (R', G') della linea sono tali che l'approssimazione di linea senza perdite è valida, le maggiori perdite dovute al funzionamento della linea con un elevato rapporto di onda stazionaria S saranno insignificanti finchè non si verifica la rottura dell'isolamento dovuta all'aumento della tensione. La linea a 300Ω opera ad una tensione che è più grande della tensione di una linea a 50Ω di un fattore $V_{max}/V^i = \sqrt{S} = \sqrt{6} = 2.45$ (vedi l'equazione (20.15.4)). La figura (20.17-1) mostra la distribuzione della tensione su una linea di lunghezza $l = 7.4 \text{ m}$ (una lunghezza d'onda).

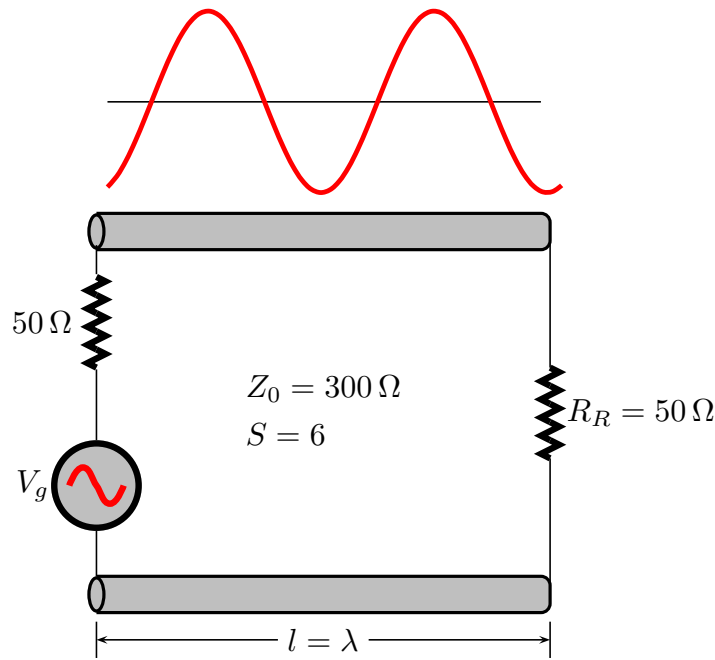


fig.20.17-1

20.18 - Trasformatore a quarto d'onda

Una linea di un quarto di lunghezza d'onda è un invertitore di impedenza poichè la sua impedenza (utilizzando l'equazione (20.12.18)):

$$Z_s = Z \left(\frac{\lambda}{4} \right) = Z_0 \frac{Z_R \cos(\pi/2) + iZ_0 \sin(\pi/2)}{Z_0 \cos(\pi/2) + iZ_R \sin(\pi/2)} = \frac{Z_0^2}{Z_R} \quad (20.18.1)$$

varia inversamente con Z_R . Essa può essere considerata un trasformatore per adattare un carico di Z_R Ohm ad un generatore di Z_s Ohm. La sezione di adattamento deve avere una impedenza caratteristica che è la media geometrica del generatore e dell'impedenza del carico; ossia:

$$Z_0 = \sqrt{Z_s Z_R} \quad (20.18.2)$$

Le sezioni a quarto d'onda sono frequentemente usate per adattare (1) due linee di trasmissione di impedenza caratteristica differenti, e (2) una linea di trasmissione ad un carico resistivo quale un'antenna.

Come primo esempio consideriamo una sezione ad un quarto di lunghezza d'onda per adattare un dipolo a $\lambda/2$ la cui resistenza di antenna è 75Ω ad una linea di trasmissione di $Z_0 = 50 \Omega$.

Utilizzando la (20.18.1), il trasformatore a quarto d'onda deve avere una impedenza caratteristica di $Z_0 = \sqrt{50 \cot 75} = 61.3 \Omega$. Il sistema adattante è mostrato in figura 20.18-1 a).

Come secondo esempio consideriamo una sezione a quarto d'onda per adattare un carico di impedenza complessa Z_R ad una linea la cui impedenza è Z_0 (notare che per linee senza perdite, Z_0 è reale).

Un trasformatore a quarto d'onda trasforma un'impedenza complessa in un'altra impedenza complessa. Quindi Z_R deve prima essere convertita in una pura resistenza aggiungendo un'appropriata lunghezza di linea a Z_R . Se la lunghezza è scelta essere d_{min} , (20.14.4), che è la distanza alla prima tensione minima, allora l'impedenza d'ingresso è puramente resistiva ed ha un valore $R_{min} = Z_0/S$ secondo la (20.13.7). Non essendo dati nè S nè d_{min} , entrambi devono essere calcolati calcolando prima il coefficiente di riflessione $\Gamma = (Z_R - Z_0)/(Z_R + Z_0) = |\Gamma|e^{i\theta}$. Il rapporto di onda stazionaria S e la distanza d_{min} sono allora determinate da $S = (1 + |\Gamma|)/(1 - |\Gamma|)$ e $d_{min} = (\theta + \pi)/2\beta$. L'impedenza caratteristica del trasformatore a quarto d'onda è allora data dalla (20.18.1) come $\sqrt{(Z_0/S)Z_0} = Z_0/\sqrt{S}$. Il sistema è mostrato in figura 20.18-1 b). La scelta della posizione di un massimo di tensione sarebbe risultata in una sezione quarto d'onda la cui impedenza caratteristica è $Z_0\sqrt{S}$.

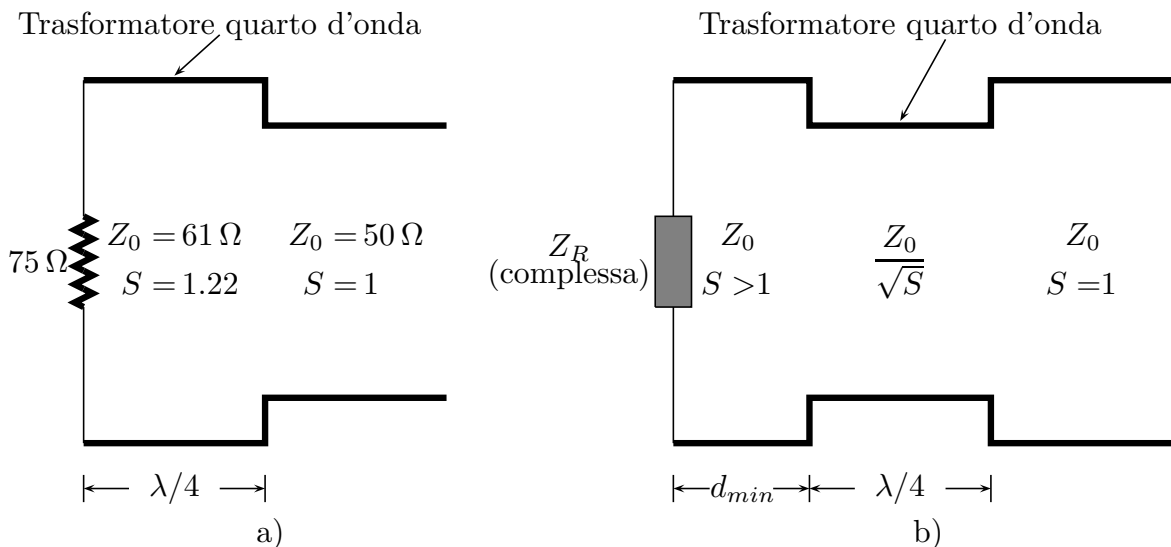


fig.20.18-1

La sensibilità in frequenza dei trasformatori a quarto d'onda è uno svantaggio. Solo alla frequenza chiamata *frequenza centrale* alla quale la lunghezza della sezione del trasformatore è esattamente $\lambda/4$, sarà il rapporto d'onda stazionaria S sulla linea principale essere 1. A frequenze superiori la sezione del trasformatore apparirà più lunga (più corta) di $\lambda/4$, con il risultato che S sarà più grande dell'unità. La larghezza di banda del trasformatore a quarto d'onda è definita come l'intervallo di frequenza per cui S ha un valore più basso di qualche numero, usualmente di 1.5. La sensibilità a in frequenza può essere diminuita per cascata sezioni a quarto d'onda, che fornisce una transizione più morbida fra le due impedenze che devono essere adattate. Per esempio, quando una singola sezione a $\lambda/4$ è usata per adattare un carico di 400 Ω ad una linea di 50 Ω , la larghezza di banda ad una frequenza centrale di 300 MHz è trovata essere 64 MHz . La larghezza di banda con due sezioni a $\lambda/4$ in serie è approssimativamente doppia. Dopo quattro sezioni, un piccolo

miglioramento è ottenuto mettendo in cascata più sezioni.

Fine del Cap.20