

Cap.2

L'esistenza di onde elettromagnetiche e loro caratteristiche fondamentali

2.1 - Equazioni delle onde

Un aspetto fondamentale delle equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico é l'esistenza di soluzioni che rappresentano una propagazione ondosa, che trasporta con sé, da un punto all'altro del mezzo, energia elettromagnetica, con una velocità di propagazione misurabile.

É possibile infatti ottenere, dalle equazioni di Maxwell, delle equazioni d'onda per i vettori del campo indipendentemente dalla conoscenza delle caratteristiche delle sorgenti che producono l'onda stessa.

Dal punto di vista matematico ci si chiede con quale tipo di funzione é possibile rappresentare una propagazione ondosa. Anzitutto occorre precisare che la descrizione di un'onda é caratterizzata dal comportamento spazio-temporale di una grandezza ad essa associata per esempio, nel caso di propagazione elettromagnetica, del vettore campo elettrico o del vettore campo magnetico.

Consideriamo una propagazione ondosa nel verso dell'asse x . Una qualunque funzione del tipo $f(x \mp vt)$ descrive il comportamento di una grandezza fisica che si propaga lungo l'asse x con velocità v .

Per visualizzare tale comportamento consideriamo, a titolo di esempio e solo per comodità grafica, la funzione impulso delta di Dirac $\delta(x \mp vt)$.

Essa é così definita:

$$\delta(w) = \begin{cases} \infty & \text{per } w = 0 \\ 0 & \text{per } w \neq 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

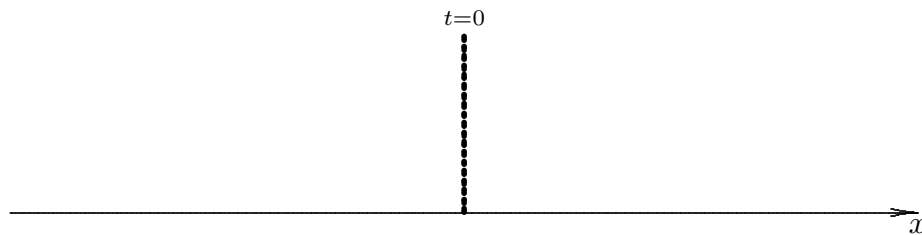
Consideriamo quindi un'onda elettromagnetica il cui campo elettrico impulsivo é descritto dalla (2.1.1). All'istante $t = 0$ esso esiste soltanto nel punto $x = 0$ ed é inesistente altrove. All'aumentare del tempo, esso esiste soltanto nei punti x soddisfacenti l'equazione:

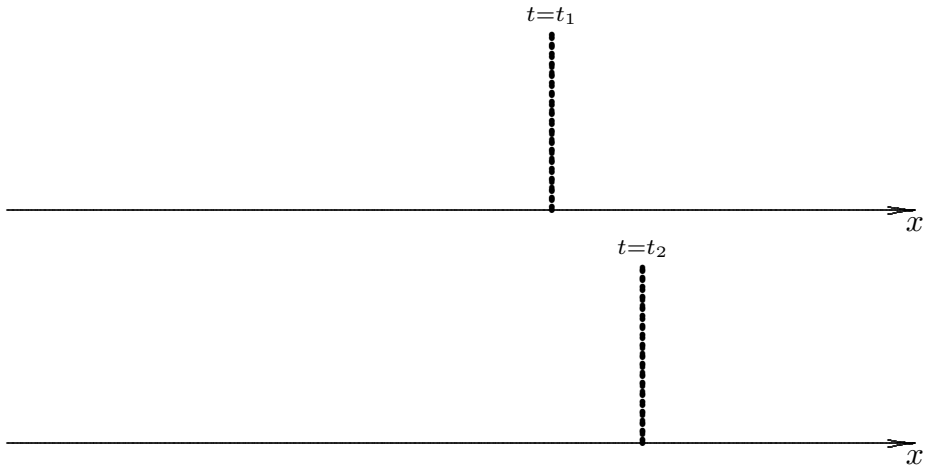
$$x - vt = 0 \quad \text{ossia} \quad x = vt \quad (2.1.2)$$

oppure:

$$x + vt = 0 \quad \text{ossia} \quad x = -vt \quad (2.1.3)$$

Questo significa che l'impulso si é propagato verso la direzione positiva dell'asse x nell'ipotesi dell'equazione (2.1.2) e verso la direzione negativa dell'asse x nell'ipotesi della equazione (2.1.3). In figura é riportata la propagazione nel verso positivo dell'asse x .





Supporremo per ora che il mezzo sia omogeneo e isotropo e di estensione illimitata. Supporremo inoltre che le relazioni costitutive siano lineari e che quindi il mezzo possa essere caratterizzato, dal punto di vista elettromagnetico, dalle costanti ϵ , μ e σ .

Se la conduttività non è nulla, una qualsiasi distribuzione iniziale di cariche libere nel mezzo deve annullarsi spontaneamente; comunque, nel seguito, porremo $\rho = 0$ sia nei dielettrici che nei conduttori. Riscriviamo le prime due equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.1.5)$$

Applichiamo vettorialmente l'operatore $\vec{\nabla}$ alla seconda equazione

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Invertendo l'ordine di derivazione al secondo termine del secondo membro e ricordando che $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ e $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, essendo il mezzo omogeneo e isotropo, si ha:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \sigma (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (2.1.6)$$

Per una relazione di analisi vettoriale, possiamo scrivere:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} - \vec{\nabla}^2 \vec{H}$$

Poiché nel nostro caso $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ e ricordando che $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, la (2.1.6) diventa:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \sigma (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Sostituendo al posto di $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ il secondo membro della prima equazione di Maxwell si ha:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\sigma\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

cioé:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.1.7)$$

Il vettore \vec{E} soddisfa ad una analoga equazione d'onda, come é facilmente verificabile, applicando vettorialmente l'operatore $\vec{\nabla}$ alla prima equazione di Maxwell.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Posto $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ per quanto abbiamo detto all'inizio e sostituendo al posto di $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ il secondo membro della seconda equazione di Maxwell, si ha:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

cioé:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.1.8)$$

Le equazioni d'onda (2.1.7) e (2.1.8) sopra ricavate, regolano il comportamento del campo elettromagnetico in un mezzo lineare in cui la densità di carica é zero, nel caso generale che questo mezzo sia conduttore.

Tuttavia non é sufficiente che queste equazioni siano soddisfatte; devono essere pure soddisfatte le equazioni di Maxwell. É chiaro che le equazioni (2.1.7) e (2.1.8) sono una necessaria conseguenza delle equazioni di Maxwell, ma non é vero l'opposto. Nella risoluzione delle equazioni d'onda, si deve porre particolare attenzione per ottenere soluzioni delle equazioni di Maxwell. Vogliamo adesso, trovare delle soluzioni delle equazioni (2.1.7) e (2.1.8).

Prendiamo come esempio la (2.1.8) e scriviamola in coordinate cartesiane ortogonali:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.1.9)$$

Essa é equivalente alle seguenti tre equazioni scalari:

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E_j}{\partial t} \quad (j = x, y, z) \quad (2.1.10)$$

Le piú semplici soluzioni delle equazioni del campo sono quelle che dipendono soltanto dal tempo e da una sola coordinata spaziale; ammettiamo cioé che $\vec{E} = \vec{E}(z, t)$ e $\vec{H} = \vec{H}(z, t)$.

Le (2.1.10) conseguentemente diventano:

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E_j}{\partial t} \quad (j = x, y, z) \quad (2.1.11)$$

Anzitutto vediamo l'importante conseguenza derivante dalle equazioni di Maxwell, nell'imporre la dipendenza solo da z . Risulta: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$; $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \hat{z} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial z}$

Le equazioni di Maxwell, pertanto, per campi dipendenti solo da z e da t , si scrivono:

$$\hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0; \quad \hat{z} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \sigma \vec{E} = 0; \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (2.1.12)$$

Moltiplicando le prime due scalarmente per \hat{z} si ha:

$$\hat{z} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{z} \cdot (\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}) = 0 \quad (2.1.13)$$

La prima delle (2.1.13) unitamente alla $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ ci informa che la componente di \vec{B} lungo la direzione z é costante sia nello spazio che nel tempo e poiché ci vogliamo interessare soltanto a campi variabili nel tempo, possiamo supporre $B_z = 0$.

Analogamente dalla seconda delle (2.1.13) si ottiene:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} E_z = 0 \quad (2.1.14)$$

la cui soluzione é: $E_z = E_{z0} e^{-\frac{t}{\tau}}$ dove E_{z0} é la componente longitudinale per $t=0$ e $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ é il tempo di rilassamento.

Se la conduttività é finita, la componente longitudinale di \vec{E} tende esponenzialmente a zero.

Se $\sigma = 0$ cioè il mezzo é un dielettrico perfetto $E_z = E_{z0}$. Poiché siamo interessati a campi variabili nel tempo, possiamo supporre $E_{z0} = 0$. Se ne deduce che: **i vettori \vec{E} e \vec{H} di ogni campo elettromagnetico dipendente solo dal tempo e da una sola coordinata spaziale giacciono nei piani normali all'asse della coordinata di dipendenza. Questa proprietà prende il nome di trasversalità del campo.**

Consideriamo, adesso, una delle equazioni (2.1.11) e cerchiamo una soluzione particolare:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (2.1.15)$$

Imponiamo:

$$E_x = f_1(z) f_2(t) \quad (2.1.16)$$

Sostituendo si ha:

$$f_2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} = \epsilon\mu f_1 \frac{d^2 f_2}{dt^2} + \sigma\mu f_1 \frac{df_2}{dt} \quad (2.1.17)$$

Dividiamo ambo i membri per $f_1 f_2$; si ha:

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dz^2} = \epsilon\mu \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dt^2} + \sigma\mu \frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dt} \quad (2.1.18)$$

Poiché il primo membro é una funzione solo di z ed il secondo membro una funzione solo di t l'uguaglianza é soddisfatta se e solo se entrambi i membri sono eguali ad una costante che indichiamo con $-k^2$. La equazione (2.1.18), quindi, é equivalente alle:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dz^2} &= -k^2 \\ \epsilon\mu \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dt^2} + \sigma\mu \frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dt} &= -k^2 \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

La soluzione generale dell'equazione in f_1 é:

$$f_1(z) = Ae^{ikz} + Be^{-ikz} \quad (2.1.20)$$

dove A e B sono costanti complesse.

Per quanto riguarda la f_2 prendiamo la soluzione particolare:

$$f_2(t) = Ce^{-pt} \quad (2.1.21)$$

Allora p deve soddisfare l'equazione caratteristica:

$$p^2 - \frac{\sigma}{\epsilon}p + \frac{k^2}{\epsilon\mu} = 0 \quad (2.1.22)$$

Esiste una relazione fissa fra p e la costante di separazione k^2 ; fissando il valore dell'una l'altra risulta determinata. Mediante le (2.1.20) e (2.1.21) possiamo costruire una soluzione particolare per le componenti del campo della forma:

$$E_x = E_{1x}e^{ikz - pt} + E_{2x}e^{-ikz - pt} \quad (2.1.23)$$

$$E_y = E_{1y}e^{ikz - pt} + E_{2y}e^{-ikz - pt} \quad (2.1.24)$$

cioé:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 e^{ikz - pt} + \vec{E}_2 e^{-ikz - pt} \quad (2.1.25)$$

con \vec{E}_1, \vec{E}_2 costanti complesse.

Introduciamo questo vettore soluzione della equazione d'onda (2.1.11) nelle equazioni di Maxwell per ricavare il vettore magnetico associato \vec{H} . Dato che \vec{H} deve avere la stessa dipendenza funzionale da z e t in quanto soddisfa una analoga equazione d'onda, possiamo scrivere:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 e^{ikz - pt} + \vec{H}_2 e^{-ikz - pt} \quad (2.1.26)$$

e poi determinare le costanti \vec{H}_1 e \vec{H}_2 in funzione di \vec{E}_1 e di \vec{E}_2 .

Dalle (2.1.25) e (2.1.26), si ha:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = ik\vec{E}_1 e^{ikz - pt} - ik\vec{E}_2 e^{-ikz - pt}; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -p\vec{H} \quad (2.1.27)$$

Introducendo queste derivate nelle equazioni di Maxwell scritte per campi dipendenti da z e da t ed in particolare nella prima delle (2.1.12), si ottiene:

$$(ik\hat{z} \times \vec{E}_1 - p\mu\vec{H}_1)e^{ikz - pt} - (ik\hat{z} \times \vec{E}_2 + p\mu\vec{H}_2)e^{-ikz - pt} = 0 \quad (2.1.28)$$

Affinché questa eguaglianza sia soddisfatta, per ogni z e t , i coefficienti degli esponenziali devono annullarsi e quindi avere:

$$\vec{H}_1 = \frac{ik}{p\mu}\hat{z} \times \vec{E}_1, \quad \vec{H}_2 = -\frac{ik}{p\mu}\hat{z} \times \vec{E}_2 \quad (2.1.29)$$

Moltiplicando scalarmente la prima per \vec{E}_1 , la seconda per \vec{E}_2 si ottiene

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{H}_1 = \vec{E}_2 \cdot \vec{H}_2 = 0 \quad (2.1.30)$$

I vettori elettrico e magnetico di una singola onda piana cioè di un campo elettromagnetico i cui vettori dipendono solo da una coordinata e dal tempo sono ortogonali sia alla direzione di propagazione che fra di loro. Per questo motivo tale onda viene denominata onda TEM (trasversa elettromagnetica).

2.2 - Onde piane armoniche nel tempo

Vi sono ora due casi da considerare, dipendenti dalla scelta di p e k . Sarà bene trattarli separatamente. Si supponga dapprima che p sia puramente immaginario cioè il campo sia armonico nel tempo (del resto p reale negativo comporterebbe una esaltazione del campo con il tempo che é assurda e p reale positivo porterebbe all'annullamento del campo nel tempo).

Poniamo quindi $p = i\omega$ e calcoliamo k^2 dalla equazione caratteristica:

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \quad (2.2.1)$$

In un mezzo conduttore, k^2 , e quindi k stesso é complesso. Il segno della radice sarà scelto in modo che la parte immaginaria di k sia sempre positiva: $k = \beta + i\alpha$

Le ampiezze E_{1x} , E_{2x} , E_{1y} , E_{2y} sono anch'esse complesse, e si scriveranno nella forma:

$$E_{1x} = a_1 e^{i\theta_1}; \quad E_{2x} = a_2 e^{i\theta_2} \quad (2.2.2)$$

$$E_{1y} = b_1 e^{i\psi_1}; \quad E_{2y} = b_2 e^{i\psi_2} \quad (2.2.3)$$

dove le nuove costanti $a_1, a_2, b_1, b_2, \theta_1, \theta_2, \psi_1,$ e ψ_2 sono reali. In virtù di queste definizioni, si ha per le componenti di \vec{E} :

$$\begin{aligned} E_x &= a_1 e^{-\alpha z} e^{-i(\omega t - \beta z - \theta_1)} + a_2 e^{+\alpha z} e^{-i(\omega t + \beta z - \theta_2)} \\ E_y &= b_1 e^{-\alpha z} e^{-i(\omega t - \beta z - \psi_1)} + b_2 e^{+\alpha z} e^{-i(\omega t + \beta z - \psi_2)} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Dato che le (2.2.4) sono soluzioni di equazioni lineari a coefficienti reali, sono anche soluzioni delle stesse sia le coniugate delle (2.2.4), sia le loro parti reali che quelle immaginarie. Tuttavia la soluzione ottenuta considerando solo la parte immaginaria (o la complessa coniugata) non é una soluzione indipendente da quella reale a causa dell'arbitrarietà di $\theta_1, \psi_1, \theta_2$ e ψ_2 e pertanto poiché hanno significato fisico le grandezze reali, prendiamo le parti reali delle (2.2.4):

$$\begin{aligned} E_x &= a_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_1) + a_2 e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z - \theta_2) \\ E_y &= b_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \psi_1) + b_2 e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z - \psi_2) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Le componenti del campo magnetico associato si calcolano per mezzo delle (2.1.29) che in componenti si scrivono:

$$\begin{aligned} H_{1x} &= -\frac{ik}{p\mu} E_{1y} & H_{2x} &= \frac{ik}{p\mu} E_{2y} \\ H_{1y} &= \frac{ik}{p\mu} E_{1x} & H_{2y} &= -\frac{ik}{p\mu} E_{2x} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Si ha ora:

$$\frac{ik}{p\mu} = \frac{\beta + i\alpha}{\omega\mu} = \frac{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{\omega\mu} e^{i\gamma} \quad \gamma = \arctan \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.2.7)$$

Cosí le componenti di \vec{H} si scrivono:

$$\begin{aligned} H_x &= -b_1 \frac{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{\omega\mu} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \psi_1 - \gamma) + \\ &\quad + b_2 \frac{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{\omega\mu} e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z - \psi_2 - \gamma) \\ H_y &= a_1 \frac{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{\omega\mu} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_1 - \gamma) + \\ &\quad - a_2 \frac{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{\omega\mu} e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z - \theta_2 - \gamma) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

É importante osservare che queste soluzioni per \vec{E} e per \vec{H} corrispondono a onde piane che si propagano lungo l'asse z sia nella direzione positiva che nella direzione negativa.

2.3 - Propagazione nei mezzi dielettrici perfetti

Consideriamo un caso particolare. **Supponiamo che il mezzo sia un dielettrico perfetto** cioè sia $\sigma = 0$ e che in esso si propaghi un'onda elettromagnetica piana solo nella direzione positiva dell'asse z . Supponiamo inoltre che il campo elettrico abbia soltanto la componente lungo l'asse x cioè per l'arbitrarietà delle costanti, poniamo $b_1 = 0$.

In queste condizioni il campo elettromagnetico é dato da:

$$E_x = a_1 \cos(\omega t - \beta z - \theta_1) \quad H_y = \frac{\beta}{\mu\omega} a_1 \cos(\omega t - \beta z - \theta_1) \quad (2.3.1)$$

Il campo é periodico sia nello spazio che nel tempo. La frequenza é $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ ed il periodo lungo l'asse dei tempi é $T = \frac{2\pi}{\omega}$. La costante β prende il nome di **costante di propagazione** e risulta $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$.

L'argomento $\phi_1 = \omega t - \beta z - \theta_1$ della funzione periodica é chiamato **fase** e l'angolo θ_1 , che sará determinato dalle condizioni iniziali, é **l'angolo di fase**.

Se un osservatore viaggia lungo la direzione dell'asse z in modo tale da osservare lo stesso valore del campo, ossia lo stesso valore dell'ampiezza e della fase, egli deve muoversi in modo tale che la sua posizione $z(t)$ deve soddisfare la condizione:

$$\phi_1 = \omega t - \beta z - \theta_1 = \text{costante} \quad (2.3.2)$$

dove la costante arbitraria determina il valore del campo osservato dall'osservatore.

L'equazione (2.3.2) determina un piano normale al vettore d'onda \vec{k} per ogni istante t . Questo piano é chiamato **piano di fase costante**.

La condizione (2.3.2) puó equivalentemente avere il significato di come va spostato questo piano lungo l'asse z affinché la sua fase sia invariante al variare di t .

Differenziando la (2.3.2) si ha:

$$d\phi_1 = \omega dt - \beta dz = 0 \quad (2.3.3)$$

cioé $\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$ che rappresenta quindi la velocità con la quale si deve muovere il piano lungo l'asse z perché la fase dell'onda rimanga costante. Questa velocità viene chiamata velocità di fase dell'onda. Essa rappresenta semplicemente la velocità di propagazione di una fase o stato e non coincide necessariamente con la velocità con cui si propaga l'energia di un'onda o segnale come vedremo in seguito.

In un dielettrico perfetto, quindi:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (2.3.4)$$

Poiché $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ é la velocità dell'onda nel vuoto che coincide con la velocità della luce, la (2.3.4) si puó scrivere: $v_f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$. In ottica il rapporto $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ é chiamato indice

di rifrazione. Dato che in tutti i materiali eccetto quelli ferromagnetici μ_r é molto prossimo all'unitá, l'indice di rifrazione é uguale alla radice quadrata di ϵ_r . **Questo risultato fu stabilito per la prima volta da Maxwell e fu la base della predizione che la luce é un fenomeno elettromagnetico. La costante dielettrica dipende, come vedremo, dalla frequenza e ad alta frequenza si discosta notevolmente dai valori in condizioni statiche.**

Ad una data frequenza la lunghezza d'onda é determinata dalle proprietá del mezzo $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$ dove λ_0 é la lunghezza d'onda nel vuoto alla stessa frequenza. In tutti i mezzi non ionizzati $n > 1$, e quindi la velocitá di fase é piú piccola della velocitá della luce nel vuoto e la lunghezza d'onda piú corta di quella relativa al vuoto.

Il vettore magnetico si propaga nella stessa direzione con eguale velocitá e in un mezzo non conduttore é esattamente in fase con il vettore elettrico. Si ha anche:

$$H_y = \frac{\beta}{\omega\mu} E_x = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_x = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} E_x \quad (2.3.5)$$

Il rapporto $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ prende il nome di impedenza caratteristica del mezzo, o impedenza d'onda. Esso infatti ha le dimensioni di una impedenza (é un rapporto fra V/m e A/m) e viene misurato in Ohm. Nel vuoto si ha:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8.85 \cdot 10^{-12}}} \simeq 377 \text{ Ohm} \quad (2.3.6)$$

Quindi la (2.3.5) si scrive:

$$H_y = \frac{1}{Z_0} \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} E_x \quad (2.3.7)$$

Se, ora nelle equazioni (2.2.5) e (2.2.8) si pongono tutte le ampiezze eccetto a_2 uguali a zero, si trova un'altra particolare soluzione, che per $\sigma = 0$ (cioé nei mezzi dielettrici perfetti) si riduce a:

$$E_x = a_2 \cos(\omega t + \beta z - \theta_2), \quad H_y = -a_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos(\omega t + \beta z - \theta_2) \quad (2.3.8)$$

Questo campo differisce dal precedente soltanto nel verso di propagazione. La fase é $\phi_2 = \omega t + \beta z - \theta_2$ e le superfici di fase costante si propagano con velocitá $v_f = -\frac{\omega}{\beta}$ nella direzione negativa dell'asse z . Le due soluzioni particolari di ampiezza b_1 e b_2 rappresentano una seconda coppia di onde progressive e regressive, entrambe caratterizzate dal vettore elettrico parallelo all'asse y .

Si tolga ora la restrizione di mezzi dielettrici perfetti e si esamini l'effetto di una conducibilitá finita.

2.4 - Propagazione in un mezzo conduttore

Risulta anzitutto che i vettori sia elettrici che magnetici si attenuano esponenzialmente lungo la direzione di propagazione. Le onde che viaggiano nella direzione positiva vengono moltiplicate per il fattore $e^{-\alpha z}$, mentre quelle che viaggiano nella direzione negativa vengono moltiplicate per il fattore $e^{+\alpha z}$ ma dato che z decresce nella direzione di propagazione anche in questo caso si ha attenuazione.

La conducibilità del mezzo non soltanto causa una attenuazione dell'onda, ma anche influenza la sua velocità.

Calcoliamo, ora, esplicitamente le costanti α e β in funzione dei parametri ϵ , μ e σ .

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega = (\beta + i\alpha)^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta \quad (2.4.1)$$

Eguagliando le parti reali e le parti immaginarie si ha:

$$\begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= \mu\epsilon\omega^2 \\ \alpha\beta &= \frac{\mu\sigma\omega}{2} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Dividendo membro a membro si ottiene:

$$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\omega\epsilon}{\sigma}$$

Moltiplicando ambo i membri per $\frac{\beta}{\alpha}$ si ha:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \frac{2\omega\epsilon}{\sigma} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - 1 = 0 \quad (2.4.3)$$

Essendo α positivo, dalla seconda delle (2.4.2) segue che anche β é positivo quindi dobbiamo prendere solo la soluzione positiva della (2.4.3):

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\omega\epsilon}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma}\right)^2 + 1} = \frac{\omega\epsilon}{\sigma} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \right] \quad (2.4.4)$$

Moltiplichiamo la (2.4.4) per la seconda equazione delle (2.4.2):

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \right] \quad (2.4.5)$$

da cui:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \right]} \quad (2.4.6)$$

Dalla prima equazione delle (2.4.2), si ha:

$$\alpha^2 = \beta^2 - \mu\epsilon\omega^2 = \omega^2 \frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \right] - \omega^2 \mu\epsilon = \omega^2 \frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1 \right] \quad (2.4.7)$$

da cui:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1 \right]} \quad (2.4.8)$$

La velocità di fase é:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \right]}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \right]}} \quad (2.4.9)$$

Osserviamo che per $\sigma = 0$ le formule (2.4.6), (2.4.8), e (2.4.9) si riducono a:

$$\alpha = 0; \quad \beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}; \quad v = \frac{c}{n}$$

come nel caso dei dielettrici perfetti.

Sia l'attenuazione di ampiezza che la velocità di fase crescono con la frequenza. Le formule (2.4.6), (2.4.8), e (2.4.9) sono di non agevole impiego. Ci proponiamo di studiare l'effetto della frequenza e della conduttività sulla propagazione di onde piane considerando due casi limite. L'esame delle (2.4.6), (2.4.8), e (2.4.9) dimostra che il comportamento dei fattori α , β e v é essenzialmente determinato dalla grandezza $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}$ di cui ci proponiamo di analizzare il significato fisico.

Consideriamo il secondo membro della seconda equazione di Maxwell. Esso, in un mezzo omogeneo ed isotropo si scrive:

$$\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4.10)$$

Assumendo per \vec{E} la parte progressiva delle (2.2.4) si ha: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$. La (2.4.10), quindi, si scrive:

$$\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (\sigma - i\omega\epsilon) \vec{E} \quad (2.4.11)$$

dalla quale segue che $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ é uguale al rapporto fra i moduli delle densità delle correnti di conduzione e della corrente di spostamento.

$$\text{Caso 1: } \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \ll 1.$$

La corrente di spostamento é molto maggiore della corrente di conduzione. Questa situazione può nascere sia in un mezzo soltanto debolmente conduttore, che in un mezzo relativamente buon conduttore, come l'acqua di mare, in cui si propaghi un'onda ad altissima frequenza.

Posto $\delta = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}$ e sviluppando in serie la funzione $\sqrt{1+\delta}$ essendo $\delta \ll 1$ si ha:

$$\sqrt{1+\delta} = 1 + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{8}\delta^2 + \dots \quad (2.4.12)$$

per cui, ferdandoci al termine lineare, risulta:

$$\alpha \simeq \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} - 1 \right]} = \omega \sqrt{\frac{\mu\sigma^2}{4\epsilon\omega^2}} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.4.13)$$

che per la (2.3.6) si puó scrivere:

$$\alpha = \frac{Z_0}{2} \sigma \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad (2.4.14)$$

Analogamente per β risulta:

$$\beta \simeq \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2} \right]} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \quad (2.4.15)$$

Sviluppando ancora una volta la radice quadrata della (2.4.15) si ha:

$$\beta \simeq \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \right) \quad (2.4.16)$$

da cui é facile ricavare la velocità di fase:

$$v_f \simeq \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \right)} \quad (2.4.17)$$

É importante osservare che nella approssimazione che abbiamo fatto il fattore di attenuazione α é indipendente dalla frequenza ed il suo valore corrisponde a quello a cui l'espressione (2.4.8) tende asintoticamente al crescere della frequenza; infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1 \right]} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{\omega^4 + \frac{\sigma^2\omega^2}{\epsilon^2}} - \omega^2} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{\omega^4 + \frac{\sigma^2\omega^2}{\epsilon^2} - \omega^4}{\sqrt{\omega^4 + \frac{\sigma^2\omega^2}{\epsilon^2}} + \omega^2}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\mu\epsilon\sigma^2}{2\epsilon^2}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} + 1}} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Caso 2: $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \gg 1$.

La corrente di conduzione é molto maggiore della corrente di spostamento. **Questo é invariabilmente il caso dei metalli** dove σ é dell'ordine di $10^7 S/m$ e, come si può vedere facilmente, la nostra approssimazione é verificata fino a frequenze di $10^{16} Hz$ che giacciono nel dominio dei fenomeni atomici. In questo caso per α e β si ottiene la formula approssimata:

$$\alpha \simeq \beta \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (2.4.19)$$

La velocità di fase é data da $v_f = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$. Osserviamo che, nell'approssimazione da noi fatta, l'attenuazione aumenta con la frequenza. La velocità di fase aumenta con la frequenza, ma decresce all'aumentare di σ .

Da quanto abbiamo visto un'onda elettromagnetica che si propaga in un mezzo conduttore presenta uno smorzamento esponenziale nell'ampiezza con legge $e^{-\alpha z}$. Dopo una distanza percorsa pari a $\frac{1}{\alpha}$ l'ampiezza dei campi si é ridotta a $\frac{1}{e}$ del valore iniziale. Questa particolare distanza viene indicata con δ e prende il nome di **profondità di penetrazione**. In un mezzo **buon conduttore**, per la (2.4.19), si ha:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (2.4.20)$$

Per un conduttore come il rame δ é uguale a $0.86 cm$ per la frequenza di $60 Hz$ e $0.67 \cdot 10^{-3} cm$ per $100 MHz$. Per l'alluminio ($\sigma = 3.54 \cdot 10^7 S/m$) la penetrazione (δ) é di solo $8,4 mm$ a $100 Hz$ e a $10 GHz$ si riduce a 0.84μ . **Nei metalli, quindi, solo la parte esterna (superficiale) viene interessata al fenomeno elettromagnetico ($\omega \neq 0$).** Questo giustifica la denominazione effetto pelle (o skin effect).

Nel caso dell'acqua di mare ($\sigma = 3 S/m$) per $\nu = 10^5 Hz$ risulta: $\delta = 0.92 m$. Questo risultato spiega perché nella radiotelegrafia sottomarina si usano le onde lunghe; infatti se supponiamo che le onde si propaghino in profondità con la legge ora descritta, esse possono raggiungere alcuni metri sotto la superficie solo se, come abbiamo visto, ν é sufficientemente bassa.

In figura (2.4-1) riportiamo l'andamento del coefficiente di attenuazione α , calcolato con la formula esatta (2.4.8), in funzione della frequenza, per i due importanti casi: rame e acqua di mare.

É da fare molta attenzione che all'aumentare della frequenza le costanti ϵ e σ variano notevolmente, come vedremo in seguito; non si spiegherebbe altrimenti la trasparenza dell'acqua di mare alla luce.

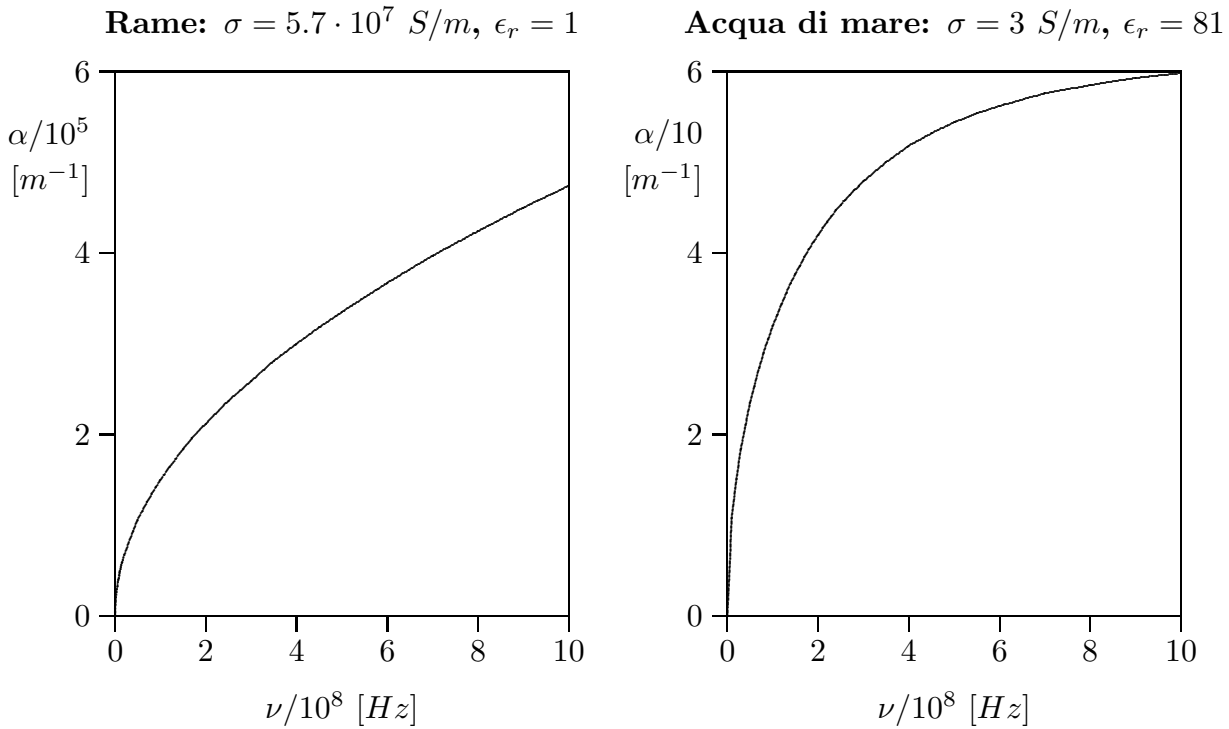


fig.2.4-1

Osserviamo che il coefficiente di attenuazione α si misura in (m^{-1}) o Neper per metro (N_p/m), mentre il coefficiente β si misura in (rad/m) . Nell'ambito delle Telecomunicazioni il coefficiente di attenuazione α é spesso espresso in decibels per metro (dB/m). La conversione fra Neper per metro e decibels per metro é cosí ottenuta:

$$dB = 20 \log_{10} (e^{-\alpha z}) = 20 (-\alpha z) \log_{10} (e) = 20 (-\alpha z) (0.434) = -8.68 (\alpha z) \quad (2.4.21)$$

Ne segue, quindi:

$$|\alpha (m^{-1})| = |\alpha (N_p/m)| = \frac{1}{8.68} |\alpha (dB/m)| \quad (2.4.22)$$

Le ampiezze dei vettori elettrico e magnetico di un'onda piana sono legate fra loro dalla relazione:

$$|\vec{H}| = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega \mu} |\vec{E}| \quad (2.4.23)$$

dove

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega \mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.4.24)$$

Nei mezzi poco conduttori la (2.4.24) si può scrivere:

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \right) \quad (2.4.25)$$

mentre nei buoni conduttori si ha:

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} \quad (2.4.26)$$

In un dielettrico perfetto i vettori elettrico e magnetico oscillano in fase; se il mezzo è conduttore, il vettore magnetico ritarda di un angolo γ dato da:

$$\tan \gamma = \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.27)$$

Per buoni conduttori questo rapporto si riduce all'unità; quindi il vettore magnetico di un'onda piana che penetra in un metallo ritarda rispetto al vettore elettrico di 45° .

2.5 - Onde piane armoniche nello spazio

Supponiamo, adesso, che la costante di propagazione k^2 sia reale. Allora p è una grandezza complessa che si ricava dall'equazione caratteristica ottenendo:

$$p = \frac{\sigma}{2\epsilon} \pm i \sqrt{\frac{k^2}{\mu\epsilon} - \frac{\sigma^2}{4\epsilon^2}} \quad (2.5.1)$$

Posto $q = \sqrt{\frac{k^2}{\mu\epsilon} - \frac{\sigma^2}{4\epsilon^2}}$, il campo elettrico assume la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 e^{-\frac{\sigma}{2\epsilon}t + i(kz - qt)} + \vec{E}_2 e^{-\frac{\sigma}{2\epsilon}t - i(kz + qt)} \quad (2.5.2)$$

o la coniugata.

Se ora $\frac{\sigma^2}{4\epsilon^2} < \frac{k^2}{\mu\epsilon}$, la grandezza iq è un immaginario puro, e il campo può essere interpretato come un'onda piana propagantesi lungo l'asse z con velocità di fase $v = \pm \frac{q}{k}$.

L'ampiezza di oscillazione in un punto qualsiasi decresce esponenzialmente con t , e la rapidità di diminuzione è determinata essenzialmente dal tempo di rilassamento $\tau = 2 \frac{\epsilon}{\sigma}$.

Se $\frac{\sigma^2}{4\epsilon^2} > \frac{k^2}{\mu\epsilon}$ la grandezza iq è reale e allora non si ha propagazione nel senso prima considerato. Non vi è spostamento lungo l'asse spaziale di una forma d'onda iniziale. Il campo è periodico in z ma decresce monotonamente col tempo. Il fenomeno ondulatorio è degenerato in un fenomeno di diffusione.

2.6 - Espressione delle onde piane che si propagano in direzione diversa dall'asse z

Abbiamo supposto finora (per semplicità di calcolo) che le onde si propaghino lungo l'asse z di un sistema di riferimento; è importante, tuttavia, considerare una direzione di propagazione generica. Vediamo, quindi, come si modificano le formule quando la direzione e il verso di propagazione sono individuati dal versore \hat{n} che forma con gli assi i coseni n_x, n_y, n_z .

Convieni, allora, introdurre un sistema di assi ($O'x'y'z'$) con z' parallelo a \hat{n} e con la stessa origine. Detti $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ i versori di questi tre assi, sarà $\hat{z}' = \hat{n}$, quindi:

$$z' = n_x x + n_y y + n_z z = \hat{n} \cdot \vec{r} \quad (2.6.1)$$

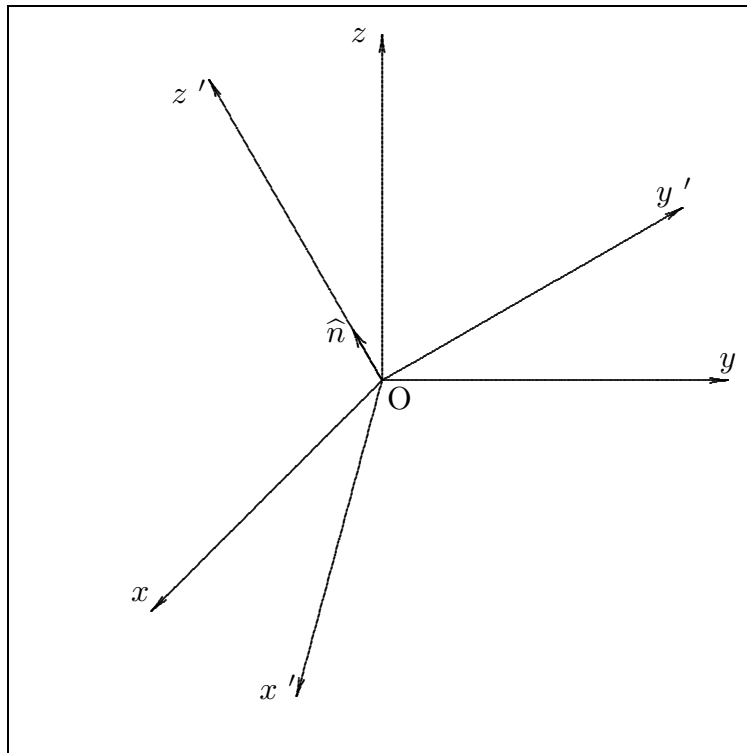


fig.2.6-1

Poiché l'onda si propaga nel verso di \hat{n} , essa si propagerà nel verso di z' , quindi possiamo scrivere, per esempio, per la componente progressiva E_x :

$$E_x = a_1 e^{-\alpha z'} e^{-i(\omega t - \beta z')} \quad \text{avendo posto } \theta_1 = 0 \quad (2.6.2)$$

Per comodità conviene scriverla in funzione di k :

$$E_x = a_1 e^{-i(\omega t - k z')} = a_1 e^{-i(\omega t - k \hat{n} \cdot \vec{r})} \quad (2.6.3)$$

In generale si usa porre $k\hat{n} = \vec{k}$ e scrivere:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (2.6.4)$$

\vec{k} prende il nome di **vettore d'onda** e k di **numero d'onda o costante di propagazione**.

2.7 - Soluzione generale dell'equazione d'onda unidimensionale

Abbiamo finora studiato solo alcune soluzioni particolari del campo che dipendono da una sola variabile spaziale e dal tempo. Dato il carattere lineare delle equazioni, queste soluzioni particolari possono essere moltiplicate per delle costanti arbitrarie e sommate, per formare una soluzione generale, di cui ora ci si vuole occupare.

Per facilitarci il compito ci proponiamo di trovare una soluzione generale dell'equazione d'onda in un mezzo non conduttore.

Indichiamo con Ψ la componente lungo l'asse \vec{x} o lungo l'asse \vec{y} di un qualsiasi vettore elettromagnetico che si propaghi lungo la direzione dell'asse \vec{z} ; allora si ha:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7.1)$$

Secondo quanto abbiamo studiato una particolare soluzione della (2.7.1) é rappresentata dalla:

$$\Psi = \left(A e^{i \frac{\omega}{v} z} + B e^{-i \frac{\omega}{v} z} \right) e^{-i \omega t} \quad (2.7.2)$$

I coefficienti A e B sono arbitrari e in generale dipendono da ω . La soluzione generale della (2.7.1) si ottiene sommando le soluzioni particolari.

In generale si ha:

$$\Psi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A(\omega) e^{i \frac{\omega}{v} z} + B(\omega) e^{-i \frac{\omega}{v} z} \right] e^{-i \omega t} d\omega \quad (2.7.3)$$

Supponiamo, ora, che nel piano $z = 0$ i valori della funzione Ψ e delle sue derivate in direzione della propagazione siano funzioni assegnate del tempo:

$$\Psi(0, t) = f(t) \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)_{z=0} = F(t) \quad (2.7.4)$$

Il problema consiste nel trovare i coefficienti $A(\omega)$ e $B(\omega)$ tali da soddisfare a queste condizioni, e cosí dimostrare che basta assegnare la funzione e la sua derivata in un dato punto dello spazio per determinare $\Psi(z, t)$ in ogni punto. Se si suppone provvisoriamente che l'integrale a secondo membro della (2.7.3) é uniformemente convergente, esso puó essere derivato sotto il segno di integrale rispetto al parametro z e si ottiene cosí:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{i}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \left[A(\omega) e^{i \frac{\omega}{v} z} - B(\omega) e^{-i \frac{\omega}{v} z} \right] e^{-i \omega t} d\omega \quad (2.7.5)$$

Ponendo $z = 0$ nella (2.7.3) e nella (2.7.5) si ottiene:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\omega) + B(\omega)] e^{-i \omega t} d\omega \quad (2.7.6)$$

$$F(t) = \frac{i}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega [A(\omega) - B(\omega)] e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.7.7)$$

Risulta evidente che i coefficienti del fattore $e^{-i\omega t}$ negli integrandi della (2.7.6) e della (2.7.7) sono trasformate di Fourier:

$$A + B = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.7.8)$$

$$\frac{i\omega}{v} [A - B] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.7.9)$$

Risolvendo simultaneamente queste due relazioni rispetto ad A e B e sostituendo la variabile d'integrazione t con α si ha:

$$A(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(\alpha) - \frac{iv}{\omega} F(\alpha) \right] e^{i\omega\alpha} d\alpha \quad (2.7.10)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(\alpha) + \frac{iv}{\omega} F(\alpha) \right] e^{i\omega\alpha} d\alpha \quad (2.7.11)$$

La (2.7.3) quindi si scrive:

$$\begin{aligned} \Psi(z, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(\alpha) - \frac{iv}{\omega} F(\alpha) \right] e^{i\omega \left(\alpha + \frac{z}{v} - t \right)} d\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(\alpha) + \frac{iv}{\omega} F(\alpha) \right] e^{i\omega \left(\alpha - \frac{z}{v} - t \right)} d\alpha \\ \Psi(z, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \left[e^{i\omega \left(\alpha + \frac{z}{v} - t \right)} + e^{i\omega \left(\alpha - \frac{z}{v} - t \right)} \right] d\alpha - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iv}{\omega} F(\alpha) \left[e^{\frac{i\omega}{v} z} - e^{-\frac{i\omega}{v} z} \right] e^{i\omega(\alpha - t)} d\alpha \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

2.8 - Polarizzazione delle onde elettromagnetiche - Composizione di onde della stessa frequenza vibranti su piani ortogonali

Come abbiamo visto le equazioni (2.2.5) delle componenti del campo elettrico (per esempio) sono fra di loro indipendenti, conseguentemente le costanti di integrazione che figurano nelle soluzioni sono indipendenti e determinate dalle condizioni iniziali. Questo comporta che l'orientamento spaziale del vettore campo elettrico risultante dipende da queste costanti di ampiezza e di fase. La classe di onde che abbiamo fin qui studiato è costituita da onde monocromatiche cioè da onde i cui campi vibrano tutti con la stessa singola frequenza. Per questa classe di campi ci proponiamo di analizzare lo stato di orientamento spaziale del vettore campo elettrico cioè il luogo di \vec{E} nel piano $z=\text{costante}$. **Questo orientamento spaziale dei vettori del campo prende il nome di polarizzazione.**

Poiché le proprietà delle onde progressive e regressive differiscono soltanto nel verso di propagazione, limiteremo l'attenzione soltanto alle onde progressive. Inoltre, dato che l'effetto di attenuazione dovuto alla conduttività finita di un mezzo omogeneo ed isotropo entra come un fattore esponenziale comune a tutte le componenti del campo, esso non ha parte alcuna nella polarizzazione, e non sarà pertanto considerato.

Consideriamo le componenti del campo elettrico che come sappiamo sono:

$$E_x = a_1 \cos(\phi + \theta), \quad E_y = b_1 \cos(\phi + \psi), \quad E_z = 0 \quad (2.8.1)$$

dove $\phi = \omega t - \beta z$.

Poniamo $\psi = \theta + \delta$ e riscriviamo le (2.8.1):

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{a_1} &= \cos(\phi + \theta) \\ \frac{E_y}{b_1} - \cos(\phi + \theta) \cos \delta &= -\sin(\phi + \theta) \sin \delta \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

Elevando a quadrato ciascun membro della seconda equazione e sostituendo la prima equazione nella seconda si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_y}{b_1}\right)^2 + \cos^2(\phi + \theta) \cos^2 \delta - 2 \frac{E_y}{b_1} \cos(\phi + \theta) \cos \delta &= \sin^2(\phi + \theta) \sin^2 \delta \\ \left(\frac{E_y}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 \cos^2 \delta - 2 \frac{E_y}{b_1} \frac{E_x}{a_1} \cos \delta &= \sin^2 \delta - \left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 \sin^2 \delta \end{aligned}$$

che, in definitiva, si può scrivere:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{b_1}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{a_1} \frac{E_y}{b_1} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.8.3)$$

L'invariante quadratico di questa forma quadratica ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2$) risulta:

$$\frac{1}{a_1^2 b_1^2} - \frac{\cos^2 \delta}{a_1^2 b_1^2} \geq 0 \quad (2.8.4)$$

quindi il luogo del vettore di componenti E_x, E_y é **una ellisse nel piano xy** .

In questo caso si dice che l'onda é polarizzata ellitticamente. Il centro dell'ellisse rappresenta il punto $E_x = E_y = 0$. Geometricamente il significato della polarizzazione ellittica é che il vettore \vec{E} ruota in un piano perpendicolare a \hat{z} e il suo estremo descrive una ellisse nel tempo di un periodo T .

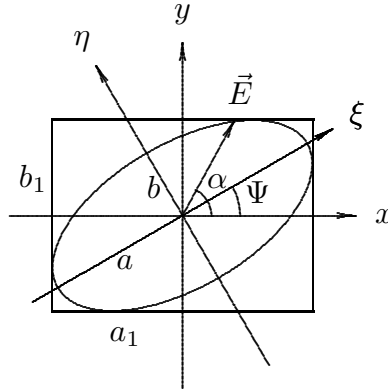


fig.2.8-1

Distinguiamo due tipi di polarizzazione a seconda che il vettore \vec{E} ruoti nel piano xy in un senso o nell'altro. La polarizzazione si dice **destrogira** quando un osservatore che guarda nella direzione dalla quale proviene l'onda vede l'estremo del vettore \vec{E} descrivere l'ellisse in senso orario. La polarizzazione si dice **levogira** quando lo stesso osservatore vede l'estremo del vettore \vec{E} descrivere l'ellisse in senso antiorario. **Dimostriamo che se la polarizzazione é destrogira si ha $\sin \delta > 0$; se é levogira si ha $\sin \delta < 0$.**

Sia α l'angolo che l'estremo del vettore \vec{E} forma, istante per istante, con l'asse x (fig.2.8-1). Si ha:

$$\tan \alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{b_1 \cos(\phi + \psi)}{a_1 \cos(\phi + \theta)} \quad (2.8.5)$$

da cui:

$$\alpha = \arctan \frac{b_1 \cos(\phi + \psi)}{a_1 \cos(\phi + \theta)} + \pi \quad (2.8.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{1 + \frac{b_1^2 \cos^2(\phi + \psi)}{a_1^2 \cos^2(\phi + \theta)}} \cdot \frac{b_1}{a_1} \left[\frac{-\sin(\phi + \psi) \cos(\phi + \theta) + \sin(\phi + \theta) \cos(\phi + \psi)}{\cos^2(\phi + \theta)} \right] \frac{d\phi}{dt} = \\ &= \frac{a_1^2 \cos^2(\phi + \theta)}{a_1^2 \cos^2(\phi + \theta) + b_1^2 \cos^2(\phi + \psi)} \cdot \frac{b_1 \sin [(\phi + \theta) - (\phi + \psi)]}{a_1 \cos^2(\phi + \theta)} \omega = \\ &= \frac{a_1 b_1 \omega \sin(-\delta)}{a_1^2 \cos^2(\phi + \theta) + b_1^2 \cos^2(\phi + \psi)} \quad (2.8.7) \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\omega \frac{a_1 b_1 \sin \delta}{E^2} \quad (2.8.8)$$

Dalla (2.8.8) si deduce che se $\sin \delta < 0$, l'angolo α é una funzione crescente del tempo e quindi la polarizzazione é **levogira**; viceversa, se $\sin \delta > 0$, l'angolo α é una funzione decrescente del tempo e quindi la polarizzazione é **destrogira**, come dovevamo dimostrare.

É fortemente istruttivo verificare graficamente quanto dimostrato, per alcuni valori di delta. Per questo, scriviamo le componenti del campo elettrico:

$$E_x = a_1 \cos(\omega t - kz); \quad E_y = b_1 \cos(\omega t - kz + \delta) \quad (2.8.9)$$

avendo posto, senza ledere le generalitá $\theta = 0$. Valutiamo il valore delle componenti del campo, al variare del tempo, nel piano $z = 0$. Introducendo il periodo T , le componenti (2.8.9) si scrivono:

$$E_x = a_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right); \quad E_y = b_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right) \quad (2.8.10)$$

Poniamo $\tau = \frac{t}{T}$: Al variare di τ da 0 a 1, il vettore campo elettrico le cui componenti sono date dalle (2.8.9), descriverá l'ellisse di polarizzazione in un verso o nell'altro a seconda della fase δ .

Assumiamo: $a_1 = 1$ e $b_1 = 0.5$ e costruiamo le seguente tabelle per quattro valori di δ .

	$\delta = \frac{\pi}{3}$			$\delta = \frac{5}{6}\pi$	
τ	E_x	E_y	τ	E_x	E_y
0	1	0.25	0	1	-0.433
0.1	0.809	-0.0523	0.1	0.809	-0.4973
0.2	0.309	-0.3346	0.2	0.309	-0.3716
0.3	-0.309	-0.4891	0.3	-0.309	-0.1040
0.4	-0.809	-0.4568	0.4	-0.809	0.2034
0.5	-1	-0.25	0.5	-1	0.4330
0.6	-0.809	0.0523	0.6	-0.809	0.4973
0.7	-0.309	0.3346	0.7	-0.309	0.3716
0.8	0.309	0.4891	0.8	0.309	0.1040
0.9	0.809	0.4568	0.9	0.809	-0.2034
1	1	0.25	1	1	-0.433

	$\delta = -\frac{\pi}{3}$			$\delta = -\frac{5}{6}\pi$	
τ	E_x	E_y	τ	E_x	E_y

0	1	0.25	0	1	-0.433
0.1	0.809	0.4568	0.1	0.809	-0.2034
0.2	0.309	0.4891	0.2	0.309	0.1040
0.3	-0.309	0.3346	0.3	-0.309	0.3716
0.4	-0.809	0.0523	0.4	-0.809	0.4973
0.5	-1	-0.25	0.5	-1	0.4330
0.6	-0.809	-0.4568	0.6	-0.809	0.2034
0.7	-0.309	-0.4891	0.7	-0.309	-0.1040
0.8	0.309	-0.3346	0.8	0.309	-0.3716
0.9	0.809	-0.0523	0.9	0.809	-0.4973
1	1	0.25	1	1	-0.433

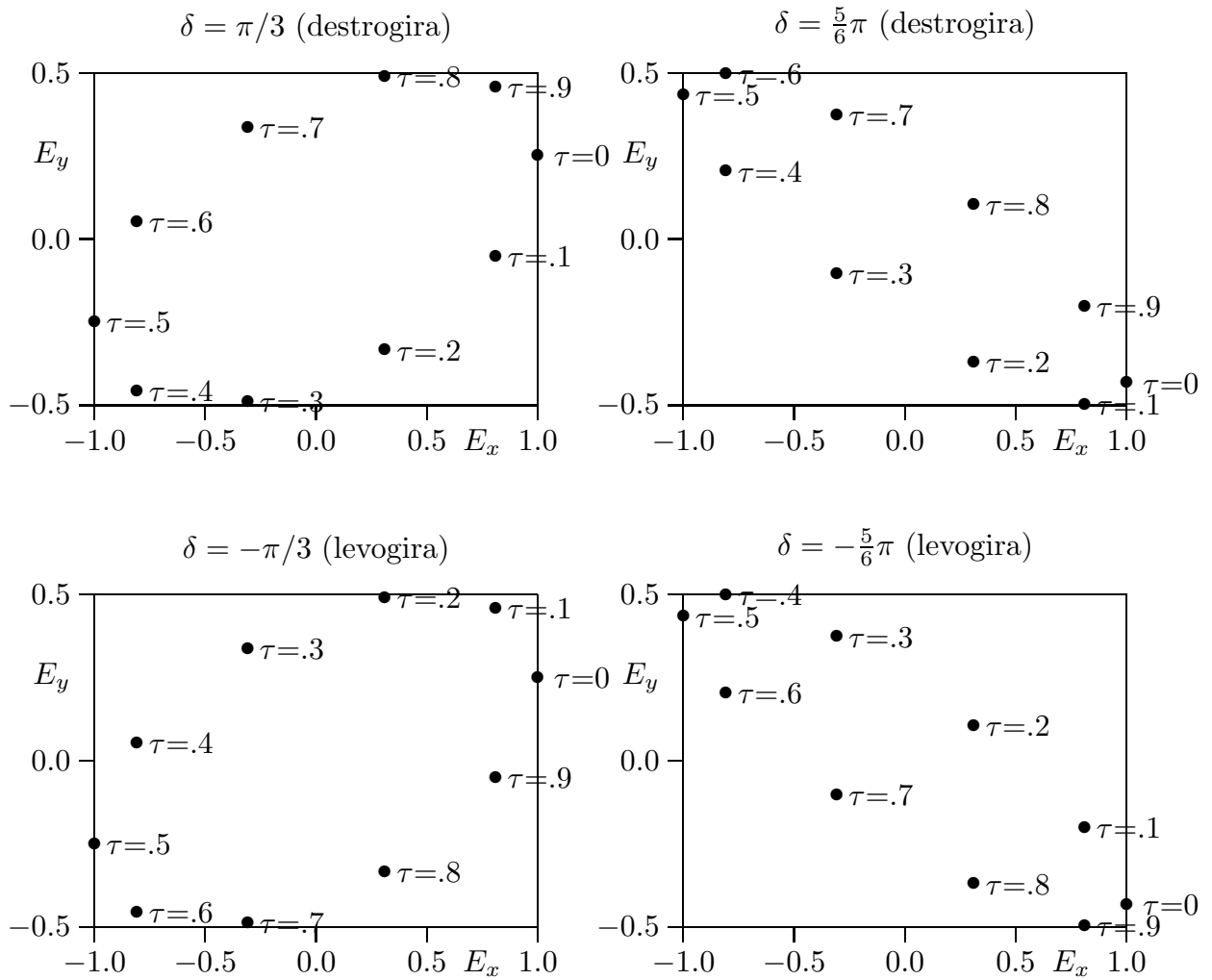


fig.2.8-2

Le prime due tabelle ($\delta = \frac{\pi}{3}$) e ($\delta = \frac{5}{6}\pi$) si riferiscono al caso $\sin \delta > 0$; tracciando i

punti sui grafici al variare in modo crescente di τ ci si accorge che l'ellisse di polarizzazione viene percorsa in modo orario e quindi la polarizzazione é destrogira (fig.2.8-2).

Le seconde due tabelle ($\delta = -\frac{\pi}{3}$) e ($\delta = -\frac{5}{6}\pi$) si riferiscono al caso $\sin \delta < 0$; tracciando i punti sui grafici al variare in modo crescente di τ ci si accorge che l'ellisse di polarizzazione viene percorsa in modo antiorario e quindi la polarizzazione é levogira (fig.2.8-2).

Per meglio visualizzare l'onda polarizzata, in figura 2.8-3 riportiamo alcuni grafici in forma tridimensionale.

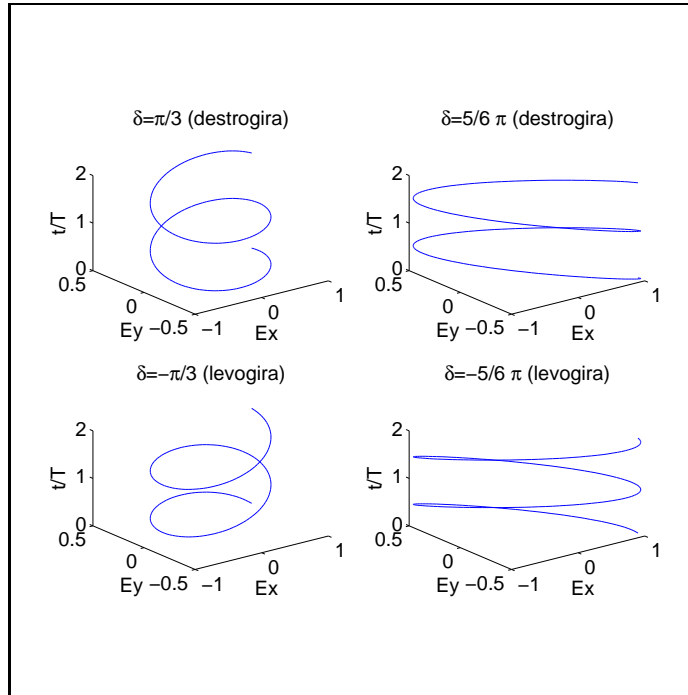


fig.2.8-3

In generale gli assi dell'ellisse non coincidono con le direzioni $O\vec{x}$ e $O\vec{y}$. Sia $O\vec{\xi}$, $O\vec{\eta}$, una nuova coppia di assi lungo gli assi dell'ellisse e sia Ψ ($0 \leq \Psi < \pi$) l'angolo fra $O\vec{x}$ e la direzione $O\vec{\xi}$ dell'asse maggiore. Allora le componenti E_ξ e E_η sono correlate a E_x e E_y da:

$$\begin{aligned} E_\xi &= E_x \cos \Psi + E_y \sin \Psi \\ E_\eta &= - E_x \sin \Psi + E_y \cos \Psi \end{aligned} \tag{2.8.11}$$

Se $2a$ e $2b$ ($a \geq b$) sono le lunghezze degli assi dell'ellisse, le equazioni parametriche dell'ellisse riferita agli assi $O\vec{\xi}$, $O\vec{\eta}$, sono:

$$\begin{aligned} E_\xi &= a \cos \theta_0 \\ E_\eta &= \pm b \sin \theta_0 \end{aligned} \tag{2.8.12}$$

con $0 \leq \theta_0 < 2\pi$.

I due segni distinguono i due possibili versi di rotazione del vettore campo elettrico: + per rotazione levogira, - per rotazione destrogira.

Per determinare a e b confrontiamo le (2.8.11) con le (2.8.12) utilizzando le (2.8.1). Per comodità poniamo $\theta_0 = \phi + \delta_0$, in modo che le (2.8.12) si scrivono:

$$\begin{aligned} E_\xi &= a \cos(\phi + \delta_0) \\ E_\eta &= \pm b \sin(\phi + \delta_0) \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

Eguagliando i secondi membri delle (2.8.13) con i secondi membri delle (2.8.11), si ha:

$$\begin{aligned} a [\cos \phi \cos \delta_0 - \sin \phi \sin \delta_0] &= a_1 [\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta] \cos \Psi + \\ &+ b_1 [\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi] \sin \Psi \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

$$\begin{aligned} \pm b [\sin \phi \cos \delta_0 + \cos \phi \sin \delta_0] &= - a_1 [\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta] \sin \Psi + \\ &+ b_1 [\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi] \cos \Psi \end{aligned} \quad (2.8.15)$$

Eguagliando i coefficienti di $\cos \phi$ e $\sin \phi$ si ottiene:

$$a \cos \delta_0 = a_1 \cos \theta \cos \Psi + b_1 \cos \psi \sin \Psi \quad (2.8.16)$$

$$a \sin \delta_0 = a_1 \sin \theta \cos \Psi + b_1 \sin \psi \sin \Psi \quad (2.8.17)$$

$$\pm b \cos \delta_0 = a_1 \sin \theta \sin \Psi - b_1 \sin \psi \cos \Psi \quad (2.8.18)$$

$$\pm b \sin \delta_0 = -a_1 \cos \theta \sin \Psi + b_1 \cos \psi \cos \Psi \quad (2.8.19)$$

Quadrando e sommando le (2.8.16) e (2.8.17) nonché le (2.8.18) e (2.8.19) si ha:

$$a^2 = a_1^2 \cos^2 \Psi + b_1^2 \sin^2 \Psi + 2a_1 b_1 \cos \Psi \sin \Psi \cos \delta \quad (2.8.20)$$

$$b^2 = a_1^2 \sin^2 \Psi + b_1^2 \cos^2 \Psi - 2a_1 b_1 \cos \Psi \sin \Psi \cos \delta \quad (2.8.21)$$

Ne segue:

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2 \quad (2.8.22)$$

Moltiplicando la (2.8.16) per la (2.8.18) e la (2.8.17) per la (2.8.19) e sommando si ha:

$$\begin{aligned} \pm ab \cos^2 \delta_0 &= a_1^2 \sin \theta \cos \theta \sin \Psi \cos \Psi - a_1 b_1 \sin \psi \cos \theta \cos^2 \Psi + \\ &+ a_1 b_1 \sin \theta \cos \psi \sin^2 \Psi - b_1^2 \sin \psi \cos \psi \sin \Psi \cos \Psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pm ab \sin^2 \delta_0 &= - a_1^2 \sin \theta \cos \theta \sin \Psi \cos \Psi + a_1 b_1 \sin \theta \cos \psi \cos^2 \Psi - \\ &- a_1 b_1 \sin \psi \cos \theta \sin^2 \Psi + b_1^2 \sin \psi \cos \psi \cos \Psi \sin \Psi \end{aligned}$$

$$\pm ab = a_1 b_1 [\sin \theta \cos \psi - \sin \psi \cos \theta]$$

cioé:

$$\mp ab = a_1 b_1 \sin \delta \quad (2.8.23)$$

Dividendo la (2.8.18) per la (2.8.16) e la (2.8.19) per la (2.8.17) si ha:

$$\pm \frac{b}{a} = \frac{a_1 \sin \theta \sin \Psi - b_1 \sin \psi \cos \Psi}{a_1 \cos \theta \cos \Psi + b_1 \cos \psi \sin \Psi} = \frac{-a_1 \cos \theta \sin \Psi + b_1 \cos \psi \cos \Psi}{a_1 \sin \theta \cos \Psi + b_1 \sin \psi \sin \Psi} \quad (2.8.24)$$

Dal secondo e terzo membro si ricava:

$$\begin{aligned} & a_1^2 \sin^2 \theta \sin \Psi \cos \Psi - b_1^2 \sin^2 \psi \sin \Psi \cos \Psi + a_1 b_1 \sin \theta \sin \psi \sin^2 \Psi - \\ & - a_1 b_1 \sin \theta \sin \psi \cos^2 \Psi = -a_1^2 \cos^2 \theta \sin \Psi \cos \Psi + b_1^2 \cos^2 \psi \sin \Psi \cos \Psi + \\ & + a_1 b_1 \cos \theta \cos \psi \cos^2 \Psi - a_1 b_1 \cos \theta \cos \psi \sin^2 \Psi \end{aligned}$$

Semplificando:

$$a_1^2 \sin \Psi \cos \Psi - b_1^2 \sin \Psi \cos \Psi + a_1 b_1 \sin^2 \Psi \cos \delta - a_1 b_1 \cos^2 \Psi \cos \delta = 0$$

che si può scrivere:

$$(a_1^2 - b_1^2) \sin 2\Psi = 2a_1 b_1 \cos \delta \cos 2\Psi$$

da cui:

$$\tan 2\Psi = \frac{2a_1 b_1}{a_1^2 - b_1^2} \cos \delta \quad (2.8.25)$$

Definiamo, adesso, un angolo ausiliario χ definito da:

$$\tan \chi = \mp \frac{b}{a} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.8.26)$$

Il segno di χ distingue i due versi di polarizzazione; il segno + per la polarizzazione destrogira $\left(0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \right)$, il segno - per la polarizzazione levogira $\left(-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq 0 \right)$.

L'equazione (2.8.26) si può anche scrivere in funzione dei parametri dell'ellisse nel sistema Oxy .

Dividendo la (2.8.23) per la (2.8.22) si ha:

$$\mp \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2a_1 b_1}{a_1^2 + b_1^2} \sin \delta \quad (2.8.27)$$

D'altra parte:

$$\sin 2\chi = \frac{2 \tan \chi}{1 + \tan^2 \chi} = \frac{\mp 2 \frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\mp 2ab}{a^2 + b^2}$$

Ne segue dalla (2.8.27):

$$\sin 2\chi = \frac{2a_1 b_1}{a_1^2 + b_1^2} \sin \delta \quad (2.8.28)$$

Da quanto abbiamo visto si deduce che per determinare l'ellisse di un'onda monocromatica, é necessaria una terna di tre quantità indipendenti. Una di tali terne é data dalle

ampiezze a_1 , b_1 e la differenza di fase δ . Un'altra terna é data dal semiasse maggiore a , dal semiasse minore b e dall'angolo Ψ di orientazione fra l'asse maggiore dell'ellisse e l'asse \vec{x} del sistema di coordinate.

Tali terne sono correlate fra di loro, cosicché si può passare facilmente dall'una all'altra.

Esaminiamo, ora, alcuni casi particolari di polarizzazione.

Se $\delta = \psi - \theta = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) l'equazione (2.8.3) degenera in una retta di equazione:

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{b_1}{a_1} \quad (2.8.29)$$

Si dice, allora, che l'onda é polarizzata linearmente cioè il campo elettrico risultante vibra sulla retta di equazione (2.8.29). Se scegliamo l'asse \vec{x} come retta di vibrazione del campo, la sola componente che rimane é la componente E_x .

Poiché i vettori \vec{E} e \vec{H} sono ortogonali e giacciono in un piano ortogonale alla direzione di propagazione, anche \vec{H} é linearmente polarizzata lungo la direzione \vec{y} .

L'altro caso speciale é quello di onda polarizzata circolarmente cioè l'ellisse degenera in una circonferenza.

Chiaramente, la condizione necessaria per questo é che:

$$a_1 = b_1 = a \quad \text{ed} \quad \text{inoltre} \quad \delta = \psi - \theta = m\frac{\pi}{2} \quad (m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$$

L'equazione (2.8.3) si riduce, allora, all'equazione di una circonferenza:

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2 \quad (2.8.30)$$

Se la polarizzazione é destrorsa ($\sin \delta > 0$) si ha:

$$\delta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} E_x &= a \cos(\phi + \theta) \\ E_y &= a \cos(\phi + \theta + \frac{\pi}{2}) = -a \sin(\phi + \theta) \end{aligned} \quad (2.8.31)$$

Se la polarizzazione é levogira ($\sin \delta < 0$) si ha:

$$\delta = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} E_x &= a \cos(\phi + \theta) \\ E_y &= a \cos(\phi + \theta - \frac{\pi}{2}) = a \sin(\phi + \theta) \end{aligned} \quad (2.8.32)$$

Se invece della rappresentazione reale, viene usata quella complessa, in generale si ha:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{b_1}{a_1} e^{-i\delta} \quad (2.8.33)$$

Dal valore di questo rapporto si può immediatamente determinare la natura della polarizzazione.

Per l'onda polarizzata linearmente:

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{b_1}{a_1} \quad (2.8.34)$$

Per l'onda polarizzata circolarmente destra:

$$\frac{E_y}{E_x} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \quad (2.8.35)$$

Per l'onda polarizzata circolarmente sinistra:

$$\frac{E_y}{E_x} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad (2.8.36)$$

Piú in generale, per un'onda polarizzata ellitticamente destra il rapporto $\frac{E_y}{E_x}$ ha una parte immaginaria negativa, mentre per un'onda polarizzata ellitticamente sinistra la parte immaginaria é positiva.

Per luce naturale, o non polarizzata intendiamo radiazione che é emessa da molecole che sono state eccitate in modo random (cioé termicamente, o per mezzo di una scarica elettrica), e che non sono in una regione dello spazio dove grandi campi esterni forniscono una direzione privilegiata. Assumeremo che il fascio di luce in considerazione é monocromatica nel senso che la sua larghezza di riga é piccola rispetto alla frequenza centrale ν_0 .

Un fascio di luce monocromatica non polarizzata apparirá, se osservata su un intervallo di tempo corto rispetto al reciproco della larghezza della riga spettrale, ellitticamente polarizzato. Ma il tipo di polarizzazione varia continuamente cosicché in ogni esperimento che richiede un piú lungo periodo di osservazione si misura soltanto la media di una larga varietà di differenti polarizzazioni. **In altre parole, in un fascio di luce monocromatica non polarizzata il vettore campo elettrico in un punto traccia un'ellisse la cui forma, eccentricitá ed orientazione cambia gradualmente.** Dopo un tempo piú grande del reciproco della larghezza di riga la nuova ellisse é completamente scorrelata a quella originale.

2.9 - Parametri di Stokes¹⁾ e sfera di Poincaré²⁾

Per caratterizzare lo stato di polarizzazione di un'onda é conveniente utilizzare dei parametri aventi tutti le stesse dimensioni fisiche che furono introdotti da G.G. Stokes nel 1852 per descrivere la luce parzialmente polarizzata.

¹⁾ George Gabriel Stokes: Skreen, County Sligo (Ireland), 1819 - Cambridge, 1903.

²⁾ Jules Henri Poincaré: Nancy (France), 1854 - Paris, 1912.

Questi parametri chiamati parametri di Stokes, per un'onda piana monocromatica sono le seguenti quattro quantità:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_1^2 + b_1^2 \\ s_1 &= a_1^2 - b_1^2 \\ s_2 &= 2a_1b_1 \cos \delta \\ s_3 &= 2a_1b_1 \sin \delta \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

Solo tre di essi sono indipendenti poiché sussiste la relazione:

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \tag{2.9.2}$$

Il parametro s_0 è evidentemente proporzionale alla intensità dell'onda. I parametri s_1 , s_2 e s_3 sono correlati in modo semplice all'angolo Ψ ($0 \leq \Psi \leq \pi$) che specifica l'orientazione dell'ellisse e all'angolo χ ($-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}$) che caratterizza l'ellitticità e il verso di rotazione dell'estremo del vettore elettrico.

Queste relazioni sono:

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\Psi \tag{2.9.3}$$

$$s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\Psi \tag{2.9.4}$$

$$s_3 = s_0 \sin 2\chi \tag{2.9.5}$$

Calcoliamo la relazione (2.9.5).

Dalla (2.8.28), tenendo conto delle definizioni di s_0 ed s_3 , segue:

$$s_3 = s_0 \sin 2\chi$$

Calcoliamo la relazione (2.9.3).

Dalla (2.8.25), tenendo conto delle definizioni di s_1 ed s_2 segue:

$$s_2 = s_1 \tan 2\Psi \tag{2.9.6}$$

Sostituendo quest'ultima relazione insieme alla (2.9.5) nella (2.9.2) si ha:

$$s_0^2 = s_1^2 + s_1^2 \tan^2 2\Psi + s_0^2 \sin^2 2\chi$$

da cui si ha:

$$s_0^2 (1 - \sin^2 2\chi) = s_1^2 (1 + \tan^2 2\Psi)$$

ne segue:

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\Psi \tag{2.9.7}$$

Calcoliamo la relazione (2.9.4).

Sostituendo la (2.9.3) nella (2.9.6) si ha:

$$s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\Psi \tag{2.9.8}$$

É importante osservare che, noti i parametri di Stokes, l'ellisse di polarizzazione é immediatamente individuata, essendo dalle (2.9.1):

$$a_1^2 = \frac{s_0 + s_1}{2}, \quad b_1^2 = \frac{s_0 - s_1}{2}, \quad \tan \delta = \frac{s_3}{s_2} \quad (2.9.9)$$

e dalle (2.9.3) ÷ (2.9.5):

$$\tan 2\Psi = \frac{s_2}{s_1}, \quad \sin 2\chi = \frac{s_3}{s_0} \quad (2.9.10)$$

Le relazioni (2.9.3) ÷ (2.9.5) indicano una semplice rappresentazione geometrica di tutti i diversi stati di polarizzazione: s_1 , s_2 ed s_3 possono essere considerati come le coordinate cartesiane di un punto P su una sfera Σ di raggio s_0 , e 2Ψ e 2χ sono le coordinate angolari sferiche di questo punto (v.figura 2.9-1).

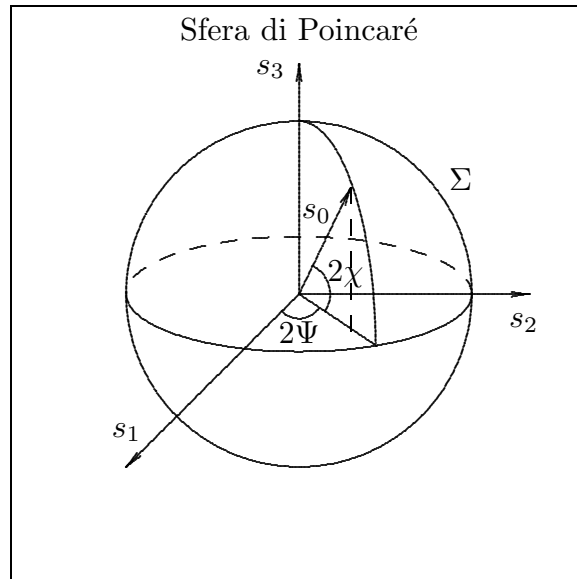


fig.2.9-1

Cosí ad ogni possibile stato di polarizzazione di un'onda piana monocromatica di data intensitá (s_0 =costante) corrisponde un punto su Σ . Poiché χ é positivo o negativo a seconda che la polarizzazione é destrogira o levogira, segue dalla (2.9.5) che la polarizzazione destrogira é rappresentata da punti su Σ che giacciono al di sopra del piano equatoriale (piano s_1s_2) mentre la polarizzazione levogira é rappresentata da punti su Σ che giacciono al di sotto di questo piano. Per radiazione linearmente polarizzata la differenza di fase δ é zero o un multiplo intero di π ; secondo le (2.9.1) il parametro di Stokes s_3 é nullo, cosicché la polarizzazione lineare é rappresentata da punti nel piano equatoriale. Per polarizzazione circolare $a_1 = b_1$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{2}$ a seconda che la polarizzazione é circolare destra o circolare sinistra; quindi la polarizzazione circolare destra é rappresentata

dal polo Nord ($s_1 = s_2 = 0, s_3 = s_0$) e la polarizzazione circolare sinistra dal polo Sud ($s_1 = s_2 = 0, s_3 = -s_0$).

Questa rappresentazione geometrica di punti individuanti diversi stati di polarizzazione su una sfera é dovuta a Poincaré ed é molto utile nell'ottica dei cristalli per determinare l'effetto di mezzi cristallini sullo stato di polarizzazione della luce che li attraversa. La sfera Σ é chiamata sfera di Poincaré.

2.10 - Espressione del teorema dell'energia di Poynting per campi armonici nel tempo. Il vettore di Poynting complesso

Se indichiamo con $h = u + w$ la densità di energia elettromagnetica in un certo istante e con $Q = \frac{1}{\sigma} J^2 - \vec{E}' \cdot \vec{J}$ la densità di potenza dissipata per effetto Joule piú quella spesa dai generatori, entrambe per unità di volume, il teorema di Poynting per un campo esente da effetti di isteresi si può scrivere nella forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial h}{\partial t} + Q = 0 \quad (2.10.1)$$

In un campo statico h é indipendente dal tempo, sicché la (2.10.1) si riduce a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + Q = 0 \quad (2.10.2)$$

Q può essere positivo o negativo, a seconda che il lavoro fatto dalle forze elettromotrici impresse \vec{E}' é minore o maggiore della energia dissipata in calore.

Le sorgenti e i loro campi nella maggior parte delle applicazioni pratiche della teoria elettromagnetica sono funzioni periodiche del tempo. Ne segue che anche la densità di energia é una funzione periodica del tempo. La derivata di una funzione periodica ha certamente media nulla su un periodo, ossia: $\left\langle \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle = 0$. Nel caso di campi periodici

la (2.10.1) si scrive, allora: $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{S} \rangle + \langle Q \rangle = 0$, oppure $\oint \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} da + \int_V \langle Q \rangle dv = 0$ che si esprime dicendo che quando non vi sono sorgenti entro V , l'energia dissipata in calore dentro il volume é eguale al valore medio del flusso che entra attraverso la superficie S .

Vediamo, adesso, di esprimere la (2.10.2) in notazione complessa, ricordando di prendere qualche precauzione quando si tratta di prodotti e di quadrati.

Sia A una grandezza complessa del tipo $A = A_0 e^{-i\omega t}$.

Si ha:

$$A = A_0 e^{-i\omega t} = (a_{01} + ia_{02}) e^{-i\omega t} = (a_{01} + ia_{02})(\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (2.10.3)$$

dove a_{01} e a_{02} sono funzioni reali delle coordinate x, y, z .

Benché sia conveniente impiegare delle quantità complesse nel corso delle varie operazioni analitiche, le quantità fisiche devono alla fine essere rappresentate da funzioni reali.

Se A soddisfa un'equazione a coefficienti reali, allora sia la parte reale che la parte immaginaria sono possibili soluzioni, e l'una o l'altra possono essere scelte alla fine del calcolo per rappresentare lo stato fisico. Tuttavia, nel caso dei quadrati e dei prodotti, si deve prendere la parte reale dei fattori e poi moltiplicare, perché il prodotto delle parti reali di due quantità complesse non è uguale alla parte reale del loro prodotto. Si ha:

$$\Re(A) = a_{01} \cos \omega t + a_{02} \sin \omega t = \frac{A + A^*}{2} \quad (2.10.4)$$

$$\Im(A) = a_{02} \cos \omega t - a_{01} \sin \omega t \quad (2.10.5)$$

Consideriamo adesso il prodotto di due quantità complesse A_1 e A_2 e facciamo il prodotto delle loro parti reali.

$$\Re(A_1) \cdot \Re(A_2) = \frac{1}{4}(A_1 + A_1^*)(A_2 + A_2^*) = \frac{1}{4}(A_1 A_2 + A_1^* A_2^* + A_2 A_1^* + A_1 A_2^*) \quad (2.10.6)$$

Per la (2.10.3), si ha:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= [(a_{11} + ia_{12})(\cos \omega t - i \sin \omega t)] [(a_{21} + ia_{22})(\cos \omega t - i \sin \omega t)] = \\ &= (a_{11} + ia_{12})(a_{21} + ia_{22})(\cos^2 \omega t - 2i \sin \omega t \cos \omega t - \sin^2 \omega t) = \\ &= (a_{11} + ia_{12})(a_{21} + ia_{22})(\cos 2\omega t - 2i \sin \omega t \cos \omega t) \end{aligned} \quad (2.10.7)$$

$$\begin{aligned} A_1^* A_2^* &= [(a_{11} - ia_{12})(\cos \omega t + i \sin \omega t)] [(a_{21} - ia_{22})(\cos \omega t + i \sin \omega t)] = \\ &= (a_{11} - ia_{12})(a_{21} - ia_{22})(\cos^2 \omega t + 2i \sin \omega t \cos \omega t - \sin^2 \omega t) = \\ &= (a_{11} - ia_{12})(a_{21} - ia_{22})(\cos 2\omega t + 2i \sin \omega t \cos \omega t) \end{aligned} \quad (2.10.8)$$

$$\begin{aligned} A_1 A_2^* &= [(a_{11} + ia_{12})(\cos \omega t - i \sin \omega t)] [(a_{21} - ia_{22})(\cos \omega t + i \sin \omega t)] = \\ &= (a_{11} + ia_{12})(a_{21} - ia_{22})(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \\ &= (a_{11} + ia_{12})(a_{21} - ia_{22}) \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

$$\begin{aligned} A_1^* A_2 &= [(a_{11} - ia_{12})(\cos \omega t + i \sin \omega t)] [(a_{21} + ia_{22})(\cos \omega t - i \sin \omega t)] = \\ &= (a_{11} - ia_{12})(a_{21} + ia_{22})(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \\ &= (a_{11} - ia_{12})(a_{21} + ia_{22}) \end{aligned} \quad (2.10.10)$$

Ricordando che la media nel tempo di una funzione periodica A è definita da:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A dt \quad (2.10.11)$$

dove τ è il periodo e che, quindi, il valor medio di funzioni come $\cos 2\omega t$ e $\sin \omega t \cos \omega t$ è nullo anch'esso, si ha:

$$\langle \Re(A_1) \cdot \Re(A_2) \rangle = \frac{1}{4}(A_1 A_2^* + A_2 A_1^*) = \frac{1}{4} [A_1 A_2^* + (A_1 A_2^*)^*] = \frac{1}{2} \Re(A_1 A_2^*) \quad (2.10.12)$$

Ne segue quindi che, per campi armonici, si ha:

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle \Re(\vec{E}) \times \Re(\vec{H}) \rangle = \frac{1}{2} \Re(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (2.10.13)$$

cioé l'intensità media del flusso di energia in un campo elettromagnetico armonico é la parte reale del vettore complesso $\frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$. Le proprietà di questo vettore di Poynting complesso sono interessanti.

Esso sarà indicato con $\vec{S}_c = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$.

Si supponga che il mezzo sia definito dalle costanti ϵ , σ e μ . Le equazioni di Maxwell in una regione esente da forze elettromotrici impresse \vec{E}' sono:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = +i\omega\mu\vec{H}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = (\sigma - i\omega\epsilon)\vec{E} \quad (2.10.14)$$

La complessa coniugata della seconda equazione é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^* = (\sigma + i\omega\epsilon)\vec{E}^* \quad (2.10.15)$$

Procediamo come abbiamo fatto per il teorema di Poynting cioè moltiplichiamo la prima delle (2.10.14) scalarmente per \vec{H}^* e la (2.10.15) scalarmente per \vec{E} , ottenendo:

$$\vec{H}^* \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = +i\omega\mu\vec{H} \cdot \vec{H}^*$$

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}^*) = (\sigma + i\omega\epsilon)\vec{E} \cdot \vec{E}^*$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ha:

$$\vec{H}^* \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}^*) = i\omega\mu\vec{H} \cdot \vec{H}^* - \sigma\vec{E} \cdot \vec{E}^* - i\omega\epsilon\vec{E} \cdot \vec{E}^*$$

ottenendo:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = -\sigma\vec{E} \cdot \vec{E}^* + i\omega(\mu\vec{H} \cdot \vec{H}^* - \epsilon\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \quad (2.10.16)$$

Dividendo per due si ottiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}_c = -\frac{1}{2}\sigma\vec{E} \cdot \vec{E}^* + i\omega \left(\frac{1}{2}\mu\vec{H} \cdot \vec{H}^* - \frac{1}{2}\epsilon\vec{E} \cdot \vec{E}^* \right) \quad (2.10.17)$$

Per la (2.10.12) si ha:

$$\frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{H}^* = \langle \Re(\vec{H}) \cdot \Re(\vec{H}) \rangle = \frac{2\langle w \rangle}{\mu} \quad (2.10.18)$$

$$\frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{E}^* = \langle \Re(\vec{E}) \cdot \Re(\vec{E}) \rangle = \frac{2\langle u \rangle}{\epsilon} \quad (2.10.19)$$

dove $\langle w \rangle = \frac{1}{4}\mu\vec{H} \cdot \vec{H}^*$ e $\langle u \rangle = \frac{1}{4}\epsilon\vec{E} \cdot \vec{E}^*$ sono i valori medi delle densità di energia rispettivamente magnetica ed elettrica.

La (2.10.17) si scrive:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}_c = -\langle Q \rangle + 2i\omega(\langle w \rangle - \langle u \rangle) \quad (2.10.20)$$

La divergenza della parte reale di \vec{S}_c determina l'energia dissipata in calore per unitá di volume per secondo, mentre la divergenza della parte immaginaria é uguale a 2ω volte la differenza del valore medio delle densitá di energia rispettivamente magnetica ed elettrica.

É importante osservare che nel caso di onde elettromagnetiche piane viaggianti in un mezzo dielettrico perfetto la densitá media di energia elettrica é uguale alla densitá media di energia magnetica.

Infatti, nel caso di onde elettromagnetiche piane, risulta:

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{n} \times \vec{E} \quad (2.10.21)$$

essendo \hat{n} il vettore unitario lungo la direzione di propagazione.

Pertanto:

$$\langle w \rangle = \frac{\mu}{4} |\vec{H}|^2 = \frac{\mu}{4} \frac{k^2}{\omega^2 \mu^2} |\vec{E}|^2 = \frac{\mu \omega^2 \epsilon \mu}{4 \omega^2 \mu^2} |\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon}{4} |\vec{E}|^2 = \langle u \rangle \quad (2.10.22)$$

Segue in tal caso:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}_c = 0 \quad (2.10.23)$$

2.11 - Effetto Doppler e aberrazione della luce

Se un sistema di riferimento S é a riposo rispetto ad un mezzo omogeneo, le equazioni di Maxwell in S ammettono soluzioni della forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \Re \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \Re \left[\vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \end{aligned} \quad (2.11.1)$$

dove \vec{E}_0 é una costante e \vec{B}_0 , che é correlato a \vec{E}_0 dalla formula $\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0$, é pure costante.

Le espressioni (2.11.1) rappresentano in S i vettori elettrici e magnetici di un'onda piana di frequenza angolare ω e vettore d'onda \vec{k} .

Consideriamo, adesso, un sistema di riferimento S' che si muove di velocitá uniforme v rispetto a S .

Poiché le equazioni di Maxwell sono invarianti in forma per trasformazioni di Lorentz, anche le equazioni d'onda e, quindi, le loro soluzioni sono invarianti in forma rispetto a un osservatore solidale al sistema S' , cioè rispetto a tale sistema si deve avere:

$$\begin{aligned} \vec{E}'(\vec{r}', t') &= \Re \left[\vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t')} \right] \\ \vec{B}'(\vec{r}', t') &= \Re \left[\vec{B}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t')} \right] \end{aligned} \quad (2.11.2)$$

É conveniente, come vedremo dai risultati, considerare trasformazioni di Lorentz generali cioè supporre che i due sistemi di riferimento si muovano l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme lungo una direzione qualunque, che non sia cioè l'asse x o l'asse z , e che inoltre i loro assi siano comunque orientati. Le trasformazioni di Lorentz, nella loro forma generale, in notazione vettoriale, sono:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \gamma \vec{v} t' + (\gamma - 1) \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \\ t &= \gamma \left(t' + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

Vogliamo vedere come le (2.11.2) sono correlate alle (2.11.1) in ampiezza e in fase.

Per quanto riguarda la correlazione delle ampiezze, essa é stata già studiata nel Cap.1 nei casi particolari di moto lungo gli assi coordinati; ci proponiamo, quindi, di studiare la correlazione delle fasi.

Sia $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$ la fase dell'onda relativa ad un osservatore solidale al sistema S . Applicando le trasformazioni (2.11.3) essa cosí si trasforma rispetto ad un osservatore solidale ad S' :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \longrightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}' + \gamma \vec{k} \cdot \vec{v} t' + (\gamma - 1) \vec{k} \cdot \vec{v} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v^2} - \omega \gamma t' - \omega \gamma \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{c^2} \quad (2.11.4)$$

che si può ancora scrivere:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \longrightarrow \left[\vec{k} + (\gamma - 1) \vec{k} \cdot \vec{v} \frac{\vec{v}}{v^2} - \omega \gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \right] \cdot \vec{r}' + \left(\gamma \vec{k} \cdot \vec{v} - \omega \gamma \right) t' \quad (2.11.5)$$

Per il principio della relativitá ristretta, la fase trasformata deve essere eguale alla fase osservata nel sistema S' , cioè si deve avere:

$$\vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t' = \left[\vec{k} + (\gamma - 1) \vec{k} \cdot \vec{v} \frac{\vec{v}}{v^2} - \omega \gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \right] \cdot \vec{r}' + \left(\gamma \vec{k} \cdot \vec{v} - \omega \gamma \right) t' \quad (2.11.6)$$

L'equazione (2.11.6) ci permette di comparare il vettore \vec{k}' e la pulsazione ω' al vettore \vec{k} e alla pulsazione ω ; infatti, perché la (2.11.6) sia soddisfatta qualunque sia \vec{r}' e t' deve essere:

$$\vec{k}' = \vec{k} - \gamma \frac{\omega}{c^2} \vec{v} + (\gamma - 1) \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad \text{Aberrazione della luce} \quad (2.11.7)$$

$$\omega' = \gamma (\omega - \vec{v} \cdot \vec{k}) \quad \text{Effetto Doppler} \quad (2.11.8)$$

Dall'equazione (2.11.7) possiamo calcolare l'angolo fra la direzione di \vec{k}' e \vec{k} e ottenere così l'**aberrazione del vettore d'onda** dovuta al moto relativo dei sistemi di riferimento.

Per questo supponiamo che gli assi coordinati di S e di S' siano ugualmente orientati cioè gli assi x', y', z' siano paralleli rispettivamente agli assi x, y, z e assumiamo che \vec{v} é parallelo all'asse x e quindi all'asse x' . Proiettiamo su tali assi la formula 2.11.7.

Indicando con θ l'angolo formato fra l'asse x ed il vettore k e con θ' l'angolo formato fra l'asse x' ed il vettore k' , si ha:

$$k' \cos \theta' = k \cos \theta - \gamma \frac{\omega}{c^2} v + (\gamma - 1) k \cos \theta = \gamma k \cos \theta - \gamma \frac{\omega}{c^2} v \quad (2.11.9)$$

$$k' \sin \theta' = k \sin \theta \quad (2.11.10)$$

dove θ' é l'angolo formato fra \vec{k}' e \vec{v} e θ é l'angolo formato fra \vec{k} e \vec{v} .

Dividendo membro a membro la (2.11.10) per la (2.11.9), si ha:

$$\tan \theta' = \frac{k \sin \theta}{\gamma k \cos \theta - \gamma \frac{\omega}{c^2} v} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{\omega}{c^2 k} v} \quad (2.11.11)$$

Poiché $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \simeq \frac{\omega}{c} n$, essendo n l'indice di rifrazione del mezzo, la (2.11.11) si scrive:

$$\tan \theta' = \frac{k \sin \theta}{\gamma k \cos \theta - \gamma \frac{\omega}{c^2} v} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{v}{cn}} \quad (2.11.12)$$

Posto $\beta = \frac{v}{c}$ ed $n = 1$, ipotizzando di essere nel vuoto, si ha:

$$\tan \theta' = \frac{1}{\gamma} \frac{\tan \theta}{1 - \beta \sec \theta} = \frac{\tan \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \sec \theta} \quad \text{Angolo di Aberrazione} \quad (2.11.13)$$

Consideriamo, ora la formula (2.11.8). Essa ci fornisce lo shift Doppler,¹⁾ scoperto da Christian Doppler nel 1843 e si può scrivere:

$$\omega' = \gamma (\omega - vk \cos \theta) = \frac{\omega (1 - \beta n \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.11.14)$$

Da questa equazione si vede che un'onda di frequenza angolare ω nel sistema di riferimento S appare avere una frequenza ω' quando é osservata dal sistema di riferimento S' .

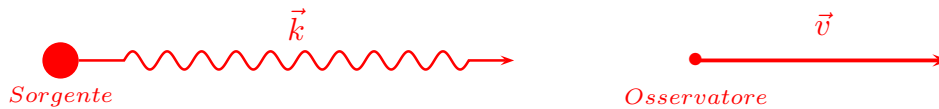
¹⁾ Christian Andreas Doppler: Salisburgo, 29 novembre 1803 - Venezia, 17 marzo 1853.

Il Doppler shift in frequenza cioè la quantità $|\omega - \omega'|$, nell'ipotesi di $\gamma = 1$, è massimo quando $\theta = 0$ ed è nullo quando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Nel caso di $\gamma > 1$ per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha: $\omega' = \gamma\omega$ ed è chiamato effetto Doppler trasverso che, quindi, è **un effetto puramente relativistico**.

Si vede chiaramente che se il ricevitore ed il trasmettitore si allontanano la frequenza in S' diminuisce cioè si ha il cosiddetto **red-shift**, viceversa se il ricevitore ed il trasmettitore si avvicinano la frequenza in S' aumenta cioè si ha il cosiddetto **blue-shift**, come indicato nelle figure 2.11-1 e 2.11-2.

SORGENTE E OSSERVATORE IN ALLONTANAMENTO ($\theta = 0^0$)



Variazione della frequenza osservata in funzione della velocità dell'osservatore

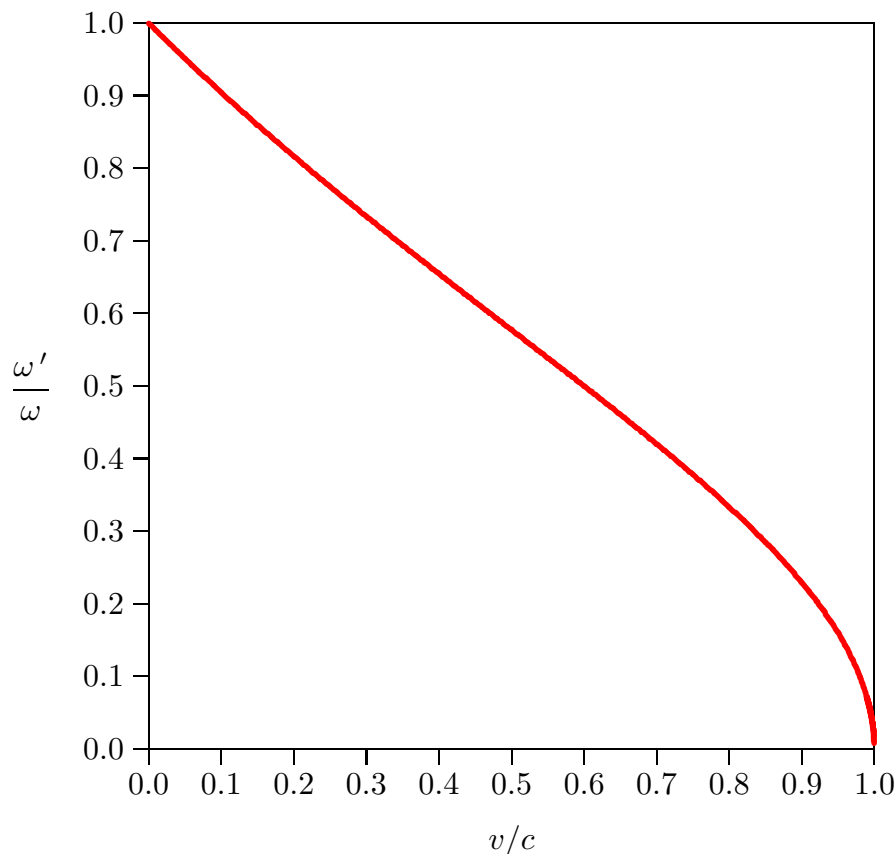


fig.2.11-1

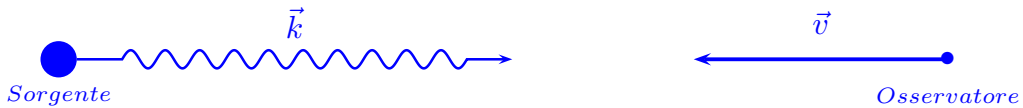
Risulta verificato, quindi, che se un osservatore si muove lungo la direzione e verso di un raggio di luce alla velocità della luce, la frequenza da lui osservata

é zero, come d'altra parte risulta dalla formula (2.11.14). Infatti, per $n = 1$, e $\theta = 0^\circ$ la (2.11.14) diventa:

$$\omega' = \frac{\omega(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\omega(1-\beta)\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2} = \frac{\omega\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \quad (2.11.15)$$

Quindi per $\beta = 1$ ($v = c$) risulta $\omega' = 0$.

SORGENTE E OSSERVATORE IN AVVICINAMENTO ($\theta = 180^\circ$)



Variazione della frequenza osservata in funzione della velocità dell'osservatore

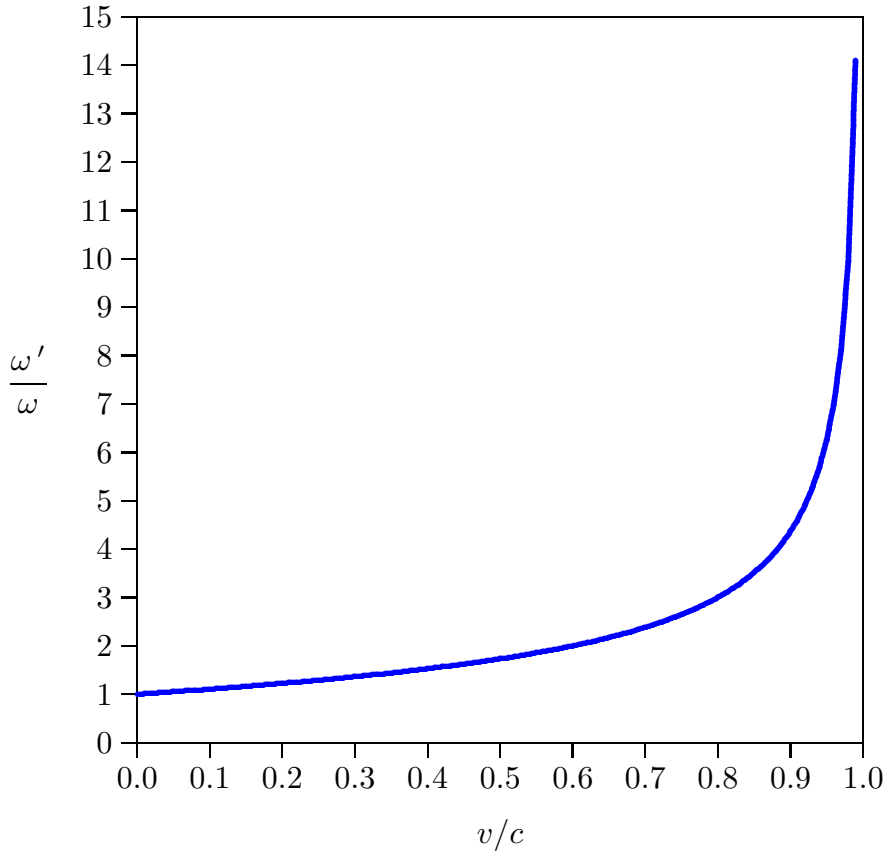


fig.2.11-2

In figura 2.11-3 riportiamo il moto delle due stelle che compongono una stella doppia e le loro righe di emissione.¹⁾

¹⁾ Fowles Grant R.: Introduction to Modern Optics - Dover Edition.

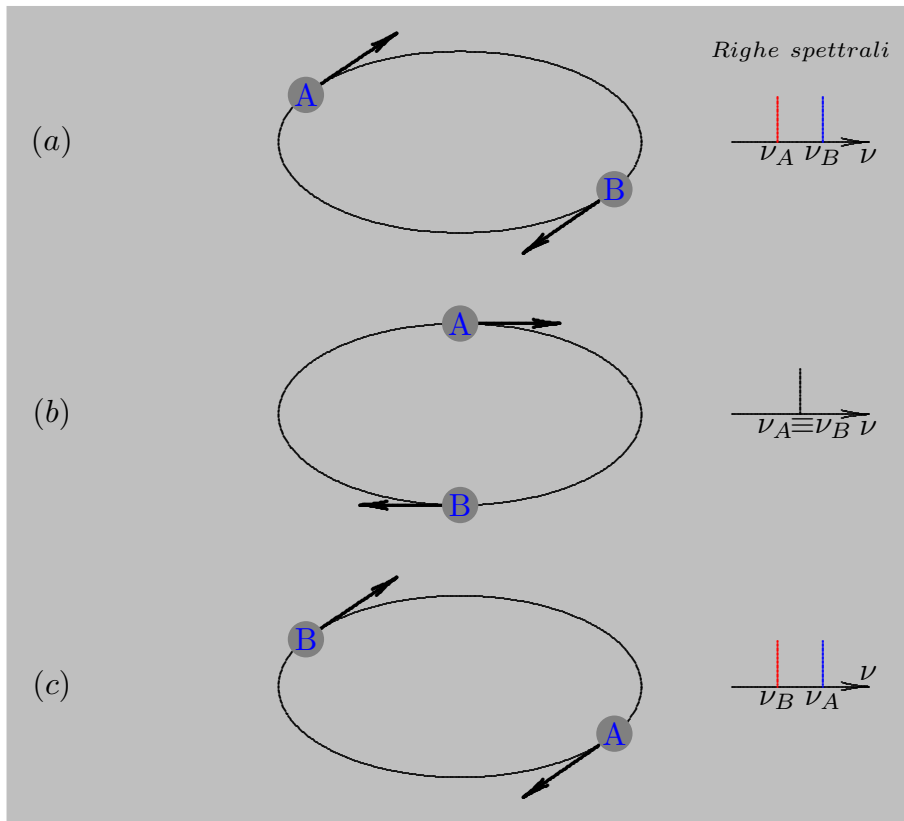


fig.2.11-3

2.12 - Polarizzatori

Un polarizzatore é un dispositivo che converte un fascio, non polarizzato o a polarizzazione mista, di onde elettromagnetiche (per esempio luce) in un fascio con un singolo stato di polarizzazione (generalmente singola polarizzazione rettilinea). I polarizzatori sono usati in molte tecniche e strumenti ottici, e i filtri polarizzanti trovano applicazione nella fotografia.

I polarizzatori possono essere divisi in tre categorie generali: **polarizzatori assorbenti**, nei quali gli stati di polarizzazione non desiderati sono assorbiti dal dispositivo; **polarizzatori a ritardo di fase** e **polarizzatori birifrangenti**, che discuteremo nell'ambito dell'ottica dei cristalli.

Riguardo alla prima categoria, la piú usata, certi cristalli, mostrano **dicroismo**, ossia un assorbimento preferenziale della luce che é polarizzata in una particolare direzione. Questi cristalli possono quindi essere usati come polarizzatori. La direzione della polarizzazione corrispondente alla massima trasmittivit  é detta asse principale del polarizzatore o asse di trasmissione (AT). Per quanto riguarda la seconda categoria di polarizzatori, che sar  descritta nell'ambito dello studio dell'ottica dei cristalli, si é detto che i polarizzatori beam-splitting dividono il fascio incidente in due fasci di stato di polarizzazione opposto, generalmente in due polarizzazioni lineari ortogonali. A differenza di polarizzatori assorbenti, essi non hanno la necessit  di assorbire e dissipare l'energia dello stato di polarizzazione respinto, e cos  i polarizzatori beam-splitting sono piú adatti per utilizzo con fasci di alta intensit . Essi sono anche molto usati quando le due componenti di polarizzazione devono essere analizzate o usate simultaneamente. In questo capitolo descriveremo i polarizzatori assorbenti.

2.13 - Legge di Malus¹⁾

Consideriamo la figura 2.13-1. L'asse di trasmissione del polarizzatore sia orientato lungo l'asse y del sistema di riferimento. Quindi, per definizione, viene trasmessa la componente del campo elettrico lungo tale asse. Se il campo incidente é orientato secondo un angolo θ con tale asse, la componente trasmessa sar  $E \cos \theta$, essendo E l'ampiezza del campo elettrico incidente. Da ci  si deduce che la densit  di potenza trasmessa dal polarizzatore sar  proporzionale a $E^2 \cos^2 \theta$.

Questa é **la legge di Malus**, la quale afferma che quando un polarizzatore ideale é posto in un fascio polarizzato di luce, l'intensit  della luce che passa attraverso il polarizzatore é data da:

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (2.13.1)$$

dove I_0 é l'intensit  della luce iniziale e θ é l'angolo fra il piano di polarizzazione iniziale della luce e l'asse del polarizzatore.

Un fascio di luce non polarizzata (figura 2.13-2) pu  essere pensato come se includesse un insieme di polarizzazioni lineari a tutti gli angoli possibili. Cio , se il fascio incidente

¹⁾ Etienne Louis Malus: Paris, 23 Luglio 1775 - Paris, 24 Febbraio 1812

non é polarizzato, occorre mediare su tutte le direzioni del vettore \vec{E} , ottenendo:

$$I = I_0 \langle \cos^2 \theta \rangle \quad (2.13.2)$$

Si ha:

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \quad (2.13.3)$$

Poiché $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ e $\int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta = 0$, risulta:

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \quad (2.13.4)$$

ossia, in caso di luce non polarizzata:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \quad (2.13.5)$$

L'intensità della luce trasmessa dal polarizzatore é costante qualunque sia la direzione dell'asse di trasmissione. Questo é un modo per analizzare la luce non polarizzata. L'intensità I della luce é ridotta alla metà.

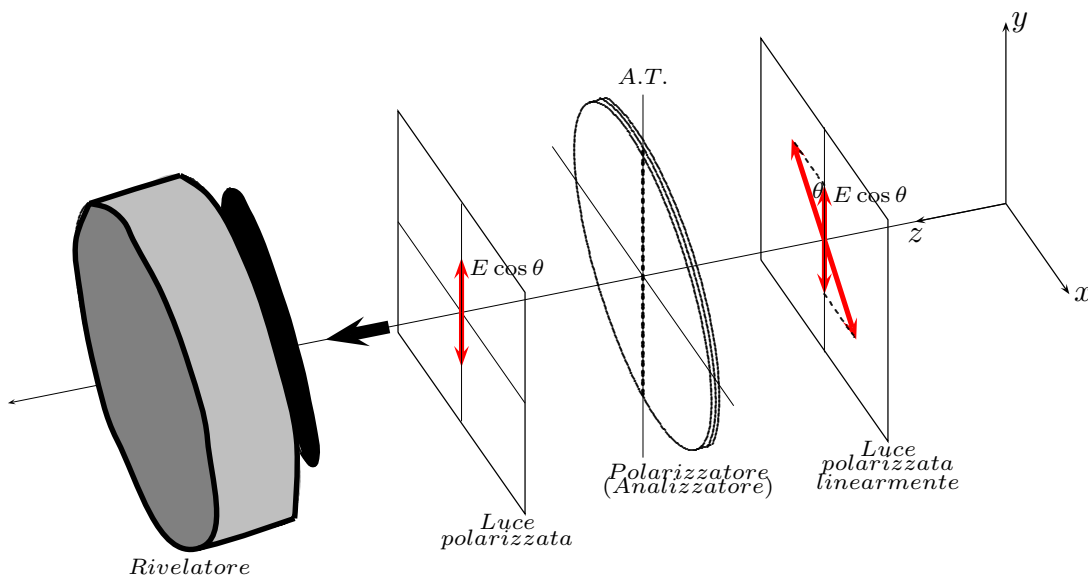


fig.2.13-1

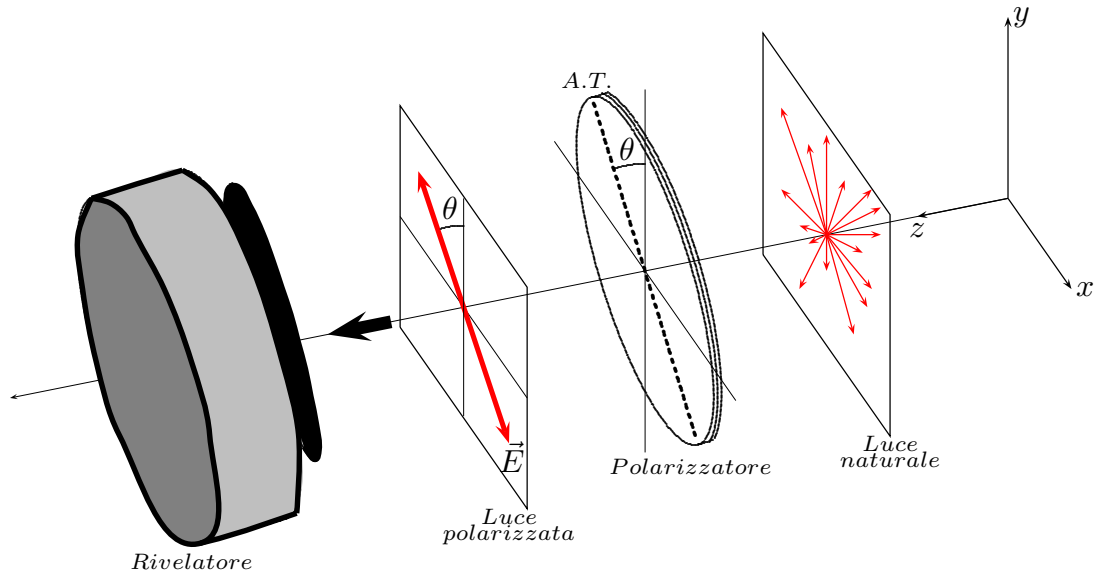


fig.2.13-2

Se due polarizzatori sono posti uno dopo l'altro (il secondo polarizzatore é generalmente chiamato analizzatore), l'angolo reciproco fra i loro assi di polarizzazione dá il valore di θ nella legge di Malus. **Se i due assi sono ortogonali, i polarizzatori sono incrociati e non viene trasmessa luce.**

In pratica non si parlerá di polarizzatore ideale, e la trasmissione non é esattamente zero. I polarizzatori reali, non bloccano perfettamente la polarizzazione ortogonale al loro asse di polarizzazione; il rapporto di trasmissione della componente non desiderata e della componente desiderata é chiamato **extinction ratio (rapporto di estinzione)**.

Si é detto che un polarizzatore é una lamina costituita da materiale otticamente anisotropo che lascia passare la componente del campo elettrico parallela al suo asse di trasmissione (AT) ed assorbe fortemente la componente del campo elettrico perpendicolare all'AT. Il coefficiente di trasmissione di un polarizzatore reale, quando su di esso incide un fascio di luce polarizzato linearmente, é dato da:

$$T = \frac{I}{I_0} = K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta \quad (2.13.6)$$

dove I é l'intensitá della luce trasmessa, I_0 é l'intensitá della luce incidente, K_1 é il coefficiente di trasmissione della componente parallela all'asse di trasmissione e K_2 é il coefficiente di trasmissione della componente perpendicolare all'asse di trasmissione, e infine θ é l'angolo fra il piano di polarizzazione e l'AT del polarizzatore. In un polarizzatore ideale, K_1 é uguale ad 1 e K_2 é uguale a zero; nel caso ideale, quindi, l'espressione del coefficiente di trasmissione si riduce alla classica legge di Malus $I = I_0 \cos^2 \theta$. In un polarizzatore reale, K_1 e K_2 dipendono dalla lunghezza d'onda della radiazione, e per la luce bianca assumono valori dell'ordine di 0.4 e di 10^{-4} .

2.14 - Polarizzatore a griglia di fili

Il piú semplice dispositivo di polarizzatore lineare é una griglia di fili conduttori paralleli, come mostrato in figura 2.14-1. Immaginiamo che un'onda elettromagnetica incida

sulla griglia dal lato destro. Il campo elettrico può essere risolto nelle usuali due componenti ortogonali, in questo caso una scelta nella direzione parallela ai fili e l'altra perpendicolare ad essi. La componente y del campo guida gli elettroni di conduzione lungo la lunghezza di ciascun filo, generando una corrente. Gli elettroni a loro volta collidono con il reticolo cristallino atomico, impartendo energia agli atomi e quindi riscaldando i fili (calore di Joule). In questo modo energia è trasferita dal campo alla griglia. In aggiunta, gli elettroni acceleranti lungo l'asse y irradiano in entrambe le direzioni avanti e indietro. Come ci si deve aspettare, l'onda incidente tende ad essere cancellata dall'onda irradiata nella direzione avanti, risultando debole o nulla la componente y del campo. La radiazione che si propaga nella direzione dietro semplicemente appare come onda riflessa. In contrasto gli elettroni non sono liberi di muoversi lontano nella direzione dell'asse x , la corrispondente componente del campo si propaga essenzialmente inalterata attraverso la griglia. **L'asse di trasmissione della griglia è perpendicolare ai fili.** È un errore comune assumere ingenuamente che la componente y del campo in qualche modo scivola attraverso lo spazio fra i fili.

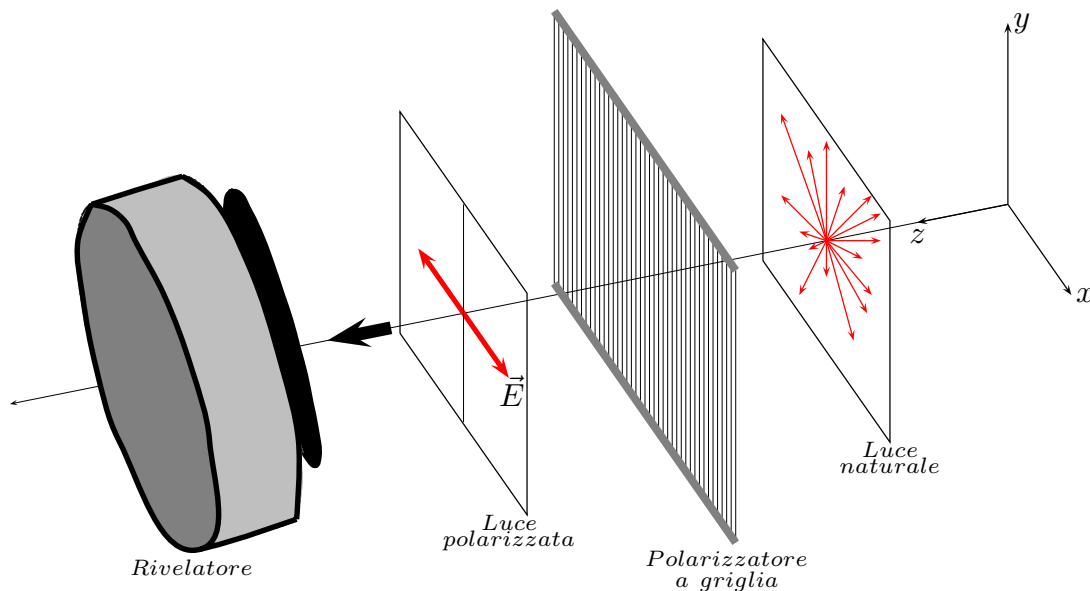


fig.2.14-1

Si può facilmente verificare l'efficacia dell'uso del polarizzatore a griglia utilizzando microonde ed una griglia fatta da fili elettrici ordinari (Hertz l'ha fatto!). Non è infatti molto facile fabbricare una griglia che polarizzi la luce, ma è stato fatto! Nel 1960 George R. Bird and Maxfield Parrish Jr. costruirono una griglia avente incredibilmente 2160 fili per mm. ⁽¹⁾ Il dispositivo è stato ottenuto facendo evaporare un flusso di atomi di oro (o di alluminio) ad un angolo di incidenza prossimo all'angolo di 'grazing' su un reticolo di diffrazione di plastica. Il metallo si accumula lungo gli orli di ciascuna feritoia del reticolo per formare, dunque, fili microscopici la cui lunghezza e spaziatura erano inferiori ad una lunghezza d'onda. Sebbene la griglia di fili è utile specie nell'infrarosso, è menzionata più

⁽¹⁾ G.R. Bird and M. Parrish, Jr.: "The Wire Grid as a Near-Infrared Polarizer" - J. Opt. Soc. Am. 50, 886 (1960).

per scopi pedagogici che per ragioni pratiche. Il principio fondamentale sul quale esso é basato é condiviso dai piú comuni polarizzatori diecrici.

2.15 - Cristalli diecrici

Vi sono certi materiali che sono naturalmente **diecrici** a causa di una anisotropia nelle loro rispettive strutture cristalline. Probabilmente il piú conosciuto di questi é un minerale che si trova in natura, la **tormalina**, una pietra semipreziosa spesso usata in gioielleria. In realtá vi sono diverse tormaline, che sono silicati di boro di differente composizione chimica (per esempio: $NaFe_3B_3Al_6Si_6O_{27}(OH)_4$). Per questa sostanza vi é una specifica direzione all'interno del cristallo conosciuta come **asse principale** o **asse ottico**, che é determinata dalla sua configurazione atomica. **La componente del campo elettrico di un'onda elettromagnetica, la cui frequenza cade nel range del visibile, che é perpendicolare all'asse principale del cristallo é fortemente assorbita dal campione.** Piú spesso é il cristallo, piú completo é l'assorbimento. Una lamina di un cristallo di tormalina tagliata parallelamente al suo asse principale e spessa parecchi millimetri servirá conseguentemente da polarizzatore lineare. In questo caso l'asse principale del cristallo diventa l'**asse di trasmissione** del polarizzatore. Ma l'utilitá della tormalina é piuttosto limitata dal fatto che i suoi cristalli sono relativamente piccoli. Inoltre anche la luce trasmessa subisce un notevole assorbimento. Per complicare il fenomeno, questo assorbimento indesiderato é fortemente dipendente dalla lunghezza d'onda ed il campione di tormalina si colorerá. Un cristallo di tormalina colpito da luce naturale puó apparire verde quando osservato nella direzione normale all'asse principale e appare quasi nero quando osservato lungo tale asse dove il campo elettrico é ortogonale a esso (da questi fatti deriva il termine diecrico che significa due colori).

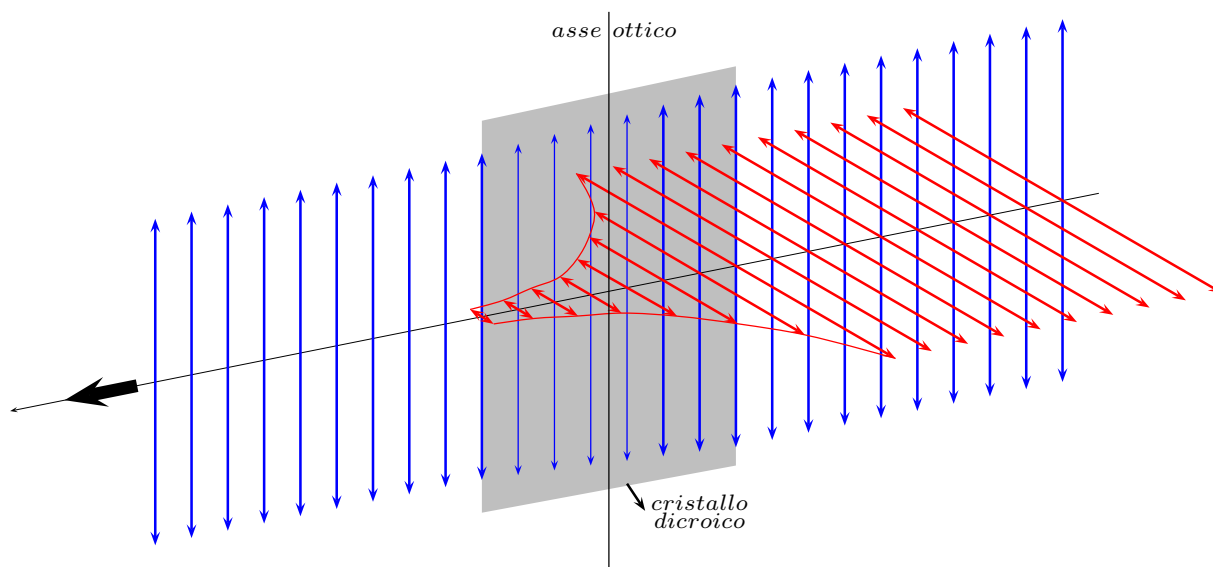


fig.4.6-1

Vi sono parecchie altre sostanze che presentano caratteristiche simili. Un cristallo di minerale di **hyperstene**, un silicato ferromagnetico puó assumere il colore verde se su di esso incide luce bianca polarizzata in una direzione e rosa per una diversa direzione

di polarizzazione. Noi possiamo dare una spiegazione qualitativa del meccanismo che dá luogo al dicroismo dei cristalli considerando la struttura microscopica del campione. Ricordiamo che gli atomi all'interno di un cristallo sono fortemente legati insieme da forze a corto range per formare un reticolo periodico. Gli elettroni, che sono responsabili delle proprietà ottiche, possono essere immaginati legati elasticamente alle loro rispettive posizioni di equilibrio. Gli elettroni associati con un dato atomo sono anche sotto l'influenza degli atomi vicini che essi stessi possono non essere simmetricamente distribuiti. Come risultato, le forze di legame elastico saranno differenti a seconda delle direzioni. Di conseguenza, la loro risposta ad un campo elettrico armonico di un'onda elettromagnetica varierá con la direzione di \vec{E} . Se in aggiunta all'anisotropia, il materiale é assorbente, una dettagliata analisi dovrebbe includere una conducibilità dipendente dall'orientazione. Nasceranno correnti di conduzione ed energia elettromagnetica sará convertita in calore di Joule. L'attenuazione puó anche dipendere dalla frequenza. Questo significa che se nel cristallo penetra luce bianca il cristallo apparirá colorato (perché solo luce di una certa frequenza verrá assorbita piú delle altre) ed il colore dipenderá dall'orientazione di \vec{E} . Sostanze che mostrano due o tre colori diversi sono dette essere **dicroiche** o **tricroiche**, rispettivamente.

2.16 - Polaroid

Uno dei dispositivi sempre presenti in un laboratorio di Ottica é la lamina polaroid.

Edwin Herbert Land (1909-1991) fin da ragazzo sognava di trovare un sistema per polarizzare la luce dei fari delle automobili, riducendo l'abbagliamento e gli incidenti stradali. Nel 1926 si iscrisse ad Harvard, ma frequentó per pochi mesi, preferendo continuare le sue ricerche nella sala di lettura della New York Public Library. Dopo aver letto un articolo medico della metà dell'Ottocento in cui si diceva che i cani trattati con chinino mostravano tracce di microscopici cristalli nelle urine, ebbe l'idea di creare un polarizzatore poco costoso costituito da un film di materiale plastico entro cui era imprigionata una grande quantità di microcristalli; questo fu il primo polarizzatore costituito da un foglio dicroico, conosciuto commercialmente come **polaroid J-sheet**. Tre anni dopo (1929), con una domanda di brevetto per la nuova invenzione, Land tornó a Harvard ed ebbe un laboratorio tutto per lui, anche se era ancora uno studente. Desideroso di commercializzare la sua scoperta, non si fermó per laurearsi: nel 1932, con George Wheelright, un esercitante di fisica di Harvard, decise di creare un'azienda che cinque anni dopo sarebbe diventata la **Polaroid Corporation**. Paradossalmente, l'invenzione di Land non si impose nell'industria automobilistica ma ebbe successo nel campo dell'ottica e della fotografia. La seconda invenzione per cui Land é celebre é la fotografia istantanea. Oggi, con la fotografia digitale (la Polaroid Corporation ha chiuso l'attività nel 2008), sembra sia normale vedere subito le immagini, ma alla fine degli anni quaranta del secolo scorso riunioni familiari, feste e matrimoni furono rivoluzionati dalla possibilità di tornare a casa con in tasca le preziose istantanee dell'evento, senza dover sviluppare le pellicole. Land, che aveva concepito quest'invenzione per accontentare la sua bambina di tre anni, impiegó un giorno per immaginarne il processo chimico e tre anni per fare di questo sogno una realtà. La lettura

retrospettiva dei primi lavori di Land é piuttosto affascinante.⁽¹⁾

É particolarmente interessante seguire le origini bizzarre di quello che é oggi, senza dubbio, il gruppo di polarizzatori piú largamente usato. Leggiamo insieme:

*In letteratura sono pochi i momenti salienti riguardanti lo sviluppo dei polarizzatori, particolarmente importante é il lavoro di William Bird Herapath (1796 -1868), un medico di Bristol (Gran Bretagna)⁽²⁾ il cui allievo, un certo Mr. Phelps, ha trovato che, quando egli faceva cadere iodio nell'urina di un cane che era stato alimentato con chinino, si formavano piccoli cristalli scintillanti di colore verde nel liquido di reazione. Phelps andó dal suo insegnante, e Herapath allora fece qualcosa di curioso; egli guardó i cristalli al microscopio e notó che in certe zone essi erano luminosi (dove essi si sovrapponevano) ed in certe altre erano scuri. Egli riconobbe uno straordinario nuovo fenomeno, e quindi un nuovo materiale polarizzante (**oggi conosciuto come herapathite**). Il Dottor Herapath dedicó circa dieci anni cercando di crescere questi cristalli verdi fino a farli diventare sufficientemente grandi per poterli usare per coprire l'oculare di un microscopio. Egli ne fece un poco ma essi restavano estremamente sottili e fragili, perché effettivamente era molto difficili farli crescere.*

Fu difficile far crescere questi cristalli fino a quando F.Bernauer ricercatore della Zeiss fra il 1930 e 1940 riuscí a farli crescere fino a qualche pollice di diametro. Il lavoro di Herapath attiró l'attenzione di Sir David Brewster, che stava lavorando in quei felici giorni sul Caleidoscopio. Brewster pensó che sarebbe stato piú interessante avere interferenze colorate nel suo Caleidoscopio piuttosto che pezzi di vetro colorati. Il Caleidoscopio era la televisione dell' anno 1850 e nessuna casa rispettabile non poteva non avere un Caleidoscopio nel mezzo della biblioteca. Brewster, che inventó il Caleidoscopio scrisse un libro su esso,⁽³⁾ ed in quel libro egli menzionó che avrebbe desiderato usare i cristalli di herapathite per l'oculare. Quando io (Land) lessi il libro nel 1926 e 1927, attraverso i suoi riferimenti venni a conoscenza di questi notevoli cristalli, e cosí cominció il mio interesse nell'herapathite.

*Nel lavoro di Herapath, lo iodio era visto certamente associato con i polarizzatori. Lo iodio appare in un altro posto nella letteratura primaria, nel lavoro di **Ambrohn**,⁽⁴⁾ che notó che quando egli colorava membrane cellulari, cellule viventi di tessuto animale, otteneva un elevato coefficiente di assorbimento dello iodio. Come egli trattava certi tessuti naturali, essi diventavano piú scuri, ed osservó che questi tessuti piú scuri erano dicroici. In un certo senso egli perse l'occasione di fare il polarizzatore. Infatti egli disse categoricamente che non ebbe capito la possibilitá di fare un polarizzatore sfruttando questo fenomeno, un'affermazione che io trovo molto forte da capire. Ambrohn era un ricercatore competente, ma egli era una di quelle persone che sono piú*

(1) E.H.Land: Some Aspects of the Development of sheet Polarizers - J. Opt. Soc. Am. 41, 957 (1951).

(2) W.B.Herapath: Phil.Mag. (4th ser.) 3, 161 (1852).

(3) D.Brewster: The Kaleidoscope, Its History, Theory, and Construction - John Murray, London, 1858.

(4) H.Ambrohn, Ann.Physik u. Chem. 34, 340 (1888).

interessate a condurre esperimenti scientifici che all'utilizzare i risultati ottenuti. Se Ambronn avesse lavorato in America, le conseguenze sarebbero state diverse!

*Uno dei concetti che é stato fortemente evidenziato é l'importante posto dello iodio nella storia dello sviluppo dei polarizzatori sintetici. L'herapathite é una forma cristallina di **solfato di iodochinina**.*

La mia immediata ispirazione fu il lavoro di Herapath. Apparve chiaro che, poiché i suoi dieci anni di sforzo non sono bastati per costruire un largo cristallo polarizzante, questo era probabilmente una via ardua per costruire il polarizzatore. Io mi chiesi se, invece di cercare di crescere un largo cristallo, uno non possa usare una molteplicitá di piccoli cristalli, tutti similmente orientati. Tuttavia vi sono parecchie difficoltà: 1) un numero di piccoli cristalli scattererá la luce se essi non vengono preparati accuratamente; 2) vi é un problema di orientazione; 3) come preparare cristalli molto piccoli; e 4) come si maneggiano?

Ritornando al problema di come si possa costruire una lamina sintetica contenente cristalli orientati di herapathite, il primo concetto elementare é quello di non fare grossi cristalli, ma farli microscopici. Se uno riesce allora ad orientare tutti i cristalli microscopici allo stesso modo, l'altra difficoltà é quella di non averli microscopici, perché scattereranno la luce, ma di averli submicroscopici.

Nella mia innocenza giovanile sembrava che questi problemi potessero essere risolti in un breve lasso di tempo, forse pochi mesi. Io ho conservato come un pezzo da esposizione il primo polarizzatore sintetico che ho costruito. Questo primo polarizzatore era fatto macinando in un mulino a pale per un mese cristalli di herapathite; il mulino conteneva una soluzione di lacca di nitrocellulosa.

Allora avvenne l'evento piú eccitante della mia vita. La sospensione di cristalli di herapathite fu posta in una piccola cella, un cilindro di vetro di circa mezzo pollice di diametro ed un quarto di pollice in lunghezza. La cella fu posta nel gap di un magnete che poteva produrre un campo di induzione di circa 10.000 gauss. Prima il magnete era spento, a causa del moto browniano le particelle erano orientate in modo random cosicché il liquido era opaco e di colore rosso scuro. Quando c'era il campo, e questo era il grande momento, lentamente la cella diventava luminosa e molto trasparente; quando noi esaminammo la luce trasmessa con un prisma di Nicol, essa passava da bianca a nera man mano che si girava il prisma. Questo primo esperimento di polarizzazione fu un successo ma nei successivi venticinque anni abbiamo risolto molti altri dettagli tecnici.

Per fare un polarizzatore solido da un polarizzatore liquido, si é proceduto nella seguente maniera: la stessa sospensione fu posta in un tubo ed un foglio di plastica fu immerso in esso; il tubo fu posto nel campo magnetico e chiuso cosí uno strato di cristalli polarizzanti si depositarono sul foglio che fu lasciato nel campo magnetico per asciugare e poco dopo abbiamo avuto il polarizzatore.....

I polarizzatori dicroici hanno due differenti coefficienti di assorbimento principali che sono efficaci per incidenza normale, cosí che l'assorbimento di luce linearmente polarizzata incidente normalmente é marcatamente differente per la direzione di vibrazione parallela ai due assi principali del polarizzatore. In un buon polarizzatore dicroico i due coefficienti di assorbimento devono essere molto differenti; in un polarizzatore

ideale una componente lineare é trasmessa senza assorbimento e l'altra é assorbita completamente. Cosí un polarizzatore ideale comporta un rapporto infinito fra i due coefficienti di assorbimento. Noi non siamo in grado teoricamente di ottenere un rapporto infinito, ma nei buoni polarizzatori moderni il rapporto puó essere maggiore di 100 o piú. Non é necessario che il rapporto fra i coefficienti di assorbimento sia costante su tutto lo spettro del visibile; infatti vi sono talune applicazioni dove non si vuole che tale rapporto si mantenga costante. É desiderabile, tuttavia, in un polarizzatore ordinario, che un coefficiente di assorbimento sia cosí elevato da non fare passare luce su tutto lo spettro e che l'altro abbia coefficiente di riflessione cosí basso che sostanzialmente tutta la luce di quella polarizzazione passa.....

Nel 1938 Land inventó la cosiddetta **H-sheet**, che oggi é probabilmente il piú largamente usato polarizzatore lineare. Esso non contiene cristalli dicroici ma é invece l'analogo molecolare della griglia di fili. Un foglio di alcol polivinilico é riscaldato e stirato in una data direzione, le sue lunghe molecole di idrocarburi diventano allineati in tale processo. Il foglio é allora immerso in una soluzione di inchiostro ricco di iodio. Lo iodio impregna la plastica e si attacca alle lunghe dritte catene di molecole polimeriche, formando effettivamente una catena propria. Gli elettroni di conduzione associati con lo iodio possono muoversi lungo le catene come se fossero lunghi fili sottili. La componente di \vec{E} in un'onda incidente che é parallela alle molecole guida gli elettroni, ed é quindi fortemente assorbita. L'asse di trasmissione del polarizzatore é quindi perpendicolare alla direzione in cui il film é stato stirato.

Ogni minuscola entitá dicroica separata é conosciuta con il nome di **dicromoforo**. Nei fogli H i dicromofori sono di dimensioni molecolari, cosí lo scattering non rappresenta un problema. L'H-sheet é un polarizzatore molto efficace per l'intero spettro del visibile ma talvolta lo é meno nella regione blu dello spettro.

2.17 - Valutazione della pressione di radiazione esercitata da un'onda elettromagnetica piana su una parete perfettamente assorbente

Si abbia un'onda piana viaggiante, nel vuoto, lungo l'asse z di un sistema di riferimento ed incidente su una superficie delimitante un mezzo generico. Sia essa polarizzata lungo l'asse x , e, quindi, rappresentata dal vettore campo elettrico:

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} \cos(\omega t - kz) \quad (2.17.1)$$

Il vettore campo magnetico associato al campo elettrico (2.17.1) é:

$$\vec{H} = \frac{E_0}{Z} \hat{y} \cos(\omega t - kz) \quad (2.17.2)$$

Il vettore di Poynting é:

$$\vec{S} = \frac{E_0^2}{Z} \hat{z} \cos^2(\omega t - kz) \quad (2.17.3)$$

Il modulo del vettore di Poynting mediato in un periodo, cioè la densità di potenza associata all'onda piana é:

$$\langle P \rangle = \frac{E_0^2}{2Z} \quad (2.17.4)$$

Per valutare la forza che si esercita sulla superficie, bisogna valutare il tensore elettrico e magnetico associato al campo elettromagnetico sulla superficie stessa.

Come sappiamo dalla teoria essi sono:

$$\bar{\bar{S}}^{(e)} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 E_x^2 - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 & \epsilon_0 E_x E_y & \epsilon_0 E_x E_z \\ \epsilon_0 E_y E_x & \epsilon_0 E_y^2 - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 & \epsilon_0 E_y E_z \\ \epsilon_0 E_z E_x & \epsilon_0 E_z E_y & \epsilon_0 E_z^2 - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \end{pmatrix} \quad (2.17.5)$$

$$\bar{\bar{S}}^{(m)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_0} B_x^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 & \frac{1}{\mu_0} B_x B_y & \frac{1}{\mu_0} B_x B_z \\ \frac{1}{\mu_0} B_y B_x & \frac{1}{\mu_0} B_y^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 & \frac{1}{\mu_0} B_y B_z \\ \frac{1}{\mu_0} B_z B_x & \frac{1}{\mu_0} B_z B_y & \frac{1}{\mu_0} B_z^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \end{pmatrix} \quad (2.17.6)$$

dove E_x, E_y, E_z e B_x, B_y, B_z sono le componenti del campo elettromagnetico complessivo (incidente e riflesso) sulla superficie.

La densità superficiale di forza che si esercita sulla superficie é data da:

$$\vec{t} = \bar{\bar{S}} \cdot \hat{n} \quad (2.17.7)$$

dove:

$$\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}^{(e)} + \bar{\bar{S}}^{(m)} \quad (2.17.8)$$

ed \hat{n} é il versore della normale alla superficie.

Supponendo che la superficie giaccia su un piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda, il versore \hat{n} é dato da:

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.17.9)$$

Supponendo, inoltre, che la superficie sia **non riflettente**, nell'ipotesi di un'onda piana incidente data dalle (2.17.1) e (2.17.2), i tensori $\bar{S}^{(e)}$ e $\bar{S}^{(m)}$ si scrivono:

$$\bar{S}^{(e)} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 E_x^2 - \frac{\epsilon_0}{2} E_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} E_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} E_x^2 \end{pmatrix} \quad (2.17.10)$$

$$\bar{S}^{(m)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\mu_0} B_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_0} B_y^2 - \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\mu_0} B_y^2 \end{pmatrix} \quad (2.17.11)$$

Esprimendo B_y in funzione di H_y e quindi di E_x per mezzo della (2.17.2), si ha:

$$B_y = \mu_0 H_y = \mu_0 \frac{1}{Z} E_x \quad \text{da cui} \quad B_y^2 = \mu_0 \epsilon_0 E_x^2 \quad (2.17.12)$$

Sostituendo la (2.17.12) nella (2.17.11), il tensore degli sforzi \bar{S} si scrive:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 \end{pmatrix} \quad (2.17.13)$$

e risulta, quindi:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_0 E_x^2 \end{pmatrix} \quad (2.17.14)$$

La densitá superficiale di forza che si esercita su una superficie **assorbente ossia non riflettente** é data da:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_0 E_x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_0 E_x^2 \end{pmatrix} \quad (2.17.15)$$

La (2.17.15) conferma l'esistenza di una **pressione di radiazione** che si esercita sulla superficie; essa si può scrivere:

$$\vec{t} = \epsilon_0 E_x^2 \hat{z} = \epsilon_0 \hat{z} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad (2.17.16)$$

Ovviamente, ha significato fisico il valore della (2.17.16) mediato in un periodo, quindi:

$$\langle \vec{t} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \hat{z} \quad (2.17.17)$$

Esprimendo E_0^2 in funzione della densità di potenza mediata in un periodo $\langle P \rangle$, data dalla (2.17.4), si ha:

$$\langle \vec{t} \rangle = \epsilon_0 \mathbf{Z} \langle P \rangle \hat{z} = \frac{\langle P \rangle}{c} \hat{z} \quad (2.17.18)$$

essendo c la velocità della luce nel vuoto.

La (2.17.18) é l'importante risultato trovato per la prima volta da **Maxwell** teoricamente e poi verificato sperimentalmente dal fisico russo **Lebedev** nel 1901.¹⁾

Nell'ipotesi che la superficie sia perfettamente riflettente, nel calcolo di \vec{t} bisogna tenere in considerazione il campo elettrico dell'onda riflessa. Conseguentemente, si ha:

$$\langle \vec{t} \rangle = \frac{2\langle P \rangle}{c} \hat{z} \quad (2.17.19)$$

Ovviamente nel caso in cui la superficie non é né assorbente né riflettente bisogna tenere conto del campo riflesso valutato con le formule di Fresnel.

É interessante illustrare il percorso teorico e sperimentale sulla pressione della luce. Per questo riportiamo una sintesi del libro di **John Henry Poynting: The Pressure of light - London, 1910**.

In che modo la luce esercita pressione

Quando noi vediamo il disastro causato su un muro marino da una tempesta, é facile credere che le onde dell'oceano esercitano una pressione contro la riva su cui hanno battuto. Ma non é facile pensare che anche le piccole ondulazioni di luce premono contro ogni corpo su cui cadono, pensare che quando una lampada é accesa onde di pressione sono inviati fuori da essa premendo contro ogni superficie che esse illuminano. Noi ora sappiamo certamente che la luce esercita tale pressione. É una pressione assai minuscola, molto piccola, anche quando essa é molto forte, per essere sentita dai nostri corpi, e può essere rilevata soltanto da dispositivi estremamente sensibili.

Nelle pagine seguenti io cercheró di dare qualche informazione sul ragionamento da cui venne predetta l'esistenza della pressione della luce, e descriveró gli esperimenti per

¹⁾ Pyotr Nikolaevich Lebedev: 1866 - 1912. Il suo nome é stato dato ad un cratere lunare.

mezzo dei quali essa fu, molti anni piú tardi, effettivamente rivelata e misurata. Io poi sottolineeró alcune conseguenze della pressione che possono in futuro essere verificate da osservazioni astronomiche. Agli inizi del 1800 sarebbe stato molto piú semplice spiegare come la luce esercita pressione rispetto ad oggi. A quell'epoca quasi tutti credevano che la luce consisteva di inconcepibilmente piccoli corpi, sfrecciando fuori ad enorme velocità da ogni superficie incandescente. Ogni molecola o atomo della superficie era supposto essere una piccola batteria di cannoni, che mantenevano un fuoco continuo di colpi, ciascun colpo immensamente pi piccolo dell'atomo che li sparava. Ogni superficie esposta alla luce era considerata bombardata dai corpuscoli, ed era quindi abbastanza naturale supporre che la superficie subiva una pressione. Possiamo illustrare il supposto modo di azione fissando un sottile disco verticale alla fine di un braccio e sospendendo tale braccio per mezzo di un sottile filo, in modo che esso potesse ruotare come in figura 2.17-1.

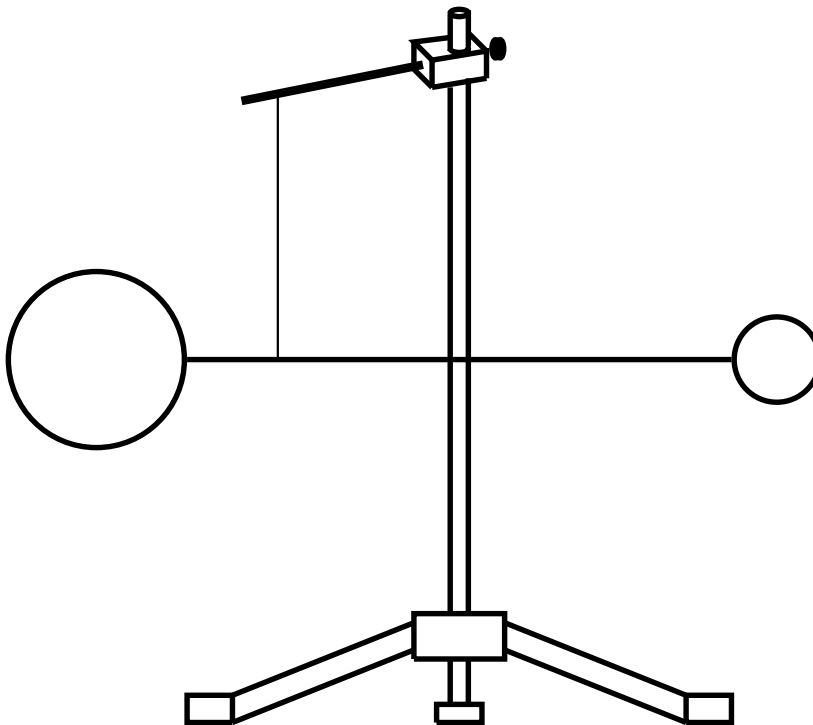


fig.2.17-1

Ora organizziamo un imbuto e un tubo metallico, come in fig. 2.17-2, in cui il disco

viene visto di taglio, e la sospensione non mostrata.

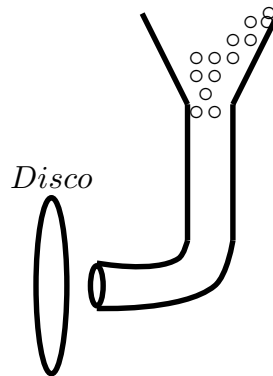


fig.2.17.2

Versiamo delle piccole palline nell'imbuto, esse corrono giù lungo il tubo e bombardano il disco. La pallina acquista quantità di moto. Esse trasportano questa quantità di moto, la cedono al disco quando essi lo colpiscono. Questa cessione di quantità di moto é la pressione.

Nel secolo diciottesimo, quando la teoria corpuscolare della luce fioriva, molti esperimenti furono fatti per rivelare una pressione esercitata dalla luce che colpiva un disco, come in figura 2.17-1, su una piccola scala e molto delicatamente sospeso, talvolta in aria, talvolta nel vuoto. **Qualche volta il disco era spinto indietro, qualche altra volta in avanti, e nessun osservatore otteneva risultati conclusivi o anche consistenti.**

Se questi primi sperimentatori avessero conosciuto il principio di conservazione della energia, essi sarebbero stati in grado di calcolare il valore della pressione, che essi stavano cercando, e avrebbero calcolato sulla base della loro falsa teoria il doppio dell'attuale valore che oggi noi conosciamo esso abbia. Anche questo doppio valore é troppo piccolo per essere rivelato con i mezzi di allora.

I loro risultati variabili, ora una attrazione ora una repulsione, erano dovuti, senza dubbio, a due azioni che sono ancora il terrore di tutti gli sperimentatori sul soggetto. Quando essi lavoravano in aria, la luce assorbita dal disco lo riscaldava. Il disco a sua volta riscaldava l'aria circostante che si espandeva e fluiva verso l'alto completamente, formando correnti conosciute come correnti di convezione, semplicemente piccoli venti verso l'alto. Se un disco di ferro é riscaldato e poi posto davanti ad una lanterna queste correnti formano deboli penombre su uno schermo e possono essere viste ascendenti come il fumo. Dipende interamente dalla posizione della piastra se questi flussi di corrente di aria tendono a premere il piatto posteriore o a tirarlo in avanti. L'azione delle correnti d'aria su un disco riscaldato da un fascio di luce puó facilmente essere molte volte piú grande della pressione della luce.

Quando essi lavoravano nel vuoto probabilmente un'altra azione entra in gioco, una azione scoperta e studiata da Sir William Crookes ¹⁾, che inventó un piccolo bello strumento per mostrarla, che egli chiamó **Radiometro**. Il radiometro nella sua piú comune forma consiste di quattro piccoli dischi di mica fissati ai quattro estremi di un croce orizzontale

¹⁾ Sir William Crookes: London, 17 giugno 1832 London, 4 aprile 1919

come in figura 2.17-3. La croce é libera di girare attorno ad un perno il piú possibile senza attrito, ed é contenuto in un bulbo di vetro, dove vi é un vuoto molto spinto, di circa tre pollici di diametro. **Ognuna delle piccole palette é annerita su un lato, e quando un fiammifero acceso o una candela é portata vicino al bulbo, le facce annerite delle palette retrocedono dalla sorgente di luce mentre le facce non annerite si muovono verso di essa.** All'inizio si suppose che l'azione potesse essere direttamente dovuta alla pressione della luce, ma é facile da vedere che questa pressione produrrebbe giusto il moto opposto. Considerato che la luce che incide sulle superfici non annerite é parzialmente riflessa e quindi premerebbe non solo quando incide sulle superfici ma darebbe, per cos dire, un altro contraccolpo essendo riflessa, mentre la luce che incide sulle superfici annerite premerebbe solo quando incide perché essa é assorbita e non riflessa. Le superfici non annerite quindi retrocederebbero.

Radiometro di Crookes

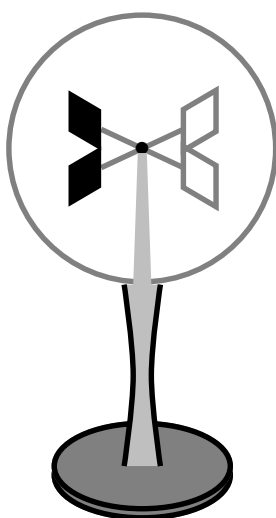


fig.2.17-3

É stato presto trovato che l'azione del radiometro é dovuta all'aria residua che ancora rimane in quello che noi chiamiamo il vuoto nel bulbo. Le superfici annerite assorbono la luce e cosí diventano piú calde delle superfici non annerite. Le molecole dell'aria nel bulbo si muovono in tutte le direzioni, e quelle che colpiscono la superficie nera calda acquistano una piccola extra energia da essa e tornano indietro con velocità piú alta di quella che esse avevano quando colpiscono la superficie, e cosí danno un contraccolpo contro di essa rispetto alla riflessione con la stessa velocità. Quelle che arrivano sul lato piú freddo tornano indietro con la stessa velocità e non danno luogo ad alcun contraccolpo. Cosí l'aria residua preme piú contro la superficie nera e le palette cominciano a girare.

Per ragioni che non possiamo approfondire qui, questa "azione radiometro", come essa é chiamata, é presa in serie considerazioni soltanto quando l'aria é molto rarefatta. Ma nessun dubbio era presente nei primi tentativi fatti per rivelare la pressione della luce su un disco in un recipiente vuoto.

Le correnti di convezione, allora, disturbano gli esperimenti quando noi lavoriamo in aria, e l'azione radiometro li disturba quando noi lavoriamo nel vuoto. Vedremo in seguito come é possibile governare fra Scilla e Cariddi e rivelare la vera pressione dovuta alla luce.

Sono trascorsi soltanto un centinaio di anni da quando Thomas Young pose termine alla teoria corpuscolare della luce e fondó a suo posto la teoria che la luce consiste di onde, una teoria presto accettata da tutti. Ma non vi era ragione a quel tempo di supporre che le onde potessero premere, e cosí esperimenti per rivelare la pressione della luce cessarono per quasi un secolo fino al 1873 quando James Clerk Maxwell formuló la Teoria Elettromagnetica della luce, una teoria ora universalmente accettata. In questa teoria la luce consiste ancora di onde, onde di perturbazione elettrica e magnetica esattamente come le onde usate nella telegrafia senza fili, ma di lunghezza microscopica invece di yarde o miglia da cresta a cresta. Egli mostró anche che tali onde eserciterebbero una pressione, ma esattamente metà di quella esercitata secondo la teoria corpuscolare abbandonata.

PRESSION DE LA LUMIERE¹⁾

Della forza repulsiva dei corpi radianti

Maxwell²⁾ ha dimostrato che un raggio luminoso o calorifico, incidente su un corpo assorbente, esercita su questo ultimo una pressione nella direzione della sua propagazione; l'intensità di questa pressione può essere messa sotto la forma:

$$P = \frac{E}{c} \quad (1)$$

dove E é l'energia incidente sul corpo per unità di tempo³⁾ e c la velocità di propagazione della luce nel mezzo che circonda i corpi.

Indipendentemente da Maxwell, Bartoli⁴⁾ e Boltzmann⁵⁾ sono arrivati ad un risultato analogo nel caso della luce riflessa da uno specchio; Bartoli ha trovato per l'incidenza normale una pressione due volte piú grande di quella che lo stesso raggio eserciterebbe, secondo Maxwell, su un corpo perfettamente assorbente.

I tentativi di Bartoli per stabilire sperimentalmente l'esistenza di una tale pressione sono rimaste infruttuose, perché Egli non é riuscito a sbarazzarsi dei fenomeni "radiometrici".

Il presente lavoro ha per scopo di determinare *il rapporto fra la forza newtoniana di attrazione e quella di repulsione dovuta all'irraggiamento* del Sole o di ogni altro corpo sferico di temperatura differente dallo zero assoluto. Le formule ottenute non sono tuttavia applicabili che *ai corpi perfettamente neri, le cui dimensioni sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda della luce incidente*; ciò é perché esse non permettono di risolvere delle

¹⁾ tradotto dal libro (versione francese): Pierre Lebedef: Pression de la lumiere - Paris, 1926.

²⁾ James Clerk Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism, art.792.

³⁾ N. du T. - Noi ci siamo attenuti al testo dell'Autore; é evidente che l'energia é rapportato non solo all'unità di tempo ma anche all'unità di superficie (dimensione): nel seguito P é espresso sia in dyne che dyne/cm^2 .

⁴⁾ A. Bartoli: Exners Rep., 21, p.198, 1885.

⁵⁾ L. Boltzmann: Wied. Ann., 22, p.31, 1884.

questioni interessanti, come la repulsione del Sole sulle code delle comete. l'azione mutua di due molecole vicine, ma esse danno solamente una indicazione sul senso nel quale bisogna cercare.

Solo l'ordine di grandezza del rapporto di queste forze ci interessa; noi esamineremo dunque qui il caso piú semplice in cui il corpo spinto é sferico, assorbe tutta l'energia incidente e la irradia dopo uniformemente in tutte le direzioni; e noi daremo i risultati numerici in prima approssimazione solamente.

Ci proponiamo di calcolare la quantità d'energia solare E che arriva per secondo su una superficie di 1 cm^2 normale ai raggi; sia J l'equivalente meccanico del calore=425 grm·metre, C la costante solare o quantità di calore solare (espressa in calorie-grammi) che attraversa in un minuto una superficie di 1 cm^2 normale ai raggi; secondo Langley, $C = 3 \text{ cal}$.

$$E = \frac{C}{60} J = \frac{3}{60} 425 = 21 \text{ grm} \cdot \text{metre} / \text{sec} \cdot \text{cm}^2$$

Prendendo la velocità della luce c eguale a $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, si trova dalla formula (1) la pressione P_0 esercitata da un fascio di raggi solari di cm^2 di sezione su un corpo assorbente alla stessa distanza dal sole della Terra⁶⁾:

$$P_0 = \frac{E}{c} = \frac{2}{3} 10^{-7} \text{ gr} / \text{cm}^2$$

dove nel sistema C.G.S.:

$$P_0 = 6 \cdot 10^{-5} \text{ dyne} / \text{cm}^2 \quad (2)$$

Prendendo per la distanza dal Sole della Terra $\rho = 15 \cdot 10^{12} \text{ cm}$, per la velocità della Terra sulla sua orbita $v = 3 \cdot 10^6 \text{ cm/s}$, si trova che l'accelerazione solare A , alla distanza ρ , é:

$$A = \frac{v^2}{\rho} = 0.6 \text{ cm} / \text{sec}^2$$

Cosí alla distanza ρ , il sole esercita su una massa di 1 grammo una attrazione:

$$A = 0.6 \text{ dyne} \quad (3)$$

L'azione del Sole sui corpi che gravitano attorno ad esso si compone dell'attrazione newtoniana e della repulsione dovuta all'irraggiamento.

Sia un corpo sferico che assorbe tutta l'energia ricevuta dal Sole e la irradia poi uniformemente in tutte le direzioni, e siano: ρ , la distanza dal corpo al Sole; r , il raggio del corpo; δ , la sua massa specifica (la sua densità). Calcoliamo l'attrazione G e la repulsione H esercitata dal sole su questo corpo; si ha:

$$G = \frac{4}{3} \pi r^3 \delta A \quad H = \pi r^2 P_0$$

⁶⁾ La forza esercitata da un fascio di raggi solari di 1 m^2 di sezione e di $2/3$ milligrammi.

da cui la forza risultante F , assumendo G come unità:

$$F = \frac{G - H}{G} = 1 - \frac{H}{G} = 1 - \frac{3}{4} \frac{P_0}{Ar\delta} \quad (4)$$

Per un corpo dato, questa forza F é una costante caratteristica, *indipendente dalla distanza dal Sole*; effettivamente, l'attrazione A cosí come la pressione P_0 esercitata da un fascio di raggi di 1 cm^2 di sezione sono tutte e due inversamente proporzionali al quadrato della distanza; il loro rapporto resta dunque costante.

Sostituendo nella (4) P_0 ed A dai loro valori numerici, dedotti dalla (2) e dalla (3), si ottiene:

$$F = 1 - \frac{10^{-4}}{r\delta} \quad (5)$$

Questa formula ci mostra che, per tutti i corpi tali che $\delta > 1 \text{ gr/cm}^3$ e $r > 10 \text{ m}$, gli scostamenti dalla legge newtoniana di attrazione sono troppo piccoli per poter essere rivelate dalle piú precise osservazioni.

Piú il raggio del corpo é piccolo, piú la forza repulsiva del Sole assume importanza relativa.

Come si sa⁷⁾, le code delle comete sono costituite soprattutto da molecole indipendenti di idrocarburi gassosi. I raggi di queste non superano 10^{-8} cm e la loro massa specifica é inferiore a 10 g/cm^3 , come lo ha dimostrato F. Exner⁸⁾; ma in questo caso, la formula (5) non é piú rigorosa, perché le molecole non sono perfettamente nere e che il loro raggio é piccolo rispetto alla lunghezza d'onda della luce incidente. Noi possiamo solamente affermare che la repulsione del Sole sulle code delle comete essendo molto piú forte della loro attrazione, differente secondo le sostanze di cui é formata la coda, ed in ragione inversa del quadrato della distanza dal Sole, non é in contraddizione con la nostra formula.

Dalle osservazioni della curvatura di 40 code di comete, T. Bredichin ha dedotto tre valori per questa forza repulsiva: 17; 1,1; 0,2⁹⁾. Questi valori possono facilmente essere attribuiti all'azione meccanica dei raggi del Sole, senza che sia necessario di fare appello all'ipotesi proposta da Zollner¹⁰⁾ della carica elettrostatica del Sole. Bisogna rimarcare che Faye¹¹⁾ ha già enunciato l'ipotesi che la forza repulsiva del Sole é dovuta al suo irraggiamento, senza pertanto indicare il meccanismo di questa repulsione.

Si sa che il raggio del Sole $R_0 = 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$, la sua massa specifica $\Delta_0 = 1.4 \text{ gr/cm}^3$ e la quantità di calore irradiata da un centimetro quadrato della sua superficie e per secondo $Q_0 = 2000$ piccole calorie¹²⁾. Designando con S_0 il rapporto fra la forza repulsiva

⁷⁾ Scheiner: Spectral Analyse der Gestirne, 3, Cap.3, Leipzig, 1899.

⁸⁾ F.Exner: Sitzungsber, der Wien, Akad. 91, II, p. 850, 1884; Exners Rep. d. Phys. 2, p. 1446, 1885; Wied. Beibl. 9, p.714,1885; Journ. de Phys. (2) 5, p. 240, 1885.

⁹⁾ Th. Bredichin: Revision des valeurs numeriques de la force repulsive. En commission chez Voss, Leipzig, 1885.

¹⁰⁾ Zollner, Ueber die Natur der Kometen, Leipzig, 1872.

¹¹⁾ Faye, C.R. 93, p. 11,362, 1881.

¹²⁾ Ammettendo che la distanza Terra - Sole $\rho = 15 \cdot 10^{12} \text{ cm}$, 1 cm^2 riceve 3 piccole calorie

dell'irraggiamento del Sole e la sua forza newtoniana, noi possiamo calcolare questo rapporto S per un corpo qualunque di raggio R , di massa specifica Δ e emettente Q calorie per cm^2 di superficie e per secondo. La formula (5) ci dá:

$$S_0 = \frac{10^{-4}}{r\delta}$$

Poiché S é proporzionale a Q e inversamente proporzionale a Δ e a R , abbiamo:¹³⁾

$$S = S_0 \frac{Q}{Q_0} \frac{\Delta_0}{\Delta} \frac{R_0}{R}$$

Sostituendo S_0 , Q_0 , Δ_0 , R_0 con i loro valori, noi otteniamo:

$$S = \frac{10^{-4}}{r\delta} \cdot \frac{Q}{2000} \cdot \frac{1.4}{\Delta} \cdot \frac{7 \cdot 10^{10}}{R} = 5 \frac{Q}{r\delta R \Delta} \cdot 10^3 \quad (7)$$

Indicando con K la risultante delle forze di attrazione e di repulsione di questo corpo, noi abbiamo:¹⁴⁾

$$K = 1 - S = 1 - 5 \frac{Q}{r\delta R \Delta} \cdot 10^3 \quad (8)$$

Christiansen¹⁵⁾ ha trovato che un corpo nero, alla temperatura di 0^0C , irradia per cm^2 di superficie e per secondo, la quantità:

$$Q' = (1.21 \cdot 10^{-12}(274^4)) = 0.0037 \quad \text{piccole calorie}$$

Cosí la forza k' esercitata nello spazio interplanetario da un corpo sferico perfettamente nero alla temperatura di 0^0C di raggio R cm e di massa specifica Δ , su un corpo perfettamente nero di raggio r e di massa specifica δ , é approssimativamente:

$$K' = 1 - \frac{20}{r\delta R \Delta} \quad (9)$$

Si deduce che due corpi sferici, alla temperatura di 0^0C , di massa specifica $\Delta = \delta = 10$ gr/cm^2 e di raggi $R = r = 4$ mm circa, non si attraggono, né si respingono nello spazio interstellare, e che per dei corpi di raggi piú piccoli, é la dorz di repulsione che prende il

per minuto o 0.05 piccole calorie per secondo, noi troviamo che 1 cm^2 della superficie del Sole, alla distanza dal centro $R_0 = 7 \cdot 10^{10}$ cm , irradia $Q_0 = 0.05 \left(\frac{\rho}{R_0}\right)^2 = 2000$ piccole calorie per secondo.

¹³⁾ La forza di attrazione é proporzionale a R^3 e la forza di repulsione a R^2 .

¹⁴⁾ N. d. T.: La forza di attrazione é rapportata, come precedentemente alla forza d'attrazione presa per unitá.

¹⁵⁾ Christiansen: Wied. Ann., 19, p. 279, 1883.

sopravvento: essa é un milione di volte piú grande di quella di attrazione per delle particelle di raggio dell'ordine di 0.001 mm.

Prendendo dei raggi ancora piú piccoli, ci avviciniamo alle dimensioni delle molecole; ma, per questi ultimi, la formula (8) non é piú applicabile: non solo esse non sono perfettamente nere, ma l e loro dimensioni e le distanze intermolecolari sono piccole rispetto alle lunghezze d'onda dell'irraggiamento. Si puó ammettere che le molecole agiscono le une sulle altre come dei risuonatori, ciò che é un fenomeno piú complicato.

Talvolta, questa formula ci fa vedere che studiando le forze dette "molecolari" non si possono trascurare a priori gli effetti dell'irraggiamento; bisogna in ciascun caso valutare la parte che a loro spetta nell'insieme di queste forze.

Ricerche Sperimentali Sulla Pressione Della Luce

La teoria elettromagnetica della luce implica l'esistenza di forze ponderomotrici in tutti i mezzi polarizzati elettricamente o magneticamente, nonché in ogni fascio di raggi. Esponendo questa teoria, Maxwell dice¹⁾

"In ogni mezzo dove le onde si propagano, vi é una pressione normale alle onde e numericamente eguale all'energia per unitá di volume." (Quindi in un mezzo in cui le onde si propagano, vi é una pressione nella direzione normale alle onde e numericamente eguale all'energia nell'unitá di volume).

In seguito, questa proposizione é stata adottata e sviluppata da Heaviside ²⁾, Lorentz ³⁾, Cohn ⁴⁾ et Goldhammer ⁵⁾.

Per una tutt'altra via e senza conoscere la teoria di Maxwell, Bartoli ⁶⁾ arrivó allo stesso risultato. Egli considerava dei cicli che renderebbero possibili il trasporto dell'energia raggiante da un corpo piú freddo ad un corpo piú caldo, per mezzo di specchi mobili, e dedusse dal secondo principio della termodinamica il lavoro necessaario a questo trasporto. La necessitá di fornire un lavoro per spostare lo specchio in senso inverso della direzione di propagazione del raggio incidente, lo condusse all'idea che il raggio deve esercitare una pressione sullo specchio. Calcolando questa pressione, egli ottiene lo stesso valore di Maxwell.

Il problema é stato ripreso cosí da Boltzmann ⁷⁾, Galitzine ⁸⁾, Guillaume ⁸⁾ e Drude⁹⁾. Questo ultimo estese la teoria a un corpo perfettamente nero.

¹⁾ J.C.Maxwell: Treatise on electricity and magnetism, cf.792, 1873.

²⁾ O.Heaviside: Electromagnetic theory, 1, p.334 (London, 1893).

³⁾ Versuch einer Theorie des electromagnetischen und optischen Erscheinungen in bewegten Korpern, p.29 (Leiden, 1895).

⁴⁾ E.Cohn, Das electromagnetische Feld p. 543 (Leipzig, 1900).

⁵⁾ D.Goldhammer, Ann. d. Phys. 4, p. 834, 1901.

⁶⁾ Bartoli: Exner's rep. d. Physik 21, p. 198, 1884.

⁷⁾ Boltzmann: Wied. Ann., 22, p. 33, 291, 616, 1884.

⁸⁾ Galitzine: Wied. Ann., 47, p. 479, 1892.

⁸⁾ Ch. Ed. Guillaume, Archives des Sciences phys. et nat. 31, p. 121, 1894.

⁹⁾ P. Drude, Lehrbuch der Optik, p.447, Leipzig (1900).

Sia un fascio di raggi paralleli incidente normalmente su una superficie piana. Indichiamo con P la pressione di Maxwell-Bartoli, con E la quantità di energia fornita per secondo e per cm^2 , con ρ il potere riflettente della superficie e con c la velocità di propagazione del fascio. Si ha:

$$P = \frac{E}{c}(1 + \rho)$$

Il potere riflettente ρ varia fra 0 (per una superficie perfettamente nera) e 1 (per una superficie perfettamente riflettente).

Il valore di P é molto piccolo. Maxwell cosí come Bartoli hanno calcolato che i raggi del Sole incidenti normalmente su una superficie piana esercitano su di esse una pressione di $0.4 mgr/m^2$ nel caso della superficie perfettamente assorbente, e di $0.8 mg/m^2$ nel caso di uno specchio perfetto.

Ben prima di questi autori, Keplero (1619) spiegó per la prima volta, per mezzo della pressione esercitata dai raggi solari sulla materia delle code delle comete, la forma caratteristica di queste code, e Longomontanus (1622) sostenne ardentemente questa idea che era in perfetto accordo con la teoria di emissione ammessa allora. Eulero (1746) provó a dare a questa ipotesi una base teorica ammettendo con Huygens la vibrazione longitudinale delle onde luminose.

Le prime esperienze per verificare questa ipotesi sono state tentate da De Mairan e Du Fay (1754). Le correnti di convezione in aria hanno impedito questi sperimentatori di osservare questo fenomeno. Se si pensa ai mezzi di cui poteva disporre un fisico del XVIII secolo, non si può che ammirare questo tentativo. Le stesse difficoltà impedirono a Fresnel¹⁰⁾. Crookes fu condotto da esperimenti analoghi alla scoperta delle forze radiometriche.

Questo problema può avere nell'avvenire una grande importanza nella fisica della astronomia. le basi della teoria si riducono a certe proprietà elementari delle superfici assorbenti e riflettenti, e si può domandarsi se altri fattori non entrano in gioco, questione che solo, senza dubbio, dei ricercatori sperimentali possono delucidare.

I tentativi di Zollner¹¹⁾ e di Bartoli (l.c. p.205), non hanno dato risultati positivi, io ho intrapreso la ricerca presentata di seguito.

I. - Esperienze preliminari

Si legge nell'opera di Maxwell (par. 793):

"É probabile che si possa ottenere una energia radiante molto piú forte (di quella dei raggi del Sole) con l'aiuto dei raggi concentrati di una lampada elettrica. Tali raggi che arrivano su un disco metallico sottile delicatamente sospeso nel vuoto produrranno forse un effetto meccanico osservabile. (É probabile che una piú grande energia di radiazione possa essere ottenuta per mezzo di raggi concentrata di lampada elettrica. Tali raggi incidono su un sottile disco metallico, delicatamente sospeso nel vuoto, possa forse produrre un effetto meccanico osservabile)".

Cominciando le mie esperienze, io pensai che la disposizione suggerita da Maxwell non avrebbe condotto allo scopo, perché Zollner l'aveva già provato (l.c., p. 155) senza suc-

¹⁰⁾ Fresnel: Ann. de Chimie e de Phys., (2) 29, p. 57, 107, 1825.

¹¹⁾ Zollner: Pogg. Ann., 160, p. 154.

cesso. Questo ultimo inoltre fa rimarcare che "il valore (della pressione della luce) previsto teoricamente da Maxwell é circa 100000 volte piú piccolo dell'effetto osservato occasionalmente da Crookes"¹²⁾. Cosí ho pensato che, anche se si riuscisse a ridurre notevolmente queste forze radiometriche parassite, questo sará appena sufficiente per ottenere un risultato decisivo, e che per questo scopo, era preferibile cercare un mezzo per compensare il loro effetto.

Studiando le forze radiometriche, Schuster¹³⁾ dimostró che si trattava di forze interne al radiometro, ciò che Righi ¹⁴⁾ confermó con una esperienza molto elegante; Egli dice: "Io ho fatto fluttuare il radiometro sull'acqua, la testa in basso, in modo che la cappa in vetro del mulinelloriposante sul tubo che le impedisce di cadere nella posizione normale, ne risultava un attrito che impediva il mulinello di girare. Facendo cadere sul mulinello un intenso fascio, io non ho ottenuto la minore deviazione". Questo risultato é stato confermato da Berlin e Garbe)Loc. cit. p.62) che hanno ripetuto l'esperimento.

Per osservare l'effetto della pressione Maxwell-Bartoli, io ho fatto uso del dispositivo di Righi nella maniera seguente: Una lamina di mica era mantenuta arrotolata in forma di cilindro fra due dischi sottili di nichel. All'interno di questo cilindro che formava il corpo del radiometro, si trovava l'aletta fissata rigidamente al cilindro. Questo radiometro fu sospeso ad un fili di vetro all'interno di una sfera egualmente di vetro, vuoto. Illuminando l'aletta per mezzo di una lampada ad arco, io osservai costantemente delle deviazioni ¹⁵⁾ dello stesso ordine di grandezza di quelle calcolate da Maxwell-Bartoli ¹⁶⁾.

In questi esperimenti preliminari, io ho studiato a titolo di confronto le forze agenti sull'aletta senza l'involucro di mica e ho trovato che queste forze radiometriche sono lontano di realizzare il valore dato da Zollner. L'effetto di queste forze sembrava minore di quello dovuto alla convezione che si manifesta piú fortemente allor quando le dimensionirelative dell'involucro del radiometro si accrescono.

Io ho dunque abbandonato questo metodo per adottare quello indicato da Maxwell.

¹²⁾ Nel suo calcolo, Zollner parte da un valore troppo piccolo per l'irraggiamento di una candela. Se si confrontano le forze radiometriche di questo irraggiamento osservate da E. Nichols (Wiefd. Ann., 60, p.405, 1897) con la pressione calcolata secondo Maxwell-Bartoli sulla base dei dati di Angstroem (Wied. Ann., 67, p. 647, 1899), si ottiene un rapporto di circa 10000.

¹³⁾ Schuster: Phil. Mag. (5) 2, p.313, 1876.

¹⁴⁾ Bertin et Garbe: Ann. de Chim. et de Phys. (5) 11, p.53, 1877; Righi: Scienza Applicata, Vol. I, Parte II, fasc. 8, Bologna.

¹⁵⁾ Se Righi cosí come Berlin e Garbe non hanno potuto vedere la pressione Maxwell-Bartoli, questo é dovuto unicamente al fatto che il loro apparato calcolato per le forze radiometriche non avevano la sensibilitá necessaria all'osservazione della pressione della luce.

¹⁶⁾ L'esposizione di questi esperimenti preliminari é stato presentato il 17 maggio 1899, nella seduta della Societá Vaudoise des Sciences Naturelles, a Lausanne (Arch. d. Sc. phys. et nat. de Geneve, 8, p.174, 1899). Delle circostanze fortuite hanno impedito all'autore di fare stampare un testo dettagliato.

II. - Disposizione degli apparecchi e degli esperimenti

La disposizione di maxwell, semplice come può sembrare, presenta due difficoltà essenziali che bisogna superare: le correnti di convezione e le forze radiometriche. Più il vuoto è perfetto, meno si fanno sentire queste forze, ma senza mai diventar trascurabili.

Le forze di convezione sono prodotte per il fatto che i raggi luminosi incidenti sulla aletta, la riscaldano e simultaneamente anche gli strati adiacenti del gas sono riscaldati, provocando così una corrente ascendente. Se la posizione dell'aletta non è rigorosamente verticale, questa corrente la sposta; la grandezza ed il verso di questo spostamento dipendono unicamente dall'aumento della temperatura del gas e non dalla direzione di propagazione dei raggi incidenti sull'aletta. L'effetto di queste forze si elimina se si illumina l'aletta con dei raggi della stessa sorgente, alternativamente da un lato e dall'altro.

quanto alle forze radiometriche, sono state prese le seguenti precauzioni per ridurle al minimo: Le dimensioni del bulbo di vetro furono scelte il più grande possibile ($D=20$ cm)¹⁾. Un filtro appropriato elimina tutti i raggi che potessero essere assorbiti dalle pareti del bulbo²⁾. Le alette erano costruite in lamine metalliche sottili al fine di ridurre al minimo la differenza di temperatura fra le due superfici. Il vuoto è stato spinto per quanto possibile per mezzo di una pompa a mercurio e dell'impiego successivo di una miscela refrigerante.

Se le forze radiometriche sono deboli, il loro effetto si può calcolare così: Queste forze provengono dalla differenza di temperatura delle due superfici dell'aletta, quando una di esse è illuminata. Esse sono, a parità, in ragione diretta dello spessore dell'aletta³⁾. Dunque, lavorando con due alette di spessore molto differente, si può calcolare l'effetto che eserciterà il fascio luminoso su un'aletta di spessore nullo, per la quale le forze radiometriche sono anche nulle. Io aggiungo subito che questa correzione è stata necessaria solo in caso di alette di platino; in quelle superfici riflettenti, le forze radiometriche erano, contro ogni pronostico, così deboli che il loro effetto sparirebbe di fronte alle altre cause di inevitabili errori.

Lenard e Wolf⁴⁾ hanno osservato una polverizzazione dei corpi illuminati. questo fenomeno può donare nascita a delle relazioni che accompagneranno inevitabilmente le forze di Maxwell-Bartoli. Queste ipotetiche forze di reazione dovranno pertanto dipendere della lunghezza d'onda della luce incidente cosicché della natura chimica dei corpi illuminati (qui alette): le esperienze descritte più sotto con dei filtri della luce colorata e delle alette di natura differente non mi hanno permesso di osservare un effetto qualche poco apprezzabile di queste forze ipotetiche.

¹⁾ V.W. Crookes, Philos. Transact. of the R.S. London, 170, p.113, 1879.

²⁾ V.W. Crookes, Philos. Transact. of the R.S. London, 168, p.266, 1878.

³⁾ Nelle mie esperienze, la differenza di temperatura fra l'aletta illuminata e la parete del bulbo era alcune volte superiore a quella esistente fra le due superfici dell'aletta stessa. Le forze radiometriche possono essere una funzione qualunque della prima di queste differenze di temperatura, ma la loro azione ponderomotrice sull'aletta è dovuta alla differenza di intensità di queste forze sulle due facce di quella, e questa ultima differenza è, con una approssimazione sufficiente, proporzionale alla differenza di temperatura delle due facce dell'aletta.

⁴⁾ Ph. Lenard und M. Wolf. Wied. Ann., 37, p. 455, 1899.

Le esperienze sono state fatte con tre apparecchi ad alette di forma differente.

Apparecchio I (fig.3.1) - Un'asta di vetro *G* porta due paia di alette in forma di croce, di spessore differente; esse sono di platino e fissate all'asta con degli anelli dello stasso metallo. Affinché le alette di tutti gli apparecchi abbiano esattamente le stesse dimensioni (diametro=5 mm), sono state tagliate in fogli di platino utilizzando uno stesso stampo. Due delle alette dell'apparecchio I avevano le loro facce riflettenti dalle due parti, le facce delle due altre erano ricoperte di nero di platino⁷⁾ (per galvanizzazione); questa operazione ha durato per l'aletta piú spessa, cinque volte piú a lungo. Un anello di platino *O* é stato saldato all'asta *G* al fine di poterla sospendere al filo di torsione che finisce con un gancio. Questo anello era in un piano perpendicolare a quello delle alette per non impedirgli di prendere la loro posizione di equilibrio.

Apparecchio II (fig.3.2) - Due fili di platino sono fissati trasversalmente alle estremitá dell'asta di vetro; é dentro questi due che sono tesi quattro altri fili di platino molto sottili (0.05 mm).

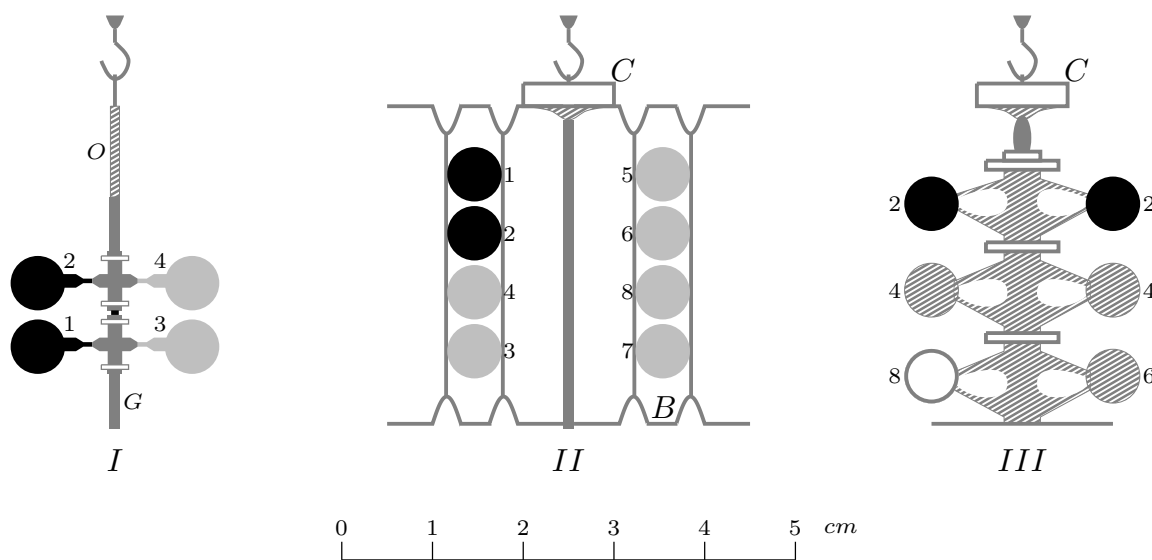


fig.3

Questi ultimi passano per dei piccoli orifizi praticati nelle alette, e le mantiene cosí in un piano verticale. il debole spessore di questi fili permette di trascurare la loro azione radiometrica. L'apparecchio era sospeso al filo di torsione per l'intermediario di un Cardan *C* di fili di platino; la sua verticalitá era assicurata da un piccolo sovrappeso in platino *B*.

Apparecchio III (fig.3.3) - Questo apparecchio é rassomigliante all'apparecchio *I*, ma é munito di una sospensione Cardanica *C*. Delle strisce metalliche sottili (larghezza di 0.3

⁷⁾ CF. F. Kurlbaum, Wied. Ann. 67, p.848, 1899. É raccomandabile al cominciare della galvanizzazione (durante i primi 30 secondi) di agitare costantemente ed energicamente l'aletta nel bagno. La superficie dell'aletta assume allora una colorazione grigio acciaio chiaro. In seguito, in un bagno immobile, il platino spugnoso si fissa convenientemente.

mm) servono di supporto alle alette e sono sufficienti per mantenerle abbastanza accuratamente in posizione verticale. Un leggero sostegno in alluminio sostiene una aletta di mica (8). All'estremità dell'asta erano fissati dei fili trasversali in alluminio che proteggevano le alette da eventuali urti contro le pareti del bulbo, durante la messa a punto.

Io ho sperimentato con delle alette di sostanze diverse:

1. Platino ricoperto di un forte strato di nero di platino.
2. Platino ricoperto di uno strato 5 volte meno forte di nero di platino.
3. Platino con superficie riflettente, di spessore 0.10 mm
4. Platino con superficie riflettente, di spessore 0.02 mm
5. Alluminio con superficie riflettente, di spessore 0.10 mm
6. Alluminio con superficie riflettente, di spessore 0.02 mm
7. Nickel con superficie riflettente, di spessore 0.02 mm
8. Mica con superficie riflettente, di spessore <0.01 mm

Il filo di torsione era in vetro, di 30 cm di lunghezza; l'estremità inferiore era munita di uno specchio piano e di un gancetto; l'estremità superiore (fig.4) era bloccata in una ganascia di ferro nell'asse di un chiusura a mercurio¹⁾. Per evitare, l'uso di colla, le due estremità del filo sono state strette fra due pezzi di cartone d'amianto (precedentemente riscaldato a incandescenza) e in seguito, schiacciato in una vite ganascia fissa al telaio nella parte inferiore dello specchio con un anello di platino.

Questo quadro era in alluminio platinato. Lo specchio era ricoperto di platino per polverizzazione catodica nel vuoto; uno specchio d'argento è troppo presto deteriorato dai vapori di mercurio. Date il debole potere riflettenti di tali specchi e l'imperfezione dell'immagine causata dal doppio passaggio del fascio attraverso la parete del bulbo, l'illuminazione della scala con il metodo di Wellmann Martens¹⁾ è stato trovato più indicato.

Per determinare, dalle oscillazioni, la grandezza della coppia, ho sospeso al gancio del filo di torsione un filo di rame di 4,0 centimetri di lunghezza e 0.314 gr. massa.

Gli esperimenti sono stati fatti con tre fili di torsione diversi, di cui le coppie sono state scelte in modo tale che, la distanza dello specchio dalla scala era eguale a 1200 divisioni della scala, la doppia deviazione prodotta dall'illuminamento delle alette riflettenti raggiungono da 40 a 90 divisioni della scala. I semi periodi di oscillazione per questi tre fili erano di 15.35 e 13 secondi.

L'evacuazione dell'aria dal bulbo si faceva con l'aiuto della pompa automatica di

¹⁾ Tutte le parti in vetro sono state costruite in modo ineccepibile dalla ditta G. Kramer a Fribourg (Baden).

¹⁾ F.Martens, Wied. Ann., 62, p.206,1897; 64, p.625,1898. L'apparecchio è stato fornito da Schmidt und Haensch, Berlin. Queste scale sono molto raccomandate per i lavori con dei piccoli specchi e dei galvanometri sensibili.

Kahlbaum¹⁶⁾. Delle misure per mezzo del manometro di McLeod¹⁷⁾ hanno mostrato che si arriva facilmente ad una pressione parziale dell'aria inferiore a 0.0001 *mm* (inferiore ad un quindicesimo della tensione dei vapori saturi del mercurio alla temperatura del laboratorio).

Io ho ottenuto una rarefazione ancora piú grande con il procedimento seguente: si metta in fondo al pallone *B* (fig. 5) una goccia di mercurio *Q* e si innalza la sua temperatura di 5° al di sopra di quella del laboratorio per mezzo di un bagnomaria *K*₁. I vapori di mercurio riempiono il pallone, sono aspirati dalla pompa e risucchiano cosí il resto dell'aria.

¹⁶⁾ G.Kahlbaum, Wied. Ann., 53, p.109,1894. Per eliminare i vapori provenienti dalla valvola di lubrificazione utilizzata per prima rarefazione, una chiusura barometrica é stata stabilita tra questa valvola e la pompa. La forza del gruppo é stata aumentata da un tubo di ferro inserito nel tubo goccia di mercurio. L'apparecchio é stato fornito da C.Kramer, Freiburg in Br. Dopo una esperienza di molti anni con delle pompe a mercurio automatiche di diversi tipi, io devo dire che questa pompa da i migliori risultati ed é la piú semplice maniera di tutte quelle che io conosco.

¹⁷⁾ G. Kahlbaum, Zeitschr. fur Instrkd, 15, p.192, 1895.

Appendice al Cap. 2

2A.1 - Covarianza delle equazioni di Maxwell

Se una sorgente di radiazione monocromatica é in moto rispetto ad un osservatore, la frequenza della radiazione osservata sar  aumentata o diminuita se la sorgente e l'osservatore si avvicineranno o si allontaneranno rispettivamente l'uno all'altro. Questo principio, enunciato da **Christian Doppler** nel 1843,   chiamato **effetto Doppler**.

Fondamentalmente l'effetto Doppler   una conseguenza della covarianza delle equazioni di Maxwell rispetto a trasformazioni di Lorentz. Per il caso pi  usuale in cui la sorgente e l'osservatore sono nel libero spazio, la formulazione relativistica esatta dell'effetto Doppler   ben conosciuta. Ma in presenza di mezzi materiali l'effetto Doppler   pi  complicato e coinvolge questioni che ancora non sono state completamente risolte.

In questo capitolo   discusso il problema di valutare l'effetto Doppler nei mezzi materiali.   noto che per mezzi omogenei il calcolo pu  essere fatto utilizzando il principio di invarianza delle fasi, mentre per mezzi non omogenei   richiesto un pi  elementare punto di partenza.

Secondo la teoria della relativit , le equazioni di Maxwell devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali cio  essi devono essere covarianti rispetto a trasformazioni di Lorentz.† Questo significa che se noi scriviamo le equazioni di Maxwell in un sistema di riferimento inerziale K e poi con una appropriata trasformazione di Lorentz passiamo dalle coordinate x, y, z, t di K alle coordinate x', y', z', t' di un altro sistema di riferimento inerziale K' che si muove con velocit  costante rispetto a K , le funzioni dipendenti, cio  i quattro vettori del campo, il vettore densit  di corrente e la densit  di carica, devono trasformarsi in modo tale che le equazioni trasformate abbiano lo stesso aspetto formale delle equazioni originali.

Le trasformazioni di Lorentz possono essere considerate una conseguenza del postulato che la velocit  della luce nel vuoto abbia lo stesso valore c in tutti i sistemi di riferimento. Per mostrare questo, facciamo coincidere le origini spaziali dei sistemi di riferimento K e K' agli istanti $t = t' = 0$ e introduciamo la conveniente notazione $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict, x'_1 = x', x'_2 = y', x'_3 = z', x'_4 = ic'$. Allora, in questa notazione, il postulato comporta che la condizione:

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu \quad (2A.1.1)$$

sia soddisfatta. Nella (2A.1.1) abbiamo soppresso il simbolo di sommatoria, cosa che faremo anche in seguito, e usiamo la convenzione che gli indici ripetuti sono sommati da 1 a 4. Questa condizione a sua volta comporta che le coordinate x'_μ e x_μ siano correlate

† La covarianza delle equazioni di Maxwell rispetto a trasformazioni di Lorentz fu provata da Lorentz e Poincar , e fisicamente interpretata da Einstein. Il loro lavoro, tuttavia, fu intenzionalmente ristretto alle equazioni di Maxwell della teoria degli elettroni, cio  le cosiddette equazioni microscopiche di Maxwell-Lorentz, e non dei mezzi materiali. La generalizzazione della teoria nel caso di mezzi materiali fu finalmente effettuata da Minkowsky dal postulato che le equazioni macroscopiche di Maxwell siano covarianti rispetto a trasformazioni di Lorentz.

dalle trasformazioni lineari:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu \quad x_\nu = a_{\mu\nu}x'_\mu \quad (2A.1.2)$$

i cui coefficienti $a_{\mu\nu}$ obbediscono alle condizioni:

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = a_{\nu\mu}a_{\lambda\mu} = \delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{for } \nu = \lambda \\ 0 & \text{for } \nu \neq \lambda \end{cases} \quad (2A.1.3)$$

Queste trasformazioni lineari costituiscono il gruppo completo di trasformazioni di Lorentz. Poiché il determinante $|a_{\mu\nu}|$ può essere +1 o -1, questo gruppo completo divide naturalmente in trasformazione positive per cui $|a_{\mu\nu}| = +1$ e in trasformazioni negative per cui $|a_{\mu\nu}| = -1$. Da queste le trasformazioni positive sono selettive perché essi includono la trasformazione identità:

$$x'_\mu = x_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (2A.1.4)$$

Le trasformazione positive, che possono essere pensate come una rotazione in uno spazio quadridimensionale o, equivalentemente, come sei rotazioni nei piani x_1x_2 , x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 , x_2x_4 , x_3x_4 , non contengono solo le trasformazioni di Lorentz proprie ma anche trasformazioni estranee coinvolgenti le inverse di due o quattro assi. Quindi, quando queste trasformazioni estranee sono escluse, quelle che rimangono delle trasformazioni positive costituiscono le trasformazioni di Lorentz proprie.

Assumendo che le coordinate sottoposte ad una appropriata trasformazione di Lorentz, noi definiamo un quadrivettore come un insieme di quattro quantità A_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) che trasforma le coordinate:

$$A'_\mu = a_{\mu\nu}A_\nu \quad (2A.1.5)$$

Tuttavia, definiamo un quadritensore $A_{\mu\nu}$ di rango 2 come un insieme di 4^2 quantità che obbediscono la legge di trasformazione:

$$A'_{\mu\nu\lambda} = a_{\mu\nu}a_{\mu\beta}a_{\lambda\gamma}A_{\alpha\beta\gamma} \quad (2A.1.6)$$

ed un quadritensore $A_{\mu\nu\lambda}$ di rango 3 come un insieme di 4^3 quantità che obbediscono la legge di trasformazione:

$$A'_{\mu\nu\lambda} = a_{\mu\sigma}a_{\nu\beta}a_{\lambda\gamma}A_{\alpha\beta\gamma} \quad (2A.1.7))$$

In termini delle quantità $F_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, J_α (α, β) (= 1.2.3.4), i cui valori sono dati da:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z \\ -\frac{i}{c}E_x & -\frac{i}{c}E_y & -\frac{i}{c}E_z & 0 \end{bmatrix} \quad (2A.1.8)$$

$$G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix} \quad (2A.1.9)$$

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \\ ic\rho \end{bmatrix} \quad (2A.1.10)$$

le due equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (2A.1.11)$$

diventano:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4) \quad (2A.1.12)$$

e le altre due equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{J} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2A.1.13)$$

diventano:

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = J_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad (2A.1.14)$$

Dal postulato che le equazioni di Maxwell sono covarianti rispetto ad una appropriata trasformazione di Lorentz delle coordinate, cioè, che le forme quadridimensionali (2A.1.12) e (2A.1.14) sono covarianti, segue che $F_{\alpha\beta}$ e $G_{\alpha\beta}$ sono quadritensori di rango 2 e J_α é un quadrivettore. Questo significa che quando le coordinate subiscono una appropriata trasformazione di Lorentz:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (2A.1.15)$$

le quantità J_α (la quadricorrente) si trasforma come le coordinate:

$$J'_\mu = a_{\mu\nu} J_\nu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (2A.1.16)$$

e i tensori del campo $F_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ si trasforma come il prodotto delle coordinate:

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (2A.1.17)$$

$$G'_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} a_{\nu\beta} G_{\alpha\beta} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (2A.1.18)$$

Finora le sole restrizioni che abbiamo posto sui sistemi di riferimento sono quelle che le loro origini spaziali devono coincidere a $t = t' = 0$ e la loro velocità relativa sia uniforme. Ora porremo una addizionale restrizione sui sistemi di riferimento, ossia che essi hanno lo stesso orientamento. Con la velocità e l'orientamento specificate, i coefficienti $a_{\mu\nu}$ possono essere univocamente determinati dalle equazioni (2A.1.2) e (2A.1.3) e la condizione $|a_{\mu\nu}| = 1$. Si può mostrare che se due sistemi di riferimento K e K' hanno lo stesso orientamento, e se la loro velocità relativa è \vec{v} , allora i coefficienti $a_{\mu\nu}$ sono dati da:

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 + (\gamma - 1) \frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_z}{v^2} & i\gamma \frac{v_x}{c} \\ (\gamma - 1) \frac{v_y v_x}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_y^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_y v_z}{v^2} & i\gamma \frac{v_y}{c} \\ (\gamma - 1) \frac{v_z v_x}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_z v_y}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_z^2}{v^2} & i\gamma \frac{v_z}{c} \\ -i\gamma \frac{v_x}{c} & -i\gamma \frac{v_y}{c} & -i\gamma \frac{v_z}{c} & \gamma \end{bmatrix} \quad (2A.1.19)$$

Utilizzando queste espressioni dei coefficienti ed esprimendo i risultati in forma tridimensionale, troviamo che la legge di trasformazione (2A.1.15) per il quadrivettore posizione x_μ , che può essere scritto come (\vec{r}, ict) , diventa:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \gamma v t + (\gamma - 1) \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (2A.1.20)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \quad (2A.1.21)$$

dove:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$$

e che la legge di trasformazione (2A.1.16) per il quadrivettore $(\vec{J}, ic\rho)$ assume la forma:

$$\vec{J}' = \vec{J} - \gamma v \rho + (\gamma - 1) \frac{\vec{J} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (2A.1.22)$$

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{1}{c^2} \vec{J} \cdot \vec{v} \right) \quad (2A.1.23)$$

Analogamente, troviamo che la legge di trasformazione (2A.1.17) comporta:

$$\vec{E}' = \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) + (1 - \gamma) \frac{\vec{E} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (2A.1.24)$$

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \right) + (1 - \gamma) \frac{\vec{B} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (2A.1.25)$$

e che la legge di trasformazione (2A.1.18) comporta:

$$\vec{D}' = \gamma \left(\vec{D} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{H} \right) + (1 - \gamma) \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (2A.1.26)$$

$$\vec{H}' = \gamma \left(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D} \right) + (1 - \gamma) \frac{\vec{H} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (2A.1.27)$$

Chiaramente le equazioni (2A.1.22) e (2A.1.23) seguono dalle equazioni (2A.1.20) e (2A.1.21) sostituendo \vec{r} con \vec{J} e ict con $ic\rho$. Anche le equazioni (2A.1.26) e (2A.1.27) seguono dalle equazioni (2A.1.24) e (2A.1.25) sostituendo \vec{E} con $c\vec{D}$ e \vec{B} con \vec{H}/c .

Cosí vediamo che quando le coordinate ed il tempo sono sottoposte alle appropriate trasformazioni di Lorentz espresse dalle equazioni (2A.1.20) e (2A.1.21), le equazioni di Maxwell riferite al sistema di riferimento K , cioé:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2A.1.28)$$

si trasformano nelle equazioni di Maxwell relative a K' , cioé:

$$\vec{\nabla}' \times \vec{H}' = \vec{J}' + \frac{\partial}{\partial t'} \vec{D}' \quad \vec{\nabla}' \times \vec{E}' = -\frac{\partial}{\partial t'} \vec{B}' \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{D}' = \rho' \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = 0 \quad (2A.1.29)$$

dove le quantita' apicate sono correlate alle quantita' non apicate dalle relazioni (2A.1.20) alle (2A.1.27).

2A.2 - Invarianza della fase e quadrivettore d'onda

Se un sistema di riferimento K é a riposo rispetto ad un mezzo omogeneo, le equazioni di Maxwell in K ammettono soluzioni della forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \quad (2A.2.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \Re \left[\vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \quad (2A.2.2)$$

essendo \vec{E}_0 un vettore costante e \vec{B}_0 , che é correlato a \vec{E}_0 da $\vec{B}_0 = (1/\omega) \vec{k} \times \vec{E}_0$, é anch'esso un vettore costante. Le espressioni (2A.2.1) e (2A.2.2) rappresentano in K i vettori campo elettrico e campo di induzione magnetica di un'onda piana omogenea di frequenza angolare ω e vettore d'onda \vec{k} .

Per vedere quale forma questa onda piana assume in un sistema di riferimento K' che si muove con velocità costante \vec{v} rispetto a K , sostituiamo inizialmente le espressioni (2A.2.1) e (2A.2.2) nella legge di trasformazione (2A.1.24) e cosí otteniamo l'espressione:

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \Re \left[\vec{E}'_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \quad (2A.2.3)$$

essendo \vec{E}'_0 un vettore costante dato da:

$$\vec{E}'_0 = \gamma \left(\vec{E}_0 + \vec{v} \times \vec{B}_0 \right) + (1 - \gamma) \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (2A.2.4)$$

Allora trasformiamo le coordinate \vec{r} e t nelle coordinate \vec{r}' e t' di K' per mezzo dell'appropriata trasformazione di Lorentz:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \gamma \vec{v} t' + (\gamma - 1) \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (2A.2.5)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \quad (2A.2.6)$$

Applicando queste trasformazioni all'espressione (2A.2.3), vediamo che il vettore campo elettrico dell'onda nel sistema di riferimento K' assume la forma:

$$\vec{E}'(\vec{r}', t') = \Re \left(\vec{E}'_0 e^{i \left(\vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t' \right)} \right) \quad (2A.2.7)$$

dove:

$$\vec{k}' = \vec{k} - \gamma \frac{\omega}{c^2} \vec{v} + (\gamma - 1) \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (2A.2.8)$$

$$\omega' = \gamma \left(\omega - \vec{v} \cdot \vec{k} \right) \quad (2A.2.9)$$

Questo mostra che l'onda piana espressa dall'equazione (2A.2.1) e riferita al sistema di riferimento K é trasformata nell'equazione (2A.2.7) quando é riferita al sistema di riferimento K'

Dal modo in cui \vec{k}' e ω' compaiono nell'espressione (2A.2.7) siamo portati alla interpretazione che \vec{k}' é il vettore d'onda dell'onda quando riferita al sistema di riferimento K' e ω' é la sua frequenza.

Di conseguenza, consideriamo le relazioni (2A.2.8) e (2A.2.9) come le leggi di trasformazione per i vettori d'onda e la frequenza.

Confrontando queste relazioni con le equazioni (2A.1.20) e (2A.1.21), vediamo che $\left(\vec{k}, i \frac{\omega}{c} \right)$ si trasformano come il quadrivettore (\vec{r}, ict) . Quindi:

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i \frac{\omega}{c} \end{bmatrix} \quad (2A.2.10)$$

é un quadrivettore. Esso é chiamato il quadrivettore d'onda.

La fase ϕ dell'onda in K é definita da:

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \quad (2A.2.11)$$

ed in termini di k_μ e x_μ essa assume la forma:

$$\phi = k_\mu x_\mu \quad (2A.2.12)$$

Poiché k_μ e x_μ sono quadrivettori, segue dall'equazione (2A.2.12) che ϕ é invariante.

Quello che abbiamo mostrato sopra é che la fase ϕ di un'onda piana uniforme in un mezzo omogeneo rimane invariante rispetto ad una appropriata trasformazione di Lorentz delle coordinate. Questa invarianza della fase, talvolta chiamata come il principio dell'invarianza della fase, si applica non solo alle onde che viaggiano nel vuoto ma anche alle onde in mezzi omogenei, anche se questi mezzi omogenei siano anisotropi e dispersivi. Tuttavia, nel caso di mezzi non omogenei le equazioni di Maxwell non ammettono soluzioni di onde piane uniformi e quindi precludono la possibilitá di definire l'invarianza della fase.

2A.3 - Equazione d'onda per mezzi omogenei isotropi in movimento

In un sistema di riferimento K' che é a riposo rispetto ad un mezzo omogeneo ed isotropo, il potenziale vettore $\vec{A}'(\vec{r}', t')$ ed il potenziale scalare $\Phi'(\vec{r}', t')$ dovuti ad una densitá di corrente $\vec{J}'(\vec{r}', t')$ e ad una densitá di carica $\rho'(\vec{r}', t')$ chiaramente deve obbedire alle equazioni d'onda non omogenee:

$$\left[\nabla'^2 - \frac{n'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] \vec{A}'(\vec{r}', t') = \mu' \vec{J}'(\vec{r}', t') \quad (2A.3.1)$$

$$\left[\nabla'^2 - \frac{n'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] \Phi'(\vec{r}', t') = -\frac{1}{\epsilon'} \rho'(\vec{r}', t') \quad (2A.3.2)$$

dove μ' e ϵ' sono la permeabilitá magnetica e la costante dielettrica del mezzo e n' é l'indice di rifrazione. Con l'aiuto dei quadrivettori J'_μ e A'_α , i cui valori sono dati da:

$$J'_\alpha = \begin{bmatrix} J'_x \\ J'_y \\ J'_z \\ ic\rho' \end{bmatrix} \quad A'_\alpha = \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \\ \frac{i}{c}\Phi' \end{bmatrix} \quad (2A.3.3)$$

queste equazioni possono essere combinate per dare:

$$(-1 - \kappa c^2 \delta_{4\alpha}) \left(\nabla'^2 - \frac{n'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) A'_\alpha = \mu' J'_\alpha \quad (2A.3.4)$$

dove $\kappa = \mu' \epsilon' - (1/c^2) = (n'^2 - 1)/c^2$ e $\delta_{4\alpha}$ e la delta di Kronecker.

Desideriamo trasformare l'equazione (2A.3.4) relativamente ad un sistema di riferimento K , rispetto al quale il mezzo si muove con velocità \vec{v} . Poiché A'_α e J'_α sono quadrivettori, essi si trasformano come segue:

$$A'_\alpha = a_{\alpha\beta} A_\beta \quad J'_\alpha = a_{\alpha\beta} J_\beta \quad (2A.3.5)$$

Qui A_β e J_β sono quadrivettori in K , e gli $a_{\alpha\beta}$ sono i coefficienti dell'appropriata trasformazione di Lorentz che trasporta K' in K . Per trasformare l'operatore differenziale che compare nella equazione (2A.3.3), scriviamo:

$$\nabla'^2 - \frac{n'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{n'^2 - 1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \quad (2A.3.6)$$

I primi due termini al secondo membro costituiscono un operatore invariante, e quindi:

$$\nabla'^2 - \frac{n'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2A.3.7)$$

Per mezzo delle trasformazioni:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \quad (2A.3.8)$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \gamma \vec{v} t' + (\gamma - 1) \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (2A.3.9)$$

Può essere mostrato che:

$$\frac{n'^2 - 1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \kappa \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 \quad (2A.3.10)$$

Così dalle relazioni (2A.3.7) e (2A.3.10) vediamo che l'operatore (2A.3.6) si trasforma come segue:

$$\nabla'^2 - \frac{n'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 \quad (2A.3.11)$$

Ora, con l'aiuto delle trasformazioni (2A.3.5) e (2A.3.11), diventa evidente che la equazione (2A.3.4) in K' si trasforma nella seguente equazione in K :

$$a_{\alpha\beta} L A_\beta = -\mu' a_{\alpha\beta} J_\beta - \kappa c^2 \delta_{4\alpha} a_{\alpha\beta} L A_\beta \quad (2A.3.12)$$

dove l'operatore L è definito da:

$$L = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \kappa \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 \quad (2A.3.13)$$

Moltiplicando l'equazione (2A.3.12) per $a_{\alpha\nu}$, sommando con α e utilizzando la relazione di ortogonalit  (2A.1.3), troviamo che:

$$LA_{\nu} = -\mu' J_{\nu} - \kappa c^2 a_{4\nu} a_{4\beta} LA_{\beta} \quad (2A.3.14)$$

Per $\alpha = 4$, l'equazione (2A.3.12) comporta:

$$a_{4\beta} LA_{\beta} = -\frac{\mu'}{1 + \kappa c^2} a_{4\beta} J_{\beta} \quad (2A.3.15)$$

Quindi possiamo trasformare l'equazione (2A.3.14) nella forma:

$$LA_{\nu} = -\mu' J_{\nu} + \frac{\mu' \kappa c^2}{1 + \kappa c^2} a_{4\nu} a_{4\beta} J_{\beta} \quad (2A.3.16)$$

Utilizzando l'equazione (2A.1.19), otteniamo:

$$a_{4\nu} a_{4\beta} J_{\beta} = -\frac{1}{c^2} U_{\nu} J_{\beta} U_{\beta} \quad (2A.3.17)$$

dove U_{ν}   il quadrivettore velocit  ($\gamma\vec{v}, i\gamma c$). Con l'aiuto di questo risultato, l'equazione (2A.3.16) diventa:

$$LA_{\nu} = -\mu' J_{\nu} - \frac{\mu' \kappa}{n'^2} U_{\nu} J_{\beta} U_{\beta} \quad (2A.3.18)$$

Questa   l'equazione nella quale l'equazione (2A.3.4)   trasformata quando il sistema di riferimento   cambiato da K a K' .

In forma tridimensionale, l'equazione (2A.3.18) comporta le seguenti equazioni per il potenziale vettore $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ed il potenziale scalare $\Phi(\vec{r}, t)$ nel sistema di riferimento K :

$$\left[\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \kappa \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 \right] \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu' \vec{J} - \frac{\mu' \kappa}{n'^2} \gamma \vec{v} \left(\gamma \vec{J} \cdot \vec{v} - \gamma c^2 \rho \right) \quad (2A.3.19)$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \kappa \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 \right] \Phi(\vec{r}, t) = -\mu' c^2 \rho - \frac{\mu' \kappa}{n'^2} \gamma c^2 \left(\gamma \vec{J} \cdot \vec{v} - \gamma c^2 \rho \right) \quad (2A.3.20)$$

dove, come prima, $\kappa = (c^2 \epsilon' \mu' - 1)/c^2 = (n'^2 - 1)/c^2$. Con una conoscenza di queste equazioni, noi possiamo trovare i potenziali scalari e vettori di una sorgente circondata da un mezzo omogeneo ed isotropo e che si muove alla velocit  $vecv$ rispetto alla sorgente. Queste quantit  ci permettono di calcolare il vettore campo elettrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - (\partial/\partial t)\vec{A}$ ed il vettore campo magnetico $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ della sorgente in presenza di un vento. La discussione fatta   basata sulla trasformazione dell'equazione d'onda non omogenea dal sistema K' al sistema K . Attualmente

In effetti gli stessi risultati possono essere ottenuti utilizzando la forma tensoriale delle equazioni di Maxwell come punto di partenza. Per mostrare questo, ricordiamo che le equazioni di Maxwell possono essere scritti come segue:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_{\beta}} = 0 \quad (2A.3.21)$$

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = J_{\alpha} \quad (2A.3.22)$$

Queste equazioni tensoriali valgono in tutti i sistemi di riferimento di Lorentz, ed in particolare essi valgono in K' ed in K . In K' le relazioni costitutive sono:

$$\vec{D}' = \epsilon' \vec{E}' \quad \text{e} \quad \vec{H}' = \frac{1}{\mu'} \vec{B}' \quad (2A.3.23)$$

Esprimendo \vec{D}' , \vec{E}' , \vec{H}' , \vec{B}' in termini di \vec{D} , \vec{E} , \vec{H} , \vec{B} del sistema di riferimento K , troviamo con l'aiuto delle equazioni (2A.1.24), (2A.1.23), (2A.1.26), (2A.1.27) che le relazioni costitutive in K sono:

$$\vec{D} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{H} = \epsilon' \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (2A.3.24)$$

$$\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D} = \frac{1}{\mu'} \left(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \right) \quad (2A.3.25)$$

Scritte in forma tensoriale, queste relazioni costitutive diventano:

$$G_{\alpha\beta} U_\beta = c^2 \epsilon' F_{\alpha\nu} U_\nu \quad (2A.5.26)$$

$$G_{\alpha\beta} U_\nu + G_{\beta\nu} U_\alpha + G_{\nu\alpha} U_\beta = \frac{1}{\mu'} (F_{\alpha\beta} U_\nu + F_{\beta\nu} U_\alpha + F_{\nu\alpha} U_\beta) \quad (2A.5.27)$$

dove, come prima, U_ν denota il quadrivettore velocità $(\gamma\vec{v}, i\gamma c)$.

Per esprimere il tensore del campo $G_{\alpha\beta}$ esplicitamente in termini del tensore del campo $F_{\alpha\beta}$ moltiplichiamo l'equazione (2A.3.27) per U_ν . Osservando che $U_\nu U_\nu = -c^2$, troviamo che:

$$-c^2 G_{\alpha\beta} + U_\alpha G_{\beta\nu} U_\nu + U_\beta G_{\nu\alpha} U_\nu = \frac{1}{\mu'} [-c^2 F_{\alpha\beta} + U_\alpha F_{\beta\nu} U_\nu + U_\beta F_{\nu\alpha} U_\nu] \quad (2A.3.28)$$

In virtù delle relazioni costitutive (2A.3.26), si ha:

$$G_{\beta\nu} U_\nu = c^2 \epsilon' F_{\beta\nu} U_\nu \quad G_{\nu\alpha} U_\nu = -c^2 \epsilon' F_{\alpha\nu} U_\nu \quad (2A.3.29)$$

Quindi, segue dalla (2A.3.28) che:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu'} F_{\alpha\beta} + \frac{\kappa}{\mu^2} (U_\alpha F_{\beta\nu} U_\nu - U_\beta F_{\alpha\nu} U_\nu) \quad (2A.3.30)$$

Sostituendo l'espressione (2A.3.30) nelle equazioni di Maxwell (2A.3.22), troviamo che:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \kappa U_\alpha U_\nu \frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\beta} - \kappa U_\nu U_\beta \frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x_\beta} = \mu' J_\alpha \quad (2A.3.31)$$

Tuttavia, dalle equazioni (2A.3.22) e (2A.3.26) risulta:

$$\kappa U_\alpha U_\nu \frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\beta} = -\frac{\kappa}{c^2 \epsilon'} U_\alpha J_\beta U_\beta \quad (2A.3.32)$$

Quindi, l'equazione (2A.3.31) diventa:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \kappa U_\nu U_\beta \frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x_\beta} = \mu' J_\alpha + \frac{\kappa}{c^2 \epsilon'} U_\alpha J_\beta U_\beta \quad (2A.3.33)$$

Ora, abbiamo due equazioni per il tensore del campo $F_{\alpha\beta}$, uno essendo le equazioni di Maxwell (2A.3.21) e l'altro essendo l'equazione (2A.3.33). Se noi scriviamo il tensore del campo $F_{\alpha\beta}$ in termini del quadripotenziale $A_\nu = \left(\vec{A}, i \frac{\Phi}{c} \right)$, cioè, se noi scriviamo:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (2A.3.34)$$

allora l'equazione (2A.3.22) é soddisfatta. Sostituendo l'espressione (2A.3.34) nella equazione (2A.3.33), otteniamo la seguente equazione per il quadripotenziale:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} A_\alpha - \kappa U_\alpha U_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_\alpha \right) = \mu' J_\alpha + \frac{\kappa}{c^2 \epsilon'} U_\alpha J_\beta U_\beta \quad (2A.3.35)$$

Raggruppando, otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\beta} - \kappa U_\nu U_\beta \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} - \kappa U_\nu U_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) A_\alpha = \mu' J_\alpha + \frac{\kappa}{c^2 \epsilon'} U_\alpha J_\beta U_\beta \quad (2A.3.36)$$

Poiché il quadripotenziale non é completamente determinato dall'equazione (2A.3.34), siamo liberi di imporre su esso le seguenti condizioni aggiuntive:

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\beta} - \kappa U_\nu U_\beta \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta} = 0 \quad (2A.3.37)$$

che é chiamata la 'condizione generalizzata di Lorentz' per il quadripotenziale.

Quando questa condizione é soddisfatta, l'equazione (2A.3.35) si riduce a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} - \kappa U_\nu U_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) A_\alpha = -\mu' J_\alpha - \frac{\kappa}{c^2 \epsilon'} U_\alpha J_\beta U_\beta \quad (2A.3.38)$$

Questa equazione é identica all'equazione (2A.3.18) e, in forma tridimensionale, é equivalente alle equazioni (2A.3.19) e (2A.3.20).

Per mostrare che l'equazione (A2.3.38) possa essere usata per trovare l'indice di rifrazione di un mezzo in movimento, assumiamo che $\vec{A}(\vec{r}, t)$ abbia la forma di un'onda piana:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \Re \left(\vec{A}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \right) \quad (2A.3.39)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (2A.3.19), con il secondo membro posto eguale a zero, troviamo:

$$-c^2 k^2 + \omega^2 + \gamma^2 (n'^2 - 1) (\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega)^2 = 0 \quad (2A.3.40)$$

Risolviendo questa equazione per $n = ck/\omega$, si arriva alla classica formula per l'indice di rifrazione.

Fine del Cap.2