

Cap. 19

**Soluzione di alcuni problemi di elettrostatica e di magnetostatica**

**19.1 - Sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme**

Si consideri una sfera conduttrice di raggio  $a$  il cui centro é collocato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio. In particolare si fissi il riferimento in modo tale che la direzione dell'asse  $\vec{z}$  coincida con quella del campo elettrico uniforme  $\vec{E}_0$ . Utilizzando un sistema di coordinate sferiche e scegliendo l'asse polare coincidente con l'asse  $\vec{z}$ , un punto  $P$  nello spazio puó essere individuato dalla terna  $(r, \theta, \phi)$ .

Poiché il sistema é a simmetria azimutale, la funzione potenziale non dipende da  $\phi$ ; scegliamo, allora,  $\phi = 0$  in modo che il piano di proiezione delle linee di forza risulti il piano  $(z, x)$ .

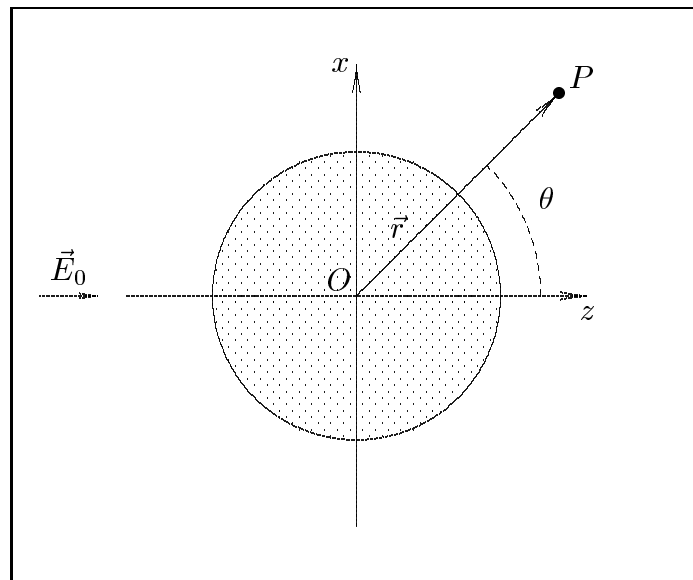


fig.19.1-1

Sia  $\Phi = \Phi(r, \theta)$  la funzione potenziale in coordinate sferiche che, data l'assenza di cariche elettriche, soddisfa all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{19.1.1}$$

che in coordinate sferiche assume la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0 \tag{19.1.2}$$

Cerchiamo una soluzione particolare nella classe delle funzioni:

$$\Phi(r, \theta) = Z(r)P(\theta) \quad (19.1.3)$$

Sostituendo si ha:

$$\frac{1}{r^2}P(\theta)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ(r)}{dr}\right) + \frac{Z(r)}{r^2\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = 0 \quad (19.1.4)$$

Moltiplicando per  $r^2$  e dividendo per  $Z(r)P(\theta)$  si ottiene:

$$\frac{1}{Z(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ(r)}{dr}\right) = -\frac{1}{P(\theta)\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) \quad (19.1.5)$$

A tal punto é evidente che il primo membro di tale ultima espressione é funzione solo di  $r$  ed il secondo solo di  $\theta$ ; si ha, cioé una espressione del tipo:

$$F(r) = G(\theta) \quad (19.1.6)$$

che é soddisfatta se e solo se la  $F(r)$  e la  $G(\theta)$  sono entrambe eguali ad una costante.

Indicando con  $k$  tale costante si ottiene il seguente sistema di equazioni equivalente alla equazione data:

$$-\frac{1}{P(\theta)\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = k \quad (19.1.7)$$

$$\frac{1}{Z(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ(r)}{dr}\right) = k \quad (19.1.8)$$

La (19.1.7) si puó scrivere:

$$\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) + kP(\theta) = 0 \quad (19.1.9)$$

Questa é la cosiddetta equazione di Legendre. Si dimostra che le soluzioni fisicamente accettabili per  $P(\theta)$  (che non presentano, cioé, divergenze) si hanno per valori discreti di  $k$  ed in particolare per  $k = n(n + 1)$ , con  $n$  intero, positivo o nullo.

Tali soluzioni  $P_n(\theta)$  che si ottengono al variare di  $n$  sono detti **polinomi di Legendre**. Di seguito sono espressi i primi quattro polinomi:

<b>n</b>	<b><math>P_n(\theta)</math></b>
0	1
1	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

Dopo aver considerato la  $P(\theta)$ , che é la soluzione angolare, si prenda in considerazione la parte radiale  $Z(r)$ , cioè l'equazione (19.1.8):

$$\frac{1}{Z(r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dZ(r)}{dr} \right) = k$$

Moltiplicando per  $Z(r)$  e sostituendo a  $k$  i valori  $n(n+1)$ , si ha:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dZ(r)}{dr} \right) = n(n+1)Z(r) \quad (19.1.10)$$

Tale equazione differenziale ammette due classi indipendenti di soluzioni fisicamente accettabili:

$$Z_n(r) = r^n \quad e \quad Z_n(r) = r^{-(n+1)} \quad (19.1.11)$$

Tutto questo comporta per la funzione potenziale  $\Phi(r, \theta)$  le seguenti due classi di soluzioni indipendenti:

$$\Phi_n = r^n P_n(\theta) \quad e \quad \Phi_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta) \quad per \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (19.1.12)$$

che sono note come **armoniche zonali**.

La soluzione generale dell'equazione di Laplace é, data la sua linearitá, la combinazione lineare di tali due classi di soluzioni:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.1.13)$$

dove  $A$  e  $C$  sono costanti arbitrarie.

Per risolvere completamente il problema bisogna imporre che la soluzione generale dell'equazione di Laplace verifichi le condizioni al contorno sulla superficie della sfera e a distanza infinita da essa. Bisogna, cioè, calcolare i valori da attribuire alle costanti in modo che sulla superficie sferica sia verificata la condizione di **equipotenzialitá** e a grandi distanze dalla sfera quella che il campo elettrico sia eguale a quello imperturbato cioè al campo costante esistente prima dell'introduzione della sfera.

Quanto sopra si esprime ponendo:

$$\left[ \vec{E}(r, \theta) \right]_{r \rightarrow \infty} = E_0 \hat{z} \quad (19.1.14)$$

$$[\Phi(r, \theta)]_{r=a} = U_0 \quad (19.1.15)$$

Poiché la soluzione del problema é espressa in termini di funzione potenziale, bisogna tradurre la condizione (19.1.14) in termini di potenziale. Tenendo conto che per un campo elettrico uniforme  $E_0 \hat{z}$  il potenziale é del tipo:  $\Phi(x, y, z) = -E_0 z + cost$ , e che in coordinate sferiche polari risulta  $z = r \cos \theta$ , la (19.1.14) diventa:

$$[\Phi(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta + cost \quad (19.1.16)$$

Per imporre la condizione (19.1.16) si osservi che per  $r \rightarrow \infty$ , la funzione  $\Phi(r, \theta)$  diventa:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.1.17)$$

Ne segue che la (19.1.16) é soddisfatta soltanto se:

$$A_1 = cost, \quad A_2 = -E_0, \quad A_3 = A_4 = \dots = A_n = 0 \quad (19.1.18)$$

Pertanto, l'imposizione della sola condizione (19.1.16) conduce alla seguente espressione per  $\Phi(r, \theta)$ :

$$\Phi(r, \theta) = cost + C_1 r^{-1} + (C_2 r^{-2} - E_0 r) \cos \theta + \frac{3}{2} C_3 r^{-3} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} C_3 r^{-3} + \dots \quad (19.1.19)$$

Per imporre la condizione (19.1.15) basta imporre che la funzione  $\Phi(r, \theta)$  per  $r = a$  sia costante qualunque sia  $\theta$ .

Deve essere, cioè:

$$\Phi(a, \theta) = cost + C_1 a^{-1} + (C_2 a^{-2} - E_0 a) \cos \theta + \frac{3}{2} C_3 a^{-3} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} C_3 a^{-3} + \dots = U_0 \quad (19.1.20)$$

Per questo, occorre e basta che:

$$cost + C_1 a^{-1} = U_0, \quad C_2 = E_0 a^3 \quad e \quad C_3 = C_4 = \dots = C_n = 0 \quad (19.1.21)$$

Ne segue, quindi, che la soluzione generale dell'equazione di Laplace soddisfacente alle condizioni al contorno é:

$$\Phi(r, \theta) = U_0 - C_1 a^{-1} + C_1 r^{-1} - E_0 r \cos \theta + E_0 a^3 r^{-2} \cos \theta \quad (19.1.22)$$

Resta da determinare la costante  $C_1$  per la quale vale il seguente ragionamento fisico.

Il termine  $C_1 r^{-1}$  rappresenta, ovviamente, un potenziale ed, in particolare per  $r = a$ , quello sulla superficie sferica, di raggio  $a$ , sulla quale é posta la carica  $C_1 4\pi\epsilon_0$ .

**Pertanto, se la sfera é inizialmente scarica la costante  $C_1$  é zero;** nel caso in cui si vuole assumere la sfera inizialmente carica con carica  $Q_0$ , si deve avere:  $C_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}$ .

Supposto  $C_1 = 0$  il campo elettrico avrà le componenti:

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = E_0 \left( 1 + 2\frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (19.1.23)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -E_0 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (19.1.24)$$

Da esse si può facilmente verificare che per  $r = a$ , la componente tangenziale  $E_\theta$  si annulla ed il campo é tutto radiale.

É utile esprimere le componenti del campo elettrico in coordinate cartesiane; per questo, scriviamo l'espressione della funzione potenziale in coordinate cartesiane ponendo  $z = r \cos \theta$  e  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ . Si ha:

$$\Phi(x, z) = U_0 - E_0 z + E_0 a^3 \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad (19.1.25)$$

da cui:

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = E_0 \left[ 1 + \frac{a^3 (2z^2 - x^2)}{(x^2 + z^2)^{5/2}} \right] \quad (19.1.26)$$

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3a^3 E_0 \frac{xz}{(x^2 + z^2)^{5/2}} \quad (19.1.27)$$

### Grafico delle linee di forza

É molto interessante tracciare le linee di forza del campo elettrostatico in presenza della sfera conduttrice.

Poiché il problema coinvolge una metodologia generale utile anche per altri analoghi problemi, illustriamo oltre al metodo analitico, che ovviamente non é sempre possibile applicare per la difficoltà di risolvere le forme differenziali, il metodo numerico che é sempre di facile applicazione.

Come sappiamo l'equazione delle linee di forza del campo elettrico é:

$$\vec{E} \times d\vec{s} = 0 \quad (19.1.28)$$

che in coordinate cartesiane, nel piano  $y = 0$ , comporta:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{E_x}{E_z} = \frac{3a^3 xz}{\left[ (x^2 + z^2)^{5/2} + a^3 (2z^2 - x^2) \right]} \quad (19.1.29)$$

L'equazione (19.1.29) non é di agevole integrazione, pertanto é conveniente esprimere l'equazione (19.1.28) nel piano  $(x, z)$  in coordinate sferiche polari, tenendo presente che, in tale piano risulta:

$$\vec{E} = E_r \hat{e}_r + E_\theta \hat{e}_\theta \quad (19.1.30)$$

$$d\vec{s} = (dr) \hat{e}_r + (rd\theta) \hat{e}_\theta \quad (19.1.31)$$

Quindi:

$$\vec{E} \times d\vec{s} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ E_r & E_\theta & 0 \\ dr & rd\theta & 0 \end{vmatrix} = (rE_r d\theta - E_\theta dr) \hat{e}_\phi = 0 \quad (19.1.32)$$

ossia:

$$rE_r d\theta - E_\theta dr = 0 \quad (19.1.33)$$

Sostituendo nella equazione (19.1.33) le espressioni (19.1.23) e (19.1.24) delle componenti del campo elettrico, si ha:

$$rE_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) \cos \theta d\theta = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin \theta dr \quad (19.1.34)$$

ossia:

$$\frac{dr}{r} \frac{1 - \frac{a^3}{r^3}}{1 + \frac{2a^3}{r^3}} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad (19.1.35)$$

La forma differenziale (19.1.35) é di facile integrazione. Integrando, si ha:

$$-\int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \int \frac{r^3 - a^3}{r^3 + 2a^3} \frac{dr}{r} + C \quad (19.1.36)$$

essendo C una costante arbitraria.

Dividendo numeratore e denominatore della funzione integranda del secondo membro per la quantità  $(r^3 + 2a^3)^2$ , la (19.1.36) diventa:

$$-\ln |\sin \theta| = \int \frac{\frac{r^3 - a^3}{(r^3 + 2a^3)^2}}{\frac{r}{r^3 + 2a^3}} dr + C$$

Moltiplicando e dividendo per -2 la funzione integranda del secondo membro, si ha:

$$-\ln |\sin \theta| = -\frac{1}{2} \int \frac{\frac{-2r^3 + 2a^3}{(r^3 + 2a^3)^2}}{\frac{r}{r^3 + 2a^3}} dr + C$$

Poiché risulta:

$$\frac{-2r^3 + 2a^3}{(r^3 + 2a^3)^2} = \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{r^3 + 2a^3} \right)$$

si ha, integrando:

$$-\ln |\sin \theta| = -\frac{1}{2} \ln \frac{r}{r^3 + 2a^3} + C$$

ossia:

$$\ln |\sin \theta| = \ln \sqrt{\frac{r}{r^3 + 2a^3}} + \text{costante}$$

Posto  $\text{costante} = \ln \xi$  ( $\xi > 0$ ), si ha:

$$\boxed{|\sin \theta| = \xi \sqrt{\frac{r}{r^3 + 2a^3}}} \quad (19.1.37)$$

La variabile  $r$  indica la distanza fra un generico punto della linea di forza ed il centro della sfera che é l'origine delle coordinate polari. Ovviamente, poiché l'equazione (19.1.37) descrive l'andamento delle linee di forza del campo elettrico esterno,  $r$  può variare da  $a$  all'infinito.

D'altra parte, poiché  $|\sin \theta| \leq 1$ , deve sempre risultare:

$$\xi \sqrt{\frac{r}{r^3 + 2a^3}} \leq 1 \tag{19.1.38}$$

La funzione  $\sqrt{\frac{r}{r^3 + 2a^3}}$ , per  $r \geq a$ , é decrescente all'aumentare di  $r$  ed ha il valore massimo per  $r = a$  che vale  $\sqrt{\frac{1}{3a^2}}$ .

Ne segue che per valori di  $\xi > \sqrt{3a^2}$ , la (19.1.38) é soddisfatta solo per valori di  $r > a$ , cioè le linee di forza non toccheranno mai la sfera.

Viceversa, per valori di  $\xi \leq \sqrt{3a^2}$ , la (19.1.38) é soddisfatta anche per  $r = a$  e quindi le linee di forza toccheranno la sfera.

Il valore  $\xi_s = \sqrt{3a^2}$  rappresenta, quindi, il valore di  $\xi$  al di sopra del quale le linee di forza si distaccheranno completamente dalla sfera.

Fissato  $\xi$ , per ogni valore di  $r$  esistono quattro valori di  $\theta$  che soddisfano alla (19.1.37). Infatti, per un particolare valore  $r^*$  esistono le soluzioni  $\theta^*$  e  $\pi - \theta^*$  competenti alla soluzione  $\sin \theta > 0$  e  $-\theta^*$  e  $\pi + \theta^*$  competenti alla soluzione  $\sin \theta < 0$ .

In corrispondenza di tali valori, le coordinate cartesiane dei generici punti delle linee di forza sono date dalle relazioni:

$$z = r \cos \theta \quad e \quad x = r \sin \theta \tag{19.1.39}$$

e giacciono nel primo quadrante ( $z > 0$  e  $x > 0$ ) o nel secondo quadrante ( $z < 0$  e  $x > 0$ ) per  $\sin \theta > 0$ , nel terzo quadrante ( $z < 0$  e  $x < 0$ ) o nel quarto quadrante ( $z > 0$  e  $x < 0$ ) per  $\sin \theta < 0$ .

Data l'evidente simmetria di tali linee di forza, per il grafico di esse é sufficiente valutare le coordinate  $z$  e  $x$  limitatamente al primo quadrante. Riportiamo due tabelle con i valori di  $z$  e  $x$  (nel primo quadrante) per due valori del parametro  $\xi$ .

$\xi = 0.5, a = 1$

$r$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$z$	$x$
1.0	0.28868	0.95743	0.95743	0.28868
1.1	0.28733	0.95783	1.0536	0.31606
1.2	0.28368	0.95892	1.1507	0.34041
1.3	0.27827	0.9605	1.2487	0.36176
1.4	0.27162	0.9624	1.3474	0.38027

1.5	0.26414	0.96449	1.4467	0.3962
1.6	0.25616	0.96663	1.5466	0.40985
1.7	0.24795	0.96877	1.6469	0.42151
1.8	0.2397	0.97085	1.7475	0.43146
1.9	0.23156	0.97282	1.8484	0.43995
2.0	0.22361	0.97468	1.9494	0.44721
2.1	0.21592	0.97641	2.0505	0.45343
2.2	0.20853	0.97802	2.1516	0.45877
2.3	0.20146	0.9795	2.2528	0.46336
2.4	0.19472	0.98086	2.3541	0.46734
2.5	0.18831	0.98211	2.4553	0.47078
2.6	0.18222	0.98326	2.5565	0.47377
2.7	0.17644	0.98431	2.6576	0.47638
2.8	0.17095	0.98528	2.7588	0.47867
2.9	0.16575	0.98617	2.8599	0.48068
3.0	0.16082	0.98698	2.961	0.48245
3.1	0.15613	0.98774	3.062	0.48402

$\xi = 1.5, a = 1$
--------------------

$r$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$z$	$x$
1.0	0.86603	0.5	0.5	0.86603
1.1	0.86199	0.50693	0.55763	0.94818
1.2	0.85103	0.52512	0.63014	1.0212
1.3	0.83482	0.55052	0.71568	1.0853
1.4	0.81486	0.57966	0.81152	1.1408
1.5	0.79241	0.60999	0.91499	1.1886
1.6	0.76847	0.63988	1.0238	1.2296
1.7	0.74384	0.66835	1.1362	1.2645
1.8	0.7191	0.6949	1.2508	1.2944
1.9	0.69467	0.71933	1.3667	1.3199
2.0	0.67082	0.74162	1.4832	1.3416
2.1	0.64776	0.76185	1.5999	1.3603
2.2	0.62599	0.78015	1.7163	1.3763
2.3	0.60439	0.79669	1.8324	1.3901
2.4	0.58417	0.81163	1.9479	1.402
2.5	0.56493	0.82514	2.0628	1.4123
2.6	0.54666	0.83736	2.1771	1.4213
2.7	0.52931	0.84843	2.2908	1.4291
2.8	0.51286	0.85847	2.4037	1.436
2.9	0.49725	0.8676	2.5161	1.442
3.0	0.48245	0.87592	2.6278	1.4474



3.1	0.4684	0.88351	2.7389	1.4521
3.2	0.45507	0.89046	2.8495	1.4562
3.3	0.4424	0.89682	2.9595	1.4599
3.4	0.43036	0.90266	3.069	1.4632

Il significato del parametro  $\xi$  può essere dedotto dalla relazione  $x = r \sin \theta$ ; infatti, per  $\sin \theta > 0$  (per esempio), essa si può scrivere, dopo aver sostituito la (19.1.37), come  $x = \xi \sqrt{\frac{r^3}{r^3 + 2a^3}}$ . Poiché  $\lim_{r \rightarrow \infty} x = \xi$ , ne segue che il parametro  $\xi$  rappresenta l'ordinata della linea di forza del campo elettrico iniziale (imperturbato).

Le linee di forza del campo elettrico sono rappresentate in figura:

### Linee di forza del campo elettrico

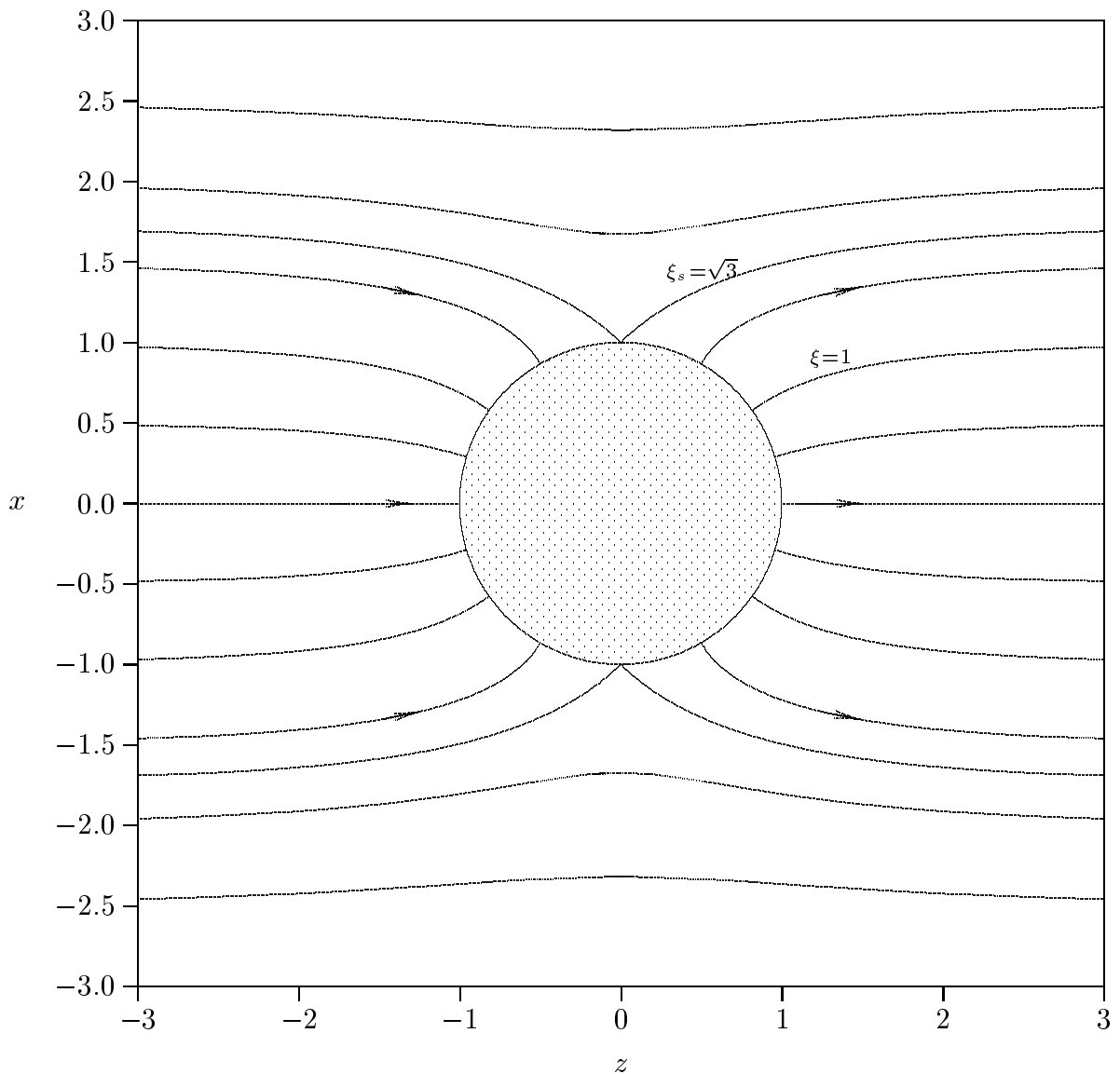


fig.19.1-2

È importante osservare l'effettiva ortogonalità delle linee di forza sulla superficie della sfera. La linea competente al parametro  $\xi_s = \sqrt{3}$ , come si può verificare dalla (19.1.29), per  $z = 0$  e  $x = a$  ha tangente verticale, infatti  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{dx}{dz} = +\infty$ . In tale punto il campo elettrico è nullo.

**Metodo per la soluzione numerica dell'equazione differenziale (19.1.29).**

Il metodo che si descrive è usato per risolvere un'ampia varietà di equazioni differenziali del primo ordine nella forma  $x' = F(z, x)$  (per uniformarci alla simbologia utilizzata per il nostro problema) con valori iniziali  $(z_0, x_0)$ . Esso che prende il nome di metodo di **Runge-Kutta** è basato sullo sviluppo in serie di Taylor di una qualsiasi funzione derivabile  $f(z)$ , a partire da un punto iniziale  $z_0$  arbitrariamente prefissato:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \dots \dots \dots \quad (19.1.40)$$

Nel caso in esame la  $x$  viene considerata funzione della variabile  $z$ , e si conosce di essa la derivata prima, data dalla (19.1.29). Si può allora pensare di sviluppare la funzione  $x(z)$  in serie di Taylor fino alla derivata del primo ordine a partire da un prefissato punto iniziale di coordinate  $(z_0, x_0)$ . Fisicamente fissare un punto sul piano  $z, x$  vuol dire fissare la linea di forza passante per quel punto.

Ci proponiamo di trovare le coordinate di una sequenza di punti successivi a quello iniziale che appartengono alla linea di forza prefissata.

Per far questo si fissi un incremento  $h$  della variabile indipendente  $z$ ; il primo punto, appartenente alla stessa linea di forza, successivo al punto iniziale, ha le seguenti coordinate:

$$z_1 = z_0 + h, \quad x_1 = x(z_0 + h) = x_0 + h \left( \frac{dx}{dz} \right)_{z=z_0} \quad (19.1.41)$$

Posto  $\frac{dx}{dz} = F(z, x)$ , essendo  $F(z, x)$  il secondo membro della (19.1.29), si ha:

$$z_1 = z_0 + h, \quad x_1 = x_0 + hF(z_0, x_0) \quad (19.1.42)$$

Assumendo, ora, il punto  $(z_1, x_1)$  come nuovo punto iniziale si ottiene un secondo punto appartenente alla stessa linea di forza, le cui coordinate sono:

$$z_2 = z_1 + h, \quad x_2 = x_1 + hF(z_1, x_1) \quad (19.1.43)$$

Ripetendo la stessa procedura, si ottengono le coordinate di tutti i punti successivi al punto  $(z_2, x_2)$  dalle espressioni ricorrenti:

$$z_i = z_0 + ih, \quad x_i = x_{i-1} + hF(z_{i-1}, x_{i-1}) \quad i = 1, 2, 3 \dots \dots \quad (19.1.44)$$

Si è così ottenuta una sequenza di punti appartenenti alla linea di forza passante per il punto iniziale le cui coordinate possono essere espresse dalle relazioni ricorrenti. Scegliendo l'incremento  $h$  sufficientemente piccolo l'errore diventa irrilevante.

### Calcolo della densità di carica indotta sulla superficie della sfera

La densità di carica superficiale indotta sulla superficie della sfera si può ricavare dal teorema di Coulomb:

$$E_{sup} = \frac{\sigma_{sup}}{\epsilon_0} \quad (19.1.45)$$

che vale sulla superficie di un conduttore.

Nel nostro caso:

$$\sigma_{ind} = \epsilon_0 [E_r]_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (19.1.46)$$

dalla quale si deduce che la densità di carica  $\sigma$  è positiva sulla superficie rivolta verso l'asse  $z$  positivo e negativa sull'altra, annullandosi nel piano diametrale  $xy$ . Si osservi che la carica totale indotta sulla superficie della sfera è nulla, in accordo con il principio di conservazione della carica elettrica, infatti:

$$\int_S \sigma_{ind} dS = \int_0^\pi 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = 0 \quad (19.1.47)$$

### Potenziale dentro la sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme

Scriviamo la soluzione generale (19.1.13) della equazione di Laplace:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

Poiché per  $r \rightarrow 0$  il potenziale divergerebbe, le costanti  $C$  devono necessariamente annullarsi.

Quindi, dopo questa condizione:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{3}{2} A_3 r^2 \cos \theta - \frac{1}{2} A_3 r^2 + \dots \quad (19.1.48)$$

Poiché per  $r = a$ , qualunque sia  $\theta$ , deve essere  $\Phi(a, \theta) = U_0$ , si ha:

$$A_1 = U_0, \quad A_2 = A_3 = \dots = 0 \quad \text{quindi:} \quad \Phi(\mathbf{r}, \theta) = U_0 \quad \text{da cui segue:} \quad \vec{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (19.1.49)$$

La (19.1.49) esprime, ancora una volta, che all'interno di una sfera conduttrice (cava o no) il campo elettrico è nullo.

### 19.2 - Campi e densità di carica entro angoli bidimensionali e lungo spigoli

Consideriamo due semipiani conduttori che si intersecano sotto un angolo  $\beta$ . I due semipiani sono mantenuti a potenziale costante  $V$  che in seguito supporremo eguale a zero.

Lontano dall'origine (e non indicati in figura) vi sono altri conduttori ed eventualmente configurazioni di cariche che determinano in modo univoco il problema del potenziale.

Siccome quello che ci interessa è il comportamento funzionale dei campi vicino alla origine, e non il loro valore assoluto, lasceremo il più possibile impregiudicato il comportamento "lontano".

Poiché supponiamo i piani infinitamente estesi lungo la direzione dell'asse  $z$ , il problema diventa bidimensionale e suggerisce l'impiego di coordinate polari.

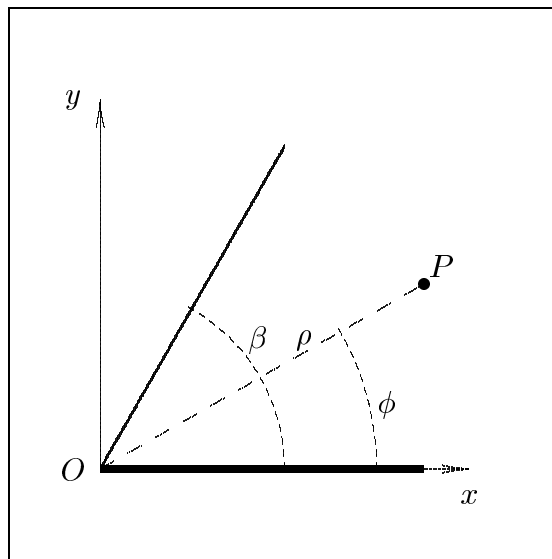


fig.19.2-1

Consideriamo la zona all'interno dello spigolo (perché sono ben definite le condizioni al contorno) e siano  $\rho$  e  $\phi$  le coordinate polari del punto  $P$ .

L'equazione di Laplace in coordinate polari è:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (19.2.1)$$

Risolviamo, ponendo:

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi) \quad (19.2.2)$$

Sostituendo si ha:

$$\Psi(\phi) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} R(\rho) \frac{d^2 \Psi(\phi)}{d\phi^2} = 0 \quad (19.2.3)$$

Dividendo per  $R(\rho)\Psi(\phi)$  e moltiplicando per  $\rho^2$  si ha:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Psi(\phi)} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} = 0 \quad (19.2.4)$$

che si può scrivere:  $F(\rho) = -G(\phi)$

Siccome i due membri sono funzioni, il primo solo di  $\rho$  e il secondo solo di  $\phi$ , essi devono essere entrambi costanti:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = \nu^2 \quad (19.2.5)$$

$$\frac{1}{\Psi(\phi)} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} = -\nu^2 \quad (19.2.6)$$

Consideriamo  $\nu^2 \neq 0$ . La seconda equazione ha la soluzione:

$$\Psi_\nu(\phi) = A_\nu \cos \nu \phi + B_\nu \sin \nu \phi \quad (19.2.7)$$

Nell'eventualità che  $\nu$  sia eguale a zero si ha:

$$\Psi_0(\phi) = A_0 + B_0 \phi \quad (19.2.8)$$

Cerchiamo, ora, la soluzione dell'equazione (19.2.5):

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = \nu^2$$

che si può scrivere:

$$\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \nu^2 R(\rho) = 0 \quad (19.2.9)$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti che rientra nella classe delle **equazioni differenziali di Eulero**.

Per risolvere la (19.2.9) effettuiamo un cambiamento della variabile indipendente: poniamo  $\rho = e^t$ ; si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{dR}{d\rho} \\ \frac{d^2 R}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \left[ \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) \right] \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{dR}{d\rho} + \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} \end{aligned} \quad (19.2.10)$$

essendo  $\frac{d\rho}{dt} = \rho$

L'equazione, quindi, diventa:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - \nu^2 R = 0 \quad (19.2.11)$$

che é un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, che ha per soluzioni:

$$R_1 = e^{\nu t} \quad R_2 = e^{-\nu t} \quad (19.2.12)$$

essendo  $t = \ln \rho$ , che sostituito nelle (19.2.12) comporta:

$$R_1(\rho) = \rho^\nu \quad e \quad R_2(\rho) = \rho^{-\nu} \quad (19.2.13)$$

L'integrale generale della (19.2.9) é allora:

$$R_\nu(\rho) = a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu} \quad per \quad \nu \neq 0 \quad (19.2.14)$$

Per  $\nu = 0$ , l'equazione diventa:

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = 0 \quad (19.2.15)$$

che comporta:

$$\frac{dR(\rho)}{d\rho} = \frac{const}{\rho} \quad (19.2.16)$$

la cui soluzione é:

$$R_0(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho \quad (19.2.17)$$

Poiché l'origine  $\rho = 0$  é inclusa nel sistema che stiamo considerando, dobbiamo porre, per evitare divergenze  $b_\nu = b_0 = 0$ .

In definitiva le soluzioni accettabili sono, quindi:

$$\Psi_\nu(\phi) = A_\nu \cos \nu \phi + B_\nu \sin \nu \phi$$

$$\Psi_0(\phi) = A_0 + B_0 \phi$$

$$R_\nu(\rho) = a_\nu \rho^\nu$$

$$R_0(\rho) = a_0$$

cioé il potenziale é descritto dalle:

$$\Phi_\nu(\rho, \phi) = (A_\nu \cos \nu \phi + B_\nu \sin \nu \phi) a_\nu \rho^\nu \quad per \quad \nu \neq 0 \quad (19.2.18)$$

$$\Phi_0(\rho, \phi) = A_0 a_0 + a_0 B_0 \phi \quad per \quad \nu = 0 \quad (19.2.19)$$

Imponiamo, ora, le condizioni al contorno:

$$\Phi(\rho, 0) = \Phi(\rho, \beta) = 0 \quad (19.2.20)$$

cioé il potenziale deve essere nullo sulle pareti dello spigolo. Pertanto, deve essere:

$$\Phi_\nu(\rho, 0) = A_\nu a_\nu \rho^\nu = 0 \quad (19.2.21)$$

per cui si deve imporre  $A_\nu = 0$  in quanto l'annullamento di  $a_\nu$  porterebbe alla soluzione banale.

$$\Phi_0(\rho, 0) = A_0 a_0 = 0 \quad (19.2.22)$$

il che comporta, come sopra,  $A_0 = 0$ .

$$\Phi_0(\rho, \beta) = a_0 B_0 \beta = 0 \quad (19.2.23)$$

che comporta  $B_0 = 0$ .

$$\Phi_\nu(\rho, \beta) = (B_\nu \sin \nu \beta) a_\nu \rho^\nu = 0 \quad (19.2.24)$$

Anche in questo caso dobbiamo imporre che sia:  $B_\nu \sin \nu \beta = 0$  e dovendo per forza essere  $B_\nu \neq 0$  (per evitare la soluzione banale) si deve avere:  $\sin \nu \beta = 0$  da cui:

$$\nu = \frac{m\pi}{\beta} \text{ con } m = 1, 2, \dots \quad (19.2.25)$$

La soluzione é quindi:

$$\Phi_m(\rho, \phi) = a_m B_m \rho^{\frac{m\pi}{\beta}} \sin \frac{m\pi}{\beta} \phi \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (19.2.26)$$

Data la linearit  dell'equazione di Laplace, la soluzione generale  :

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \rho^{\frac{m\pi}{\beta}} \sin \left( \frac{m\pi}{\beta} \phi \right) \quad (19.2.27)$$

dove i coefficienti  $c_m$ , ancora indeterminati, dipendono dai valori del potenziale in punti lontani dall'angolo (cio  dalla sorgente).

Poich  vogliamo studiare il potenziale per valori di  $\rho$  prossimi allo zero possiamo trascurare i termini della serie oltre il primo e quindi nell'immediato intorno di  $\rho = 0$  il potenziale   approssimativamente:

$$\Phi(\rho, \phi) = c_1 \rho^{\frac{\pi}{\beta}} \sin \left( \frac{\pi}{\beta} \phi \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (19.2.28)$$

Pertanto, le componenti del campo elettrico, **in prossimit  dell'origine**, sono:

$$E_\rho(\rho, \phi) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = -\frac{\pi}{\beta} c_1 \rho^{\left(\frac{\pi}{\beta} - 1\right)} \sin \left( \frac{\pi}{\beta} \phi \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (19.2.29)$$

$$E_\phi(\rho, \phi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\frac{\pi}{\beta} c_1 \rho^{\left(\frac{\pi}{\beta} - 1\right)} \cos \left( \frac{\pi}{\beta} \phi \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (19.2.30)$$

**Caso  $\beta > \pi$**  - L'angolo bidimensionale **diventa uno spigolo** ed il campo e la densità superficiale di carica diventano singolari per  $\rho \rightarrow 0$ . Per  $\beta = 2\pi$  (cioè lo spigolo è per esempio il bordo di una lastra sottile) la  $\sigma$  segue la legge  $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ .

Il comportamento dei campi in vicinanza degli orli appuntiti rende ragione del funzionamento dei **parafulmini**. Infatti, in prossimità dello spigolo o delle punte si vengono a creare campi molto intensi. Se essi superano una certa intensità (la quale dipende dalla forma esatta dell'elettrodo, dalla sua posizione rispetto ad altri elettrodi) si può avere il collasso dielettrico e quindi la scarica.

Per aria a *TPN* questa intensità di campo, che come vedremo prende il nome di **rigidità dielettrica**, vale  $2.5 \cdot 10^4$  V/cm. Durante i temporali, con le grandi differenze di potenziale fra il suolo e le nubi, una aguzza lama conduttrice messa a terra provocherà il collasso dielettrico nelle sue vicinanze (parafulmine).

Per  $\phi = 0$  i campi sono:

$$E_\rho(\rho, 0) = 0 \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (19.2.31)$$

$$E_\phi(\rho, 0) = -\frac{\pi}{\beta} c_1 \rho \left( \frac{\pi}{\beta} - 1 \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (19.2.32)$$

Per  $\phi = \beta$  i campi sono:

$$E_\rho(\rho, \beta) = 0 \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (19.2.33)$$

$$E_\phi(\rho, \beta) = \frac{\pi}{\beta} c_1 \rho \left( \frac{\pi}{\beta} - 1 \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (19.2.34)$$

cioè essi sono ortogonali alle pareti o entrambi uscenti o entrambi entranti.

Calcoliamo la densità di carica sulle pareti sempre in prossimità dell'origine:

$$|\sigma| = \epsilon_0 |E_\phi| = \epsilon_0 \frac{\pi}{\beta} c_1 \rho \left( \frac{\pi}{\beta} - 1 \right) \quad \text{per } \rho \ll 1 \quad (19.2.35)$$

**Caso  $\beta < \pi$**  - L'esponente di  $\rho$  è positivo e quindi per  $\rho \ll 1$  la  $\sigma_{ind}$  nell'angolo interno è praticamente nulla qualunque sia  $c_1$ . Per  $\beta = \frac{\pi}{4}$  la  $\sigma$  in prossimità dell'origine varia con legge  $\rho^3$ . Per  $\beta = \pi$  (superficie piana) la  $\sigma$  diventa indipendente da  $\rho$ , come è ovvio intuitivamente.



### 19.3 - Gabbia di Faraday a rete

Come ultimo esempio desideriamo descrivere un'altra proprietà interessante dei campi elettrici, della quale si fa uso nella progettazione di strumenti elettrici, valvole termoioniche e per lo **schermaggio elettrostatico**.

Per rendere il problema più semplice possibile, considereremo una schiera di fili paralleli giacenti in un piano; i fili siano conduttori perfetti, infinitamente lunghi e uniformemente spazati fra loro.

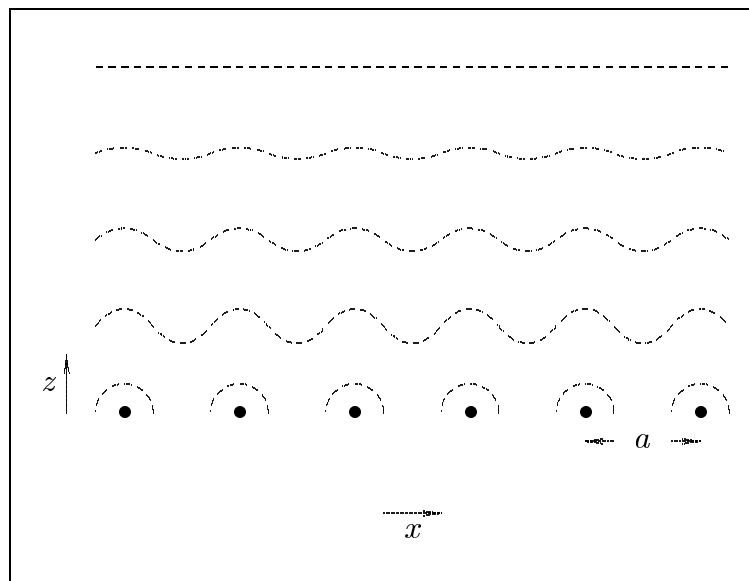


fig.19.3-1

Applichiamo l'equazione di Laplace bidimensionale in quanto essendo i fili infinitamente lunghi lungo la direzione  $\hat{y}$ , il potenziale non dipenderá da  $y$  e pertanto sará:  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ .  
Si ha allora:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (19.3.1)$$

Dobbiamo trovare una soluzione tale che per  $x = ma$  il potenziale per  $z = 0$  deve essere costante.

Data la periodicitá lungo la direzione  $\hat{x}$ , scegliamo la soluzione nella classe delle funzioni:

$$\Phi_n(x, z) = F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{a} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (19.3.2)$$

dove  $F_n(z)$  é una funzione da determinare attraverso la (19.3.1).

La soluzione generale sará, al solito:

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x, z) \quad (19.3.3)$$

Sostituendo la (19.3.2) nella (19.3.1) si ha:

$$-F_n(z) \left( \frac{2\pi n}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi nx}{a} + \frac{d^2 F_n(z)}{dz^2} \cos \frac{2\pi nx}{a} = 0$$

cioé:

$$\frac{d^2 F_n(z)}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(z) \quad (19.3.4)$$

che é del tipo:

$$F''(z) - \omega^2 F(z) = 0 \quad (19.3.5)$$

Una soluzione particolare della (19.3.5) é:

$$F_n = A_n e^{-\frac{2\pi n}{a} z} \quad (19.3.6)$$

Posto  $z_n = \frac{a}{2\pi n}$  la (19.3.6) assume la forma:

$$F_n = A_n e^{-\frac{z}{z_n}} \quad (19.3.7)$$

La soluzione generale é la somma su  $n$  delle soluzioni (19.3.7).

Poiché all'aumentare di  $n$   $z_n$  diminuisce, si può considerare solo la componente per  $n = 1$  cioè la **prima armonica**.

Assumiamo, allora, come soluzione del problema:

$$\Phi(x, z) = A e^{-\frac{2\pi}{a} z} \cos \frac{2\pi x}{a} + \Phi_0 \quad (19.3.8)$$

Il campo elettrico valutato come:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$  risulta:

$$\vec{E} = -\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \Phi - \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \Phi = A \hat{x} \frac{2\pi}{a} e^{-\frac{2\pi}{a} z} \sin \frac{2\pi x}{a} + A \hat{z} \frac{2\pi}{a} e^{-\frac{2\pi}{a} z} \cos \frac{2\pi x}{a} \quad (19.3.9)$$

Per  $z = 3 \div 4$  volte la quantità  $\frac{a}{2\pi}$ , il campo é praticamente nullo. Ecco dimostrato come una schiera di fili (in pratica, ancora meglio, una rete) riesce a schermare da un campo elettrico esterno.

### 19.4 - Problemi di condizioni al contorno relativi a dielettrici

Per quanto riguarda i problemi relativi ai dielettrici, si può utilizzare l'equazione di Laplace come nel caso dei conduttori, se il dielettrico è omogeneo. Infatti, dalle equazioni di Maxwell applicate all'elettrostatica, si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (19.4.1)$$

da cui:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (19.4.2)$$

e:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (19.4.3)$$

Se il dielettrico è omogeneo, la (19.4.3) si può scrivere:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (19.4.4)$$

Sostituendo nella (19.4.4) la (19.4.2) si ottiene l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (19.4.5)$$

Nel caso in cui  $\rho = 0$  la (19.4.5) degenera nella equazione di Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (19.4.6)$$

### 19.5 - Sfera dielettrica posta in campo elettrico uniforme

È utile studiare l'interazione fra una sfera dielettrica ed un campo elettrico uniforme nel quale essa è posta. Come già sappiamo la soluzione generale del problema, simile a quello della sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme, è:

$$\Phi(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.5.1)$$

#### Potenziale nella zona esterna alla sfera

Il potenziale nei punti esterni si ottiene dopo aver imposto la condizione all'infinito cioè che per  $r \rightarrow \infty$

$$[\Phi(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta + cost \quad (19.5.2)$$

Ne segue:

$$\Phi_{ext}(r, \theta) = cost + C_1 r^{-1} - E_0 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.5.3)$$

### Potenziale nella zona interna alla sfera

La funzione potenziale deve essere finita per  $r = 0$  quindi, per essere una soluzione fisicamente accettabile, dobbiamo porre eguale a zero le costanti  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Ne segue:

$$\Phi_{int}(r, \theta) = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.5.4)$$

### Valutazione delle costanti

Per trovare le costanti e, quindi, specificare il problema fisico in esame, dobbiamo imporre che:

1) la funzione  $\Phi$  sia continua per  $r = a$  qualunque sia  $\theta$ ;

2) la componente normale dell'induzione elettrica sulla superficie della sfera sia continua per  $r = a$  qualunque sia  $\theta$ . Indicando con  $\epsilon_r$  la costante dielettrica relativa della sfera, che indichiamo come mezzo 2, si ha:

$$[D_{1r}]_{r=a} = [D_{2r}]_{r=a} \quad (19.5.5)$$

cioé:

$$-\epsilon_0 \left[ \frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial r} \right]_{r=a} = -\epsilon_0 \epsilon_r \left[ \frac{\partial \Phi_{int}}{\partial r} \right]_{r=a} \quad (19.5.6)$$

dove:

$$\frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial r} = -\frac{C_1}{r^2} - E_0 \cos \theta - 2C_2 \frac{1}{r^3} \cos \theta - \frac{3}{2} C_3 \frac{1}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.5.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_{int}}{\partial r} = A_2 \cos \theta + A_3 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.5.8)$$

Per la condizione 2) si deve avere:

$$-\frac{C_1}{a^2} - E_0 \cos \theta - 2C_2 \frac{1}{a^3} \cos \theta - \frac{3}{2} C_3 \frac{1}{a^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \epsilon_r A_2 \cos \theta + \epsilon_r A_3 a (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.5.9)$$

Perché sia verificata l'eguaglianza qualunque sia  $\theta$  deve essere:

$$\begin{aligned} -\frac{C_1}{a^2} + \frac{3}{2} C_3 \frac{1}{a^4} + \dots &= -\epsilon_r A_3 a + \dots \\ -E_0 - 2C_2 \frac{1}{a^3} &= \epsilon_r A_2 \\ -\frac{3}{2} C_3 \frac{1}{a^4} &= \epsilon_r A_3 a \\ &\dots \end{aligned} \quad (19.5.10)$$

Applichiamo, adesso, la condizione della continuità di  $\Phi$  per  $r = a$ :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 a \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 a^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \\ = \text{cost} + C_1 a^{-1} + [C_2 a^{-2} - E_0 a] \cos \theta + \frac{1}{2} C_3 a^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned} \quad (19.5.11)$$

che conduce alle:

$$\begin{aligned} A_1 - \frac{1}{2} A_3 a^2 + \dots = \text{cost} + C_1 a^{-1} - \frac{1}{2} C_3 a^{-3} + \dots \\ A_2 a = C_2 a^{-2} - E_0 a \\ \frac{3}{2} A_3 a^2 = \frac{3}{2} C_3 a^{-3} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (19.5.12)$$

La terza e le successive equazioni del sistema (19.5.12) non sono compatibili con la terza e le successive equazioni del sistema (19.5.10). Pertanto si ha:

$$A_i = 0 \quad (i \geq 3) \quad C_i = 0 \quad (i \geq 3) \quad (19.5.13)$$

Segue, pertanto, che:

$$C_1 = 0 \quad e \quad A_1 = \text{cost} \quad (19.5.14)$$

Le uniche costanti da calcolare sono  $A_2$  e  $C_2$  che soddisfano il sistema:

$$\begin{aligned} A_2 - C_2 a^{-3} = -E_0 \\ \epsilon_r A_2 + 2C_2 a^{-3} = -E_0 \end{aligned} \quad (19.5.15)$$

che dá come risultato:

$$A_2 = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2}; \quad C_2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 \quad (19.5.16)$$

In definitiva, quindi, si ha:

$$\Phi_{ext} = \text{cost} - E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 r^{-2} \cos \theta \quad (19.5.17)$$

$$\Phi_{int} = \text{cost} - \frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta \quad (19.5.18)$$

Siamo particolarmente interessati al calcolo del campo interno alla sfera:

$$E_{r_{interno}} = -\frac{\partial \Phi_{int}}{\partial r} = \frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \cos \theta \quad (19.5.19)$$

$$E_{\theta_{interno}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{int}}{\partial \theta} = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \sin \theta \quad (19.5.20)$$

Passando in coordinate cartesiane, si ha:

$$E_z = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta$$

$$E_x = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta$$

da cui:

$$\mathbf{E}_z = \frac{3\mathbf{E}_0}{\epsilon_r + 2} \quad \mathbf{E}_x = \mathbf{0} \quad (19.5.21)$$

Il campo elettrico all'interno di una sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme é pure uniforme nella stessa direzione e verso del campo elettrico esterno iniziale.

Le componenti del campo elettrico esterno sono:

$$E_{r_{esterno}} = -\frac{\partial \Phi_{est}}{\partial r} = E_0 \left( 1 + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (19.5.22)$$

$$E_{\theta_{esterno}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{est}}{\partial \theta} = -E_0 \left( 1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (19.5.23)$$

### Grafico delle linee di forza

Le linee di forza del campo elettrico interno sono delle rette parallele all'asse z. Per quanto riguarda le linee di forza del campo elettrico esterno, utilizziamo lo stesso procedimento che abbiamo eseguito per la sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme. Risulta, immediatamente:

$$\boxed{|\sin \theta| = \xi \sqrt{\frac{r}{r^3 + \eta 2a^3}}} \quad (19.5.24)$$

avendo posto:

$$\eta = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad (19.5.25)$$

In questo caso il parametro  $\xi_s$  al di sopra del quale le linee di forza si staccano completamente dalla sfera é dato da:

$$\xi_s = a \sqrt{1 + 2\eta} \quad (19.5.26)$$

La linea di forza competente al valore  $\xi_s$  tocca la sfera con tangente orizzontale, in quanto per  $z = 0$  e  $x = a$ , ossia per  $\theta = 90^0$ , come si deduce dalla (19.5.22) e (19.5.23), risulta  $E_r = 0$ .

A titolo di completezza osserviamo che il parametro  $\eta$  tende a 1 per  $\epsilon_r \rightarrow \infty$ ; in questo caso cioé la sfera dielettrica si comporta come una sfera conduttrice. Per esempio nel caso

dell'acqua ( $\epsilon_r = 81$ ), risulta  $\eta = 0.9638$  ossia le linee di forza competenti al campo elettrico esterno hanno praticamente lo stesso andamento di quelle relative alla sfera conduttrice.

**Linee di forza del campo elettrico ( $\epsilon_r = 2, a = 1$ )**

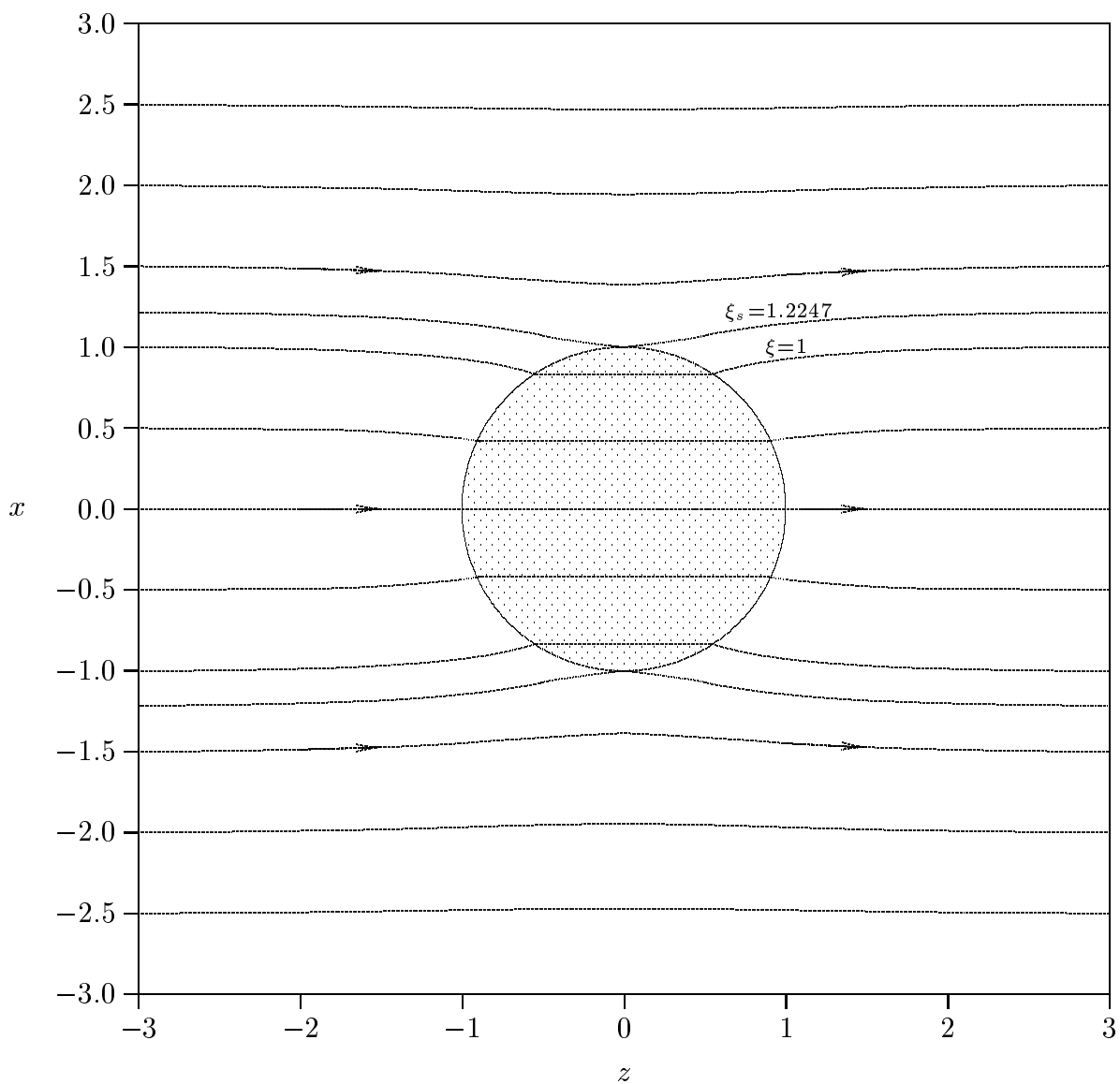


fig.19.5-1

### 19.6 - Problemi di condizioni al contorno di natura magnetica

In assenza di correnti di conduzione, le equazioni della magnetostatica, sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \quad (19.6.1)$$

Dalla (19.6.1) segue che il campo magnetico può essere derivato da una funzione scalare che indichiamo con  $U$ , cioè:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}U \quad (19.6.2)$$

Pertanto, se  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ , ne segue  $\vec{B} = -\mu\vec{\nabla}U$  che sostituito nella prima delle (19.6.1), comporta:

$$\nabla^2U = 0 \quad (19.6.3)$$

Ne segue che i problemi di condizioni al contorno coinvolgenti mezzi magnetici senza corrente di conduzione si possono risolvere attraverso l'equazione (19.6.3) che è una equazione di Laplace.

### 19.7 - Sfera magnetica posta in campo magnetico uniforme in assenza di corrente superficiale

Supponiamo di avere una sfera di materiale magnetico **lineare** di raggio  $a$  e permeabilità  $\mu$ , posta in una zona di campo magnetico inizialmente uniforme  $\vec{B}_0$ . Vorremmo determinare come il campo magnetico viene modificato dalla presenza della sfera ed in particolare determinare il campo nella sfera stessa.

Il problema della sfera, pertanto, consiste nella soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche come abbiamo fatto per il caso della sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme. Poniamo l'origine del nostro sistema di coordinate nel centro della sfera e prendiamo l'orientamento di  $\vec{B}_0$  come asse polare. L'espressione del potenziale è:

$$U(r, \theta) = A_1 + C_1 \frac{1}{r} + A_2 r \cos \theta + C_2 \frac{1}{r^2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 \frac{1}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.7.1)$$

Il campo esterno si ottiene dopo avere imposto le condizioni all'infinito cioè che per  $r \rightarrow \infty$ :

$$\left[ \vec{B}(r, \theta) \right]_{r \rightarrow \infty} = B_0 \hat{z} \quad \text{ossia} \quad [U(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} = -H_0 r \cos \theta + cost. \quad (19.7.2)$$

Il campo magnetico interno si ottiene dopo aver imposto che per  $r = 0$  il potenziale non diverga.

Pertanto, in analogia a quanto abbiamo detto nel caso della sfera conduttrice posta in un campo elettrico, dobbiamo avere:

$$U_{ext} = cost + C_1 r^{-1} - H_0 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.7.3)$$

$$U_{int} = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.7.4)$$



Applichiamo le condizioni al contorno:

$$H_{\theta int}(a, \theta) = H_{\theta ext}(a, \theta) \quad (19.7.5)$$

$$B_{r int}(a, \theta) = B_{r ext}(a, \theta) \quad (19.7.6)$$

dove naturalmente:

$$H_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad B_r = -\mu \frac{\partial U}{\partial r} \quad (19.7.7)$$

$$\frac{\partial U_{int}}{\partial \theta} = -A_2 r \sin \theta - 3A_3 r^2 \cos \theta \sin \theta + \dots \quad (19.7.8)$$

$$\frac{\partial U_{ext}}{\partial \theta} = H_0 r \sin \theta - C_2 r^{-2} \sin \theta - 3C_3 r^{-3} \cos \theta \sin \theta + \dots \quad (19.7.9)$$

$$\frac{\partial U_{int}}{\partial r} = A_2 \cos \theta + A_3 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.7.10)$$

$$\frac{\partial U_{ext}}{\partial r} = -C_1 r^{-2} - H_0 \cos \theta - 2C_2 \frac{1}{r^3} \cos \theta - \frac{3}{2} C_3 \frac{1}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) \dots \quad (19.7.11)$$

La (19.7.5) e la (19.7.6), allora, si scrivono:

$$-\frac{1}{a} \left[ \frac{\partial U_{int}}{\partial \theta} \right]_{(r=a)} = -\frac{1}{a} \left[ \frac{\partial U_{ext}}{\partial \theta} \right]_{(r=a)} \quad (19.7.12)$$

$$-\mu \left[ \frac{\partial U_{int}}{\partial r} \right]_{(r=a)} = -\mu_0 \left[ \frac{\partial U_{ext}}{\partial r} \right]_{(r=a)} \quad (19.7.13)$$

che si traducono nelle:

$$-A_2 a \sin \theta - 3A_3 a^2 \cos \theta \sin \theta + \dots = H_0 a \sin \theta - C_2 a^{-2} \sin \theta - 3C_3 a^{-3} \cos \theta \sin \theta + \dots \quad (19.7.14)$$

$$\begin{aligned} & \mu A_2 \cos \theta + \mu A_3 a (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \\ & = -\mu_0 C_1 a^{-2} - \mu_0 H_0 \cos \theta - 2C_2 \mu_0 \frac{1}{a^3} \cos \theta - \frac{3}{2} C_3 \frac{1}{a^4} \mu_0 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned} \quad (19.7.15)$$

Perché la (19.7.14) e la (19.7.15) siano verificate occorre che:

$$-A_2 a = H_0 a - C_2 a^{-2} \quad (19.7.16)$$

$$-3A_3 a^2 = -3C_3 a^{-3} \quad (19.7.17)$$

$$-\mu A_3 a = -\mu_0 C_1 a^{-2} + \frac{3}{2} \mu_0 C_3 \frac{1}{a^4} \quad (19.7.18)$$

$$\mu A_2 = -\mu_0 H_0 - 2C_2 \mu_0 \frac{1}{a^3} \quad (19.7.19)$$

$$\mu A_3 a = -\frac{3}{2} \mu_0 C_3 \frac{1}{a^4} \quad (19.7.20)$$

.....

Si vede subito che la (19.7.17) é compatibile con la (19.7.20) se e solo se:

$$A_3 = C_3 = 0 \quad e \quad quindi \quad A_i = C_i = 0 \quad per \quad i \geq 3 \quad (19.7.21)$$

Ne segue dalla (19.7.18) che anche  $C_1 = 0$ . Pertanto le uniche costanti diverse da zero sono  $A_2$  e  $C_2$  che si possono calcolare dal sistema costituito dalla (19.7.16) e dalla (19.7.19):

$$-A_2 a = H_0 a - C_2 a^{-2} \quad (19.7.22)$$

$$\mu A_2 = -\mu_0 H_0 - 2C_2 \mu_0 \frac{1}{a^3} \quad (19.7.23)$$

la cui soluzione é:

$$A_2 = -\frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 \quad (19.7.24)$$

$$C_2 = \frac{\mu_0 a^3 \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)}{\mu + 2\mu_0} H_0 \quad (19.7.25)$$

Ne segue, pertanto, dopo aver posto  $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$ :

$$U_{ext} = cost - \frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{B_0 a^3 \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)}{\mu + 2\mu_0} r^{-2} \cos \theta \quad (19.7.26)$$

$$U_{int} = A_1 - \frac{3B_0}{\mu + 2\mu_0} r \cos \theta \quad (19.7.27)$$

Posto  $\mu = \mu_r \mu_0$  si ha:

$$U_{ext} = cost - \frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{B_0 a^3 (\mu_r - 1)}{\mu_0 (\mu_r + 2)} r^{-2} \cos \theta \quad (19.7.28)$$

$$U_{int} = A_1 - \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} r \cos \theta \quad (19.7.29)$$

Per  $r = a$ :

$$U_{ext(r=a)} = cost - \frac{B_0}{\mu_0} a \cos \theta + \frac{B_0 a (\mu_r - 1)}{\mu_0 (\mu_r + 2)} \cos \theta = cost - \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} a \cos \theta \quad (19.7.30)$$

$$U_{int(r=a)} = A_1 - \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} a \cos \theta \quad (19.7.31)$$

Per la continuitá del potenziale sui punti della sfera, deve essere:  $A_1 = cost$ .

Quindi, in definitiva i potenziali descriventi i campi magnetici nei punti fuori la sfera e dentro la sfera sono:

$$U_{ext} = cost - \frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{B_0 a^3 (\mu_r - 1)}{\mu_0 (\mu_r + 2)} r^{-2} \cos \theta \quad (19.7.32)$$

$$U_{int} = cost - \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} r \cos \theta \quad (19.7.33)$$

Vogliamo porre la nostra attenzione sul campo di induzione magnetica nei punti interni alla sfera:

$$\vec{B}_{int} = -\mu \vec{\nabla} U_{int} \quad (19.7.34)$$

ossia:

$$B_{rint} = -\mu \frac{\partial U_{int}}{\partial r} \quad B_{\theta int} = -\mu \frac{1}{r} \frac{\partial U_{int}}{\partial \theta} \quad (19.7.35)$$

$$B_{rint} = \mu \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} \cos \theta \quad B_{\theta int} = -\mu \frac{3B_0}{\mu_0 (\mu_r + 2)} \sin \theta \quad (19.7.36)$$

É utile esprimere il campo nelle componenti cartesiane:

$$\mathbf{B}_z = B_r \cos \theta - B_\theta \sin \theta = \frac{3\mathbf{B}_0 \mu_r}{\mu_r + 2} \quad (19.7.37)$$

$$\mathbf{B}_x = B_r \sin \theta + B_\theta \cos \theta = 0 \quad (19.7.38)$$

Ne segue, quindi, che:

$$\vec{\mathbf{B}}_{int} = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2} \mathbf{B}_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (19.7.39)$$

Per il calcolo del campo esterno si ha:

$$\vec{B}_{ext} = -\mu_0 \vec{\nabla} U_{ext} \quad (19.7.40)$$

ossia:

$$B_{r ext} = -\mu_0 \frac{\partial U_{ext}}{\partial r} \quad B_{\theta ext} = -\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial U_{ext}}{\partial \theta} \quad (19.7.41)$$

$$B_{r ext} = B_0 \cos \theta + 2B_0 a^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{1}{r^3} \cos \theta \quad B_{\theta ext} = -B_0 \sin \theta + B_0 a^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{1}{r^3} \sin \theta \quad (19.7.42)$$

Il campo esterno espresso in componenti cartesiane é:

$$\begin{aligned} B_{z ext} &= B_0 \cos^2 \theta + 2B_0 a^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{1}{r^3} \cos^2 \theta + B_0 \sin^2 \theta - B_0 a^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{1}{r^3} \sin^2 \theta = \\ &= B_0 + B_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\right) (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (19.7.43)$$

$$\begin{aligned}
 B_{x_{ext}} &= B_0 \cos \theta \sin \theta + 2B_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \cos \theta \sin \theta - \\
 -B_0 \cos \theta \sin \theta + B_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \cos \theta \sin \theta &= 3B_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \cos \theta \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{19.7.44}$$

Si osservi che per  $\mu_r$  abbastanza elevato  $\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}$  tende all'unit  e quindi per  $r = a$   $B_{\theta_{ext}}$  tende a zero; quindi nei corpi con alta permeabilit  magnetica il campo esterno   ortogonale alla superficie del corpo cio  il loro comportamento   analogo a quello dei conduttori perfetti.

Le linee di forza sia del campo magnetico interno che del campo magnetico esterno hanno identico comportamento di quelle relative alla sfera dielettrica posta in campo elettrostatico uniforme; in questo caso il parametro  $\eta$    dato, come si evince dalle (19.7.42), dall'espressione:

$$\eta = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}
 \tag{19.7.45}$$

### 19.8 - Schermaggio magnetico: strato sferico di materiale permeabile in un campo magnetico uniforme

Si supponga che in una regione di spazio vuoto esista inizialmente una induzione magnetica  $\vec{B}_0$ . Si disponga un corpo permeabile in questa regione. Le linee di forza dell'induzione magnetica risulteranno deformate. Se la permeabilità del corpo è molto alta ci aspettiamo che le linee di forza tendano, in prossimità del corpo, a disporsi perpendicolarmente alla sua superficie. Sviluppando ulteriormente l'analogia con i corpi conduttori ci aspettiamo anche che, se il corpo è cavo, il campo all'interno della cavità risulti di intensità minore che all'esterno, tendendo a zero, al limite per  $\mu_r$  che tende all'infinito. Una tale riduzione del campo nella cavità viene attribuita ad una azione di schermaggio magnetico esercitata dal materiale permeabile. Essa è di notevole importanza pratica, in quanto spesso è necessario o desiderabile creare regioni di spazio essenzialmente senza campo a scopi di misura o per un buon funzionamento di apparecchiature elettroniche. Come esempio del fenomeno dello schermaggio magnetico consideriamo uno strato sferico di raggio interno  $a$  e raggio esterno  $b$ , costituito di un materiale magnetico di permeabilità  $\mu$ , introdotto in una regione, di permeabilità  $\mu \simeq \mu_0$  come la regione cava, in cui la induzione magnetica preesistente era  $\vec{B}_0$ , uniforme e costante.

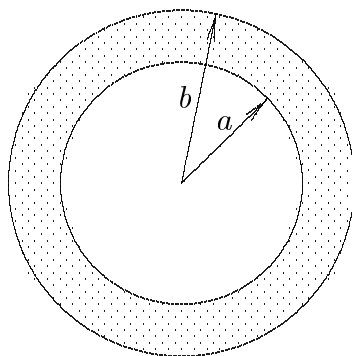


fig.19.8-1

Vogliamo determinare il campo di induzione magnetica in tutti i punti dello spazio, ma in particolare all'interno della cavità ( $r < a$ ) in funzione della permeabilità  $\mu$  dello strato. Dato che non ci sono correnti, il campo magnetico  $\vec{H}$ , al solito, è derivabile da un potenziale scalare:  $\vec{H} = -\vec{\nabla}U$ . Inoltre, siccome  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ , l'equazione della divergenza  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  diventa  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ . Dunque il potenziale  $U$  soddisfa ovunque all'equazione di Laplace e il problema si riduce a trovare le appropriate soluzioni nelle diverse regioni, in modo da soddisfare le condizioni al contorno per  $r = a$  e  $r = b$ .

Cominciamo a scrivere la soluzione generale per il potenziale:

$$U(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.8.1)$$

Imponiamo le solite condizioni per le varie regioni dove si considera il campo.

Per  $r > b$  il potenziale é:

$$U_{(r>b)} = cost + C_1 r^{-1} - H_0 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.8.2)$$

Per  $r < a$  il potenziale é:

$$U_{(r<a)} = A_1 + A_2 r \cos \theta + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.8.3)$$

Per  $a < r < b$  il potenziale é:

$$U_{rab} = A'_1 + C'_1 r^{-1} + A'_2 r \cos \theta + C'_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{2} A'_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C'_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.8.4)$$

Le condizioni al contorno sono:

$$1) \quad \mathbf{H}_{\theta(r>b)}(\mathbf{b}, \theta) = \mathbf{H}_{\theta(rab)}(\mathbf{b}, \theta) \quad (19.8.5)$$

$$2) \quad \mathbf{B}_{r(r>b)}(\mathbf{b}, \theta) = \mathbf{B}_{r(rab)}(\mathbf{b}, \theta) \quad (19.8.6)$$

$$3) \quad \mathbf{H}_{\theta(r<a)}(\mathbf{a}, \theta) = \mathbf{H}_{\theta(rab)}(\mathbf{a}, \theta) \quad (19.8.7)$$

$$4) \quad \mathbf{B}_{r(r<a)}(\mathbf{a}, \theta) = \mathbf{B}_{r(rab)}(\mathbf{a}, \theta) \quad (19.8.8)$$

dove:

$$H_{\theta(r>b)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} U_{(r>b)} \quad (19.8.9)$$

$$H_{\theta(rab)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} U_{(rab)} \quad (19.8.10)$$

$$H_{\theta(r<a)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} U_{(r<a)} \quad (19.8.11)$$

$$B_{r(r>b)} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial r} U_{(r>b)} \quad (19.8.12)$$

$$B_{r(rab)} = -\mu \frac{\partial}{\partial r} U_{(rab)} \quad (19.8.13)$$

$$B_{r(r<a)} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial r} U_{(r<a)} \quad (19.8.14)$$

che, sviluppate, diventano:

$$H_{\theta(r>b)} = -H_0 \sin \theta + C_2 \frac{1}{r^3} \sin \theta + 3C_3 \frac{1}{r^4} \sin \theta \cos \theta + \dots \quad (19.8.15)$$

$$H_{\theta(rab)} = A'_2 \sin \theta + C'_2 \frac{1}{r^3} \sin \theta + 3A'_3 r \cos \theta \sin \theta + 3C'_3 r^{-4} \cos \theta \sin \theta + \dots \quad (19.8.16)$$

$$H_{\theta(r<a)} = A_2 \sin \theta + 3A_3 r \cos \theta \sin \theta + \dots \quad (19.8.17)$$

$$B_{r(r>b)} = \mu_0 \frac{C_1}{r^2} + \mu_0 H_0 \cos \theta + 2\mu_0 \frac{C_2}{r^3} \cos \theta + \frac{3}{2}\mu_0 C_3 \frac{1}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.8.18)$$

$$B_{r(rab)} = \mu \frac{C'_1}{r^2} - \mu A'_2 \cos \theta + 2\mu C'_2 \frac{1}{r^3} \cos \theta - \mu A'_3 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{2}\mu C'_3 \frac{1}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.8.19)$$

$$B_{r(r<a)} = -\mu_0 A_2 \cos \theta - \mu_0 A_3 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19.8.20)$$

Allora, le condizioni al contorno (19.8.5), (19.8.6), (19.8.7), (19.8.8), si scrivono:

$$\begin{aligned} 1) \quad & -H_0 \sin \theta + C_2 \frac{1}{b^3} \sin \theta + 3C_3 \frac{1}{b^4} \sin \theta \cos \theta + \dots = \\ & = A'_2 \sin \theta + C'_2 \frac{1}{b^3} \sin \theta + 3A'_3 b \cos \theta \sin \theta + 3C'_3 b^{-4} \cos \theta \sin \theta + \dots \end{aligned} \quad (19.8.21)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \mu_0 \frac{C_1}{b^2} + \mu_0 H_0 \cos \theta + 2\mu_0 \frac{C_2}{b^3} \cos \theta + \frac{3}{2}\mu_0 C_3 \frac{1}{b^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \\ & = \mu \frac{C'_1}{b^2} - \mu A'_2 \cos \theta + 2\mu C'_2 \frac{1}{b^3} \cos \theta - \mu A'_3 b (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{2}\mu C'_3 \frac{1}{b^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned} \quad (19.8.22)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & A_2 \sin \theta + 3A_3 a \cos \theta \sin \theta + \dots = \\ & = A'_2 \sin \theta + C'_2 \frac{1}{a^3} \sin \theta + 3A'_3 a \cos \theta \sin \theta + 3C'_3 a^{-4} \cos \theta \sin \theta + \dots \end{aligned} \quad (19.8.23)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & -\mu_0 A_2 \cos \theta - \mu_0 A_3 a (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots = \\ & = \mu \frac{C'_1}{a^2} - \mu A'_2 \cos \theta + 2\mu C'_2 \frac{1}{a^3} \cos \theta - \mu A'_3 a (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{2}\mu C'_3 \frac{1}{a^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned} \quad (19.8.24)$$

Perché l'equazione (19.8.21) sia soddisfatta occorre che:

$$1) \quad -H_0 + \frac{C_2}{b^3} - A'_2 - C'_2 \frac{1}{b^3} = 0 \quad (19.8.25)$$

$$2) \quad \frac{3C_3}{b^4} - 3A'_3 b - 3C'_3 \frac{1}{b^4} = 0 \quad (19.8.26)$$

Perché l'equazione (19.8.22) sia soddisfatta occorre che:

$$3) \quad \frac{\mu_0 C_1}{b^2} - \frac{3}{2}\mu_0 \frac{C_3}{b^4} - \mu \frac{C'_1}{b^2} - \mu A'_3 b + \frac{3}{2}\mu C'_3 \frac{1}{b^4} = 0 \quad (19.8.27)$$

$$4) \quad \mu_0 H_0 + 2\mu_0 \frac{C_2}{b^3} + \mu A'_2 - 2\mu C'_2 \frac{1}{b^3} = 0 \quad (19.8.28)$$

$$5) \quad \frac{9}{2}\mu_0 C_3 \frac{1}{b^4} + 3\mu A'_3 b - \frac{9}{2}\mu C'_3 \frac{1}{b^4} = 0 \quad (19.8.29)$$

Perché l'equazione (19.8.23) sia soddisfatta occorre che:

$$6) \quad A_2 - A'_2 - C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (19.8.30)$$

$$7) \quad 3A_3a - 3A'_3a - 3C'_3a^{-4} = 0 \quad (19.8.31)$$

Perché l'equazione (19.8.24) sia soddisfatta occorre che:

$$8) \quad \mu_0A_3a - \mu A'_3a + \frac{3}{2}\mu C'_3 \frac{1}{a^4} - \mu \frac{C'_1}{a^2} = 0 \quad (19.8.32)$$

$$9) \quad -\mu_0A_2 + \mu A'_2 - 2\mu C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (19.8.33)$$

$$10) \quad -3\mu_0A_3a + 3\mu A'_3a - \frac{9}{2}\mu C'_3 \frac{1}{a^4} = 0 \quad (19.8.34)$$

Consideriamo le equazioni 1), 4), 6), 9) nelle incognite  $A_2, A'_2, C_2, C'_2$  che sono indipendenti dalle altre equazioni:

$$1) \quad -H_0 + \frac{C_2}{b^3} - A'_2 - C'_2 \frac{1}{b^3} = 0 \quad (19.8.35)$$

$$4) \quad \mu_0H_0 + 2\mu_0 \frac{C_2}{b^3} + \mu A'_2 - 2\mu C'_2 \frac{1}{b^3} = 0 \quad (19.8.36)$$

$$6) \quad A_2 - A'_2 - C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (19.8.37)$$

$$9) \quad -\mu_0A_2 + \mu A'_2 - 2\mu C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (19.8.38)$$

che, ordinando, si scrivono:

$$1) \quad -A'_2 + \frac{C_2}{b^3} - \frac{C'_2}{b^3} = +H_0 \quad (19.8.39)$$

$$4) \quad \mu A'_2 + 2\mu_0 \frac{C_2}{b^3} - 2\mu \frac{C'_2}{b^3} = -\mu_0H_0 \quad (19.8.40)$$

$$6) \quad A_2 - A'_2 - C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (19.8.41)$$

$$9) \quad -\mu_0A_2 + \mu A'_2 - 2\mu C'_2 \frac{1}{a^3} = 0 \quad (19.8.42)$$

Calcoliamo il determinante dei coefficienti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ 0 & \mu & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ -\mu_0 & \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \quad (19.8.43)$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ \mu & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} + \mu_0 \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ \mu & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \quad (19.8.44)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \mu \left( -2\mu \frac{1}{b^6} + 2\mu_0 \frac{1}{b^6} \right) - 2\frac{\mu}{a^3} \left( -2\mu_0 \frac{1}{b^3} - \mu \frac{1}{b^3} \right) - \mu_0 \left( -2\mu \frac{1}{b^6} + 2\mu_0 \frac{1}{b^6} \right) - \\ &\mu_0 \frac{1}{a^3} \left( -2\mu_0 \frac{1}{b^3} - \mu \frac{1}{b^3} \right) = (\mu - \mu_0) (\mu_0 - \mu) \frac{2}{b^6} + (2\mu + \mu_0) (2\mu_0 + \mu) \frac{1}{a^3 b^3} = \\ &= \frac{1}{a^3 b^3} \left[ -2\frac{a^3}{b^3} (\mu - \mu_0)^2 + (2\mu + \mu_0) (2\mu_0 + \mu) \right] \end{aligned} \quad (19.8.45)$$

Pertanto:

$$A_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} H_0 & -1 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ -\mu_0 H_0 & \mu & +2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ 0 & \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \quad (19.8.46)$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ H_0 \begin{vmatrix} \mu & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} + \mu_0 H_0 \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \right\} \quad (19.8.47)$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ H_0 \left[ -2\mu_0 \frac{1}{b^3} \left( 2\mu \frac{1}{a^3} + \mu \frac{1}{a^3} \right) \right] + \mu_0 H_0 \left[ -\frac{1}{b^3} \left( 2\mu \frac{1}{a^3} + \mu \frac{1}{a^3} \right) \right] \right\} = -\frac{1}{\Delta} \frac{9\mu B_0}{a^3 b^3} \quad (19.8.48)$$

In definitiva:

$$A_2 = \frac{-9\mu B_0}{\left[ (2\mu + \mu_0) (2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3} (\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (19.8.49)$$

Analogamente:

$$A'_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & H_0 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ 0 & -\mu_0 H_0 & +2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ -\mu_0 & 0 & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \quad (19.8.50)$$

$$A'_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{vmatrix} H_0 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ -\mu_0 H_0 & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 0 & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} + \mu_0 \begin{vmatrix} H_0 & \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^3} \\ -\mu_0 H_0 & 2\mu_0 \frac{1}{b^3} & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \right\} \quad (19.8.51)$$

$$A'_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ -2 \frac{\mu}{a^3} \left[ 2\mu_0 H_0 \frac{1}{b^3} + \mu_0 \frac{H_0}{b^3} \right] - \frac{\mu_0}{a^3} \left[ \frac{2\mu_0 H_0}{b^3} + \frac{\mu_0 H_0}{b^3} \right] \right\} = -\frac{1}{\Delta} \frac{3B_0}{a^3 b^3} (2\mu + \mu_0) \quad (19.8.52)$$

In definitiva:

$$A'_2 = \frac{-3(2\mu + \mu_0) B_0}{\left[ (2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2 \frac{a^3}{b^3} (\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (19.8.53)$$

La costante  $C'_2$  si può calcolare direttamente dalla equazione 6) cioè dalla (19.8.41):

$$C'_2 = a^3 (A_2 - A'_2) = \frac{[-9\mu + 3(2\mu + \mu_0)] B_0 a^3}{\left[ (2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2 \frac{a^3}{b^3} (\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (19.8.54)$$

In definitiva:

$$C'_2 = \frac{-3(\mu - \mu_0) B_0 a^3}{\left[ (2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2 \frac{a^3}{b^3} (\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (19.8.55)$$

Resta da calcolare  $C_2$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & -1 & H_0 & -\frac{1}{b^3} \\ 0 & \mu & -\mu_0 H_0 & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ -\mu_0 & \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \quad (19.8.56)$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{vmatrix} -1 & H_0 & -\frac{1}{b^3} \\ \mu & -\mu_0 H_0 & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ \mu & 0 & -2\mu \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} + \mu_0 \begin{vmatrix} -1 & H_0 & -\frac{1}{b^3} \\ \mu & -\mu_0 H_0 & -2\mu \frac{1}{b^3} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{a^3} \end{vmatrix} \right\} \quad (19.8.57)$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \left[ \mu \left( -2\mu \frac{H_0}{b^3} - \frac{\mu_0 H_0}{b^3} \right) - \frac{2\mu}{a^3} (\mu_0 H_0 - \mu H_0) \right] + \frac{1}{\Delta} \left[ -\mu_0 \left( -2\mu \frac{H_0}{b^3} - \frac{\mu_0 H_0}{b^3} \right) - \frac{\mu_0}{a^3} (\mu_0 H_0 - \mu H_0) \right] \quad (19.8.58)$$

che si può ancora scrivere:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{\Delta} \left[ -(\mu - \mu_0)(2\mu + \mu_0) \frac{H_0}{b^3} - (2\mu + \mu_0)(\mu_0 - \mu) \frac{H_0}{a^3} \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[ H_0 (2\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0) \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta} \frac{(2\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0) H_0 (b^3 - a^3)}{a^3 b^3} \end{aligned} \quad (19.8.59)$$

che, in definitiva, si scrive:

$$C_2 = \frac{(2\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0)(b^3 - a^3)H_0}{\left[ (2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (19.8.60)$$

Riassumiamo le espressioni delle costanti che abbiamo trovato:

$$A_2 = \frac{-9\mu B_0}{\left[ (2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (19.8.61)$$

$$A'_2 = \frac{-3(2\mu + \mu_0)B_0}{\left[ (2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (19.8.62)$$

$$C_2 = \frac{(2\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0)(b^3 - a^3)H_0}{\left[ (2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (19.8.63)$$

$$C'_2 = \frac{-3(\mu - \mu_0)B_0a^3}{\left[ (2\mu + \mu_0)(2\mu_0 + \mu) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - \mu_0)^2 \right]} \quad (19.8.64)$$

Vogliamo esprimere questi quattro coefficienti in funzione della permeabilità magnetica relativa  $\mu_r$ . Poiché  $\mu = \mu_0\mu_r$  e il denominatore si può scrivere:

$$\Delta = \left[ \mu_0^2(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\mu_0^2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right] \quad (19.8.65)$$

le formule diventano:

$$A_2 = \frac{-9\mu_r B_0}{\mu_0 \left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (19.8.66)$$

$$A'_2 = \frac{-3(2\mu_r + 1)B_0}{\mu_0 \left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (19.8.67)$$

$$C_2 = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)H_0}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (19.8.68)$$

$$C'_2 = \frac{-3(\mu_r - 1)B_0a^3}{\mu_0 \left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (19.8.69)$$

Per il calcolo degli altri coefficienti, si procede nella seguente maniera. Si moltiplichi l'equazione 8) per  $-3$  e la si confronti con la 10): si trova  $C'_1 = 0$ . Analogamente moltiplicando l'equazione 3) per  $-3$ , dopo aver posto  $C'_1 = 0$  e confrontandola con la 5) si trova  $C_1 = 0$ .

Le equazioni restanti cioè la 2), 5), 7), 10) formano un sistema omogeneo e si può facilmente verificare che il determinante dei coefficienti è diverso da zero, per cui esso ammette la soluzione banale per  $A_3$ ,  $A'_3$ ,  $C_3$  e  $C'_3$ , nonché per tutti gli altri coefficienti di ordine superiore a tre.

**Calcolo delle componenti dell'induzione magnetica nella regione interna (regione cava,  $r < a$ ).**

Le componenti del campo di induzione magnetica nella regione cava del sistema, che é quella di maggior importanza fisica, si ottengono dalla (19.8.17) e dalla (19.8.20) dopo l'opportuna sostituzione delle costanti trovate. Si ha:

$$B_{r(r < a)} = \frac{9\mu_r B_0 \cos \theta}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (19.8.70)$$

$$B_{\theta(r < a)} = -\frac{9\mu_r B_0 \sin \theta}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (19.8.71)$$

É interessante osservare che per  $\mu_r \gg 1$ , le formule (19.8.70) e (19.8.71) si possono scrivere:

$$B_{r(r < a)} = \frac{9\mu_r B_0 \cos \theta}{2\mu_r^2 \left( 1 - \frac{a^3}{b^3} \right)} \quad (19.8.72)$$

$$B_{\theta(r < a)} = -\frac{9\mu_r B_0 \sin \theta}{2\mu_r^2 \left( 1 - \frac{a^3}{b^3} \right)} \quad (19.8.73)$$

In coordinate cartesiane, si ha:

$$B_z = B_r \cos \theta - B_\theta \sin \theta, \quad B_x = B_r \sin \theta + B_\theta \cos \theta \quad (19.8.74)$$

Ne segue:

$$B_{z(r < a)} = \frac{9B_0}{2\mu_r \left( 1 - \frac{a^3}{b^3} \right)}, \quad B_x = 0 \quad (19.8.75)$$

**Il campo di induzione magnetica, nella regione interna allo strato, ha la stessa direzione e verso del campo esterno preesistente (imperturbato), ossia le linee di forza sono parallele all'asse z. Esso (nell'ipotesi  $\mu_r \gg 1$ ) risulta proporzionale a  $\frac{1}{\mu_r}$ . Di conseguenza uno schermo costruito con materiale di alta permeabilità  $\mu_r \simeq 10^3 \div 10^6$  riduce a valori assai piccoli il campo all'interno anche se lo spessore dello schermo é relativamente piccolo.**

**Calcolo delle componenti dell'induzione magnetica nella regione esterna ( $r > b$ ).**

Le componenti del campo di induzione magnetica nella regione esterna allo strato si ottengono dalla (19.8.18) e dalla (19.8.15) dopo l'opportuna sostituzione delle costanti

trovate. Si ha:

$$H_{\theta(r>b)} = -H_0 \sin \theta + \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \frac{1}{r^3} H_0 \sin \theta \quad (19.8.76)$$

$$B_{r(r>b)} = \mu_0 H_0 \cos \theta + 2\mu_0 \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \frac{1}{r^3} H_0 \cos \theta \quad (19.8.77)$$

che é conveniente scrivere nella forma:

$$B_{r(r>b)} = B_0 \left( 1 + \gamma \frac{2}{r^3} \right) \cos \theta \quad (19.8.78)$$

$$B_{\theta(r>b)} = -B_0 \left( 1 - \gamma \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \quad (19.8.79)$$

avendo posto:

$$\gamma = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (19.8.80)$$

**Calcolo delle componenti dell'induzione magnetica nella regione interna allo strato ( $a < r < b$ ).**

Le componenti del campo di induzione magnetica nella regione interna allo strato si ottengono dalla (19.8.16) e (19.8.19) dopo l'opportuna sostituzione delle costanti trovate. Si ha:

$$H_{\theta(rab)} = \frac{-3(2\mu_r + 1)H_0 \sin \theta}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} + \frac{-3(\mu_r - 1)H_0 a^3 \sin \theta}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \frac{1}{r^3} \quad (19.8.81)$$

$$B_{r(rab)} = \frac{3\mu(2\mu_r + 1)H_0 \cos \theta}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} + \frac{-3\mu(\mu_r - 1)H_0 2a^3 \cos \theta}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \frac{1}{r^3} \quad (19.8.81)$$

che si possono scrivere:

$$B_{\theta(rab)} = \frac{-3\mu_r(2\mu_r + 1)B_0}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \left[ 1 + \frac{(\mu_r - 1)a^3}{(2\mu_r + 1)r^3} \right] \sin \theta \quad (19.8.82)$$

$$B_{r(rab)} = \frac{3\mu_r(2\mu_r + 1)B_0}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \left[ 1 - \frac{(\mu_r - 1)2a^3}{(2\mu_r + 1)r^3} \right] \cos \theta \quad (19.8.83)$$

### Grafico delle linee di forza

#### Regione esterna ( $r > b$ )

Poiché le equazioni delle componenti dei campi dell'induzione magnetica nei punti esterni ( $r > b$ ) hanno la stessa forma di quelle competenti ad una sfera perfettamente conduttrice o dielettrica, l'equazione delle linee di forza relative al campo di induzione magnetica nei punti esterni ( $r > b$ ) é data da:

$$|\sin \theta| = \xi \sqrt{\frac{r}{r^3 + 2\gamma}} \quad (19.8.84)$$

essendo

$$\gamma = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)}{\left[ (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2 \right]} \quad (19.8.85)$$

Anche in questo caso il parametro  $\xi$  rappresenta l'ordinata della linea di forza del campo di induzione magnetica iniziale  $\vec{B}_0$  (imperturbato). Il valore di  $\xi$  al di sopra del quale le linee di forza del campo magnetico non toccheranno mai la sfera risulta:

$$\xi_s = \sqrt{\frac{b^3 + 2\gamma}{b}} \quad (19.8.86)$$

#### Regione interna allo strato ( $a < r < b$ )

L'equazione che descrive le linee di forza nella regione dello strato é:

$$rB_r d\theta - B_\theta dr = 0 \quad (19.8.87)$$

Sostituendo nella (19.8.87) le espressioni (19.8.82) e (19.8.83), si ha:

$$r \left( 1 - \zeta \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos \theta d\theta = - \left( 1 + \zeta \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta dr \quad (19.8.88)$$

avendo posto:

$$\zeta = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r + 1} \quad (19.8.89)$$

L'equazione (19.8.88) si può scrivere:

$$-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{1 + \zeta \frac{a^3}{r^3}}{1 - \zeta \frac{2a^3}{r^3}} \frac{dr}{r} \quad (19.8.90)$$

Eseguendo lo stesso procedimento effettuato nel caso di sfera conduttrice, risulta:

$$|\sin \theta| = \xi_1 \sqrt{\frac{r}{|r^3 - 2\zeta a^3|}} \quad (19.8.91)$$

Osservando che il parametro  $\zeta = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r + 1}$  assume, al variare di  $\mu_r$  fra 1 e  $+\infty$ , valori compresi fra 0 e  $\frac{1}{2}$ , risulta sempre  $r^3 > 2\zeta a^3$ .

Quindi  $|r^3 - 2\zeta a^3| = r^3 - 2\zeta a^3$  e la (19.8.91) diventa:

$$|\sin \theta| = \xi_1 \sqrt{\frac{r}{r^3 - 2\zeta a^3}} \quad (19.8.92)$$

Per garantire la continuità grafica della linea di forza interna allo strato con quella esterna occorre correlare il parametro  $\xi_1$  con il paramtro  $\xi$  che é quello che generalmente si fa variare.

Questo si ottiene imponendo che per  $r = b$  i secondi membri delle equazioni (19.8.84) e (19.8.92) siano eguali, ossia:

$$\xi \sqrt{\frac{b}{b^3 + 2\gamma}} = \xi_1 \sqrt{\frac{b}{b^3 - 2\zeta a^3}} \quad (19.8.93)$$

che comporta:

$$\xi_1 = \xi \frac{\sqrt{\frac{b}{b^3 + 2\gamma}}}{\sqrt{\frac{b}{b^3 - 2\zeta a^3}}} \quad (19.8.94)$$

Come esempio grafichiamo le linee di forza nel caso in cui  $\mu_r = 1000$ ,  $a = 0.7$  e  $b = 1$ .  
Risulta:

$$\gamma = 0.99468, \quad \zeta = 0.49925, \quad \xi_s = 1.729, \quad \xi_1 = 0.46899\xi \quad (19.8.95)$$

Il grafico é rappresentato in figura 19.8-2.



**Linee di forza del campo magnetico ( $\mu_r = 1000, a = 0.7, b = 1$ )**

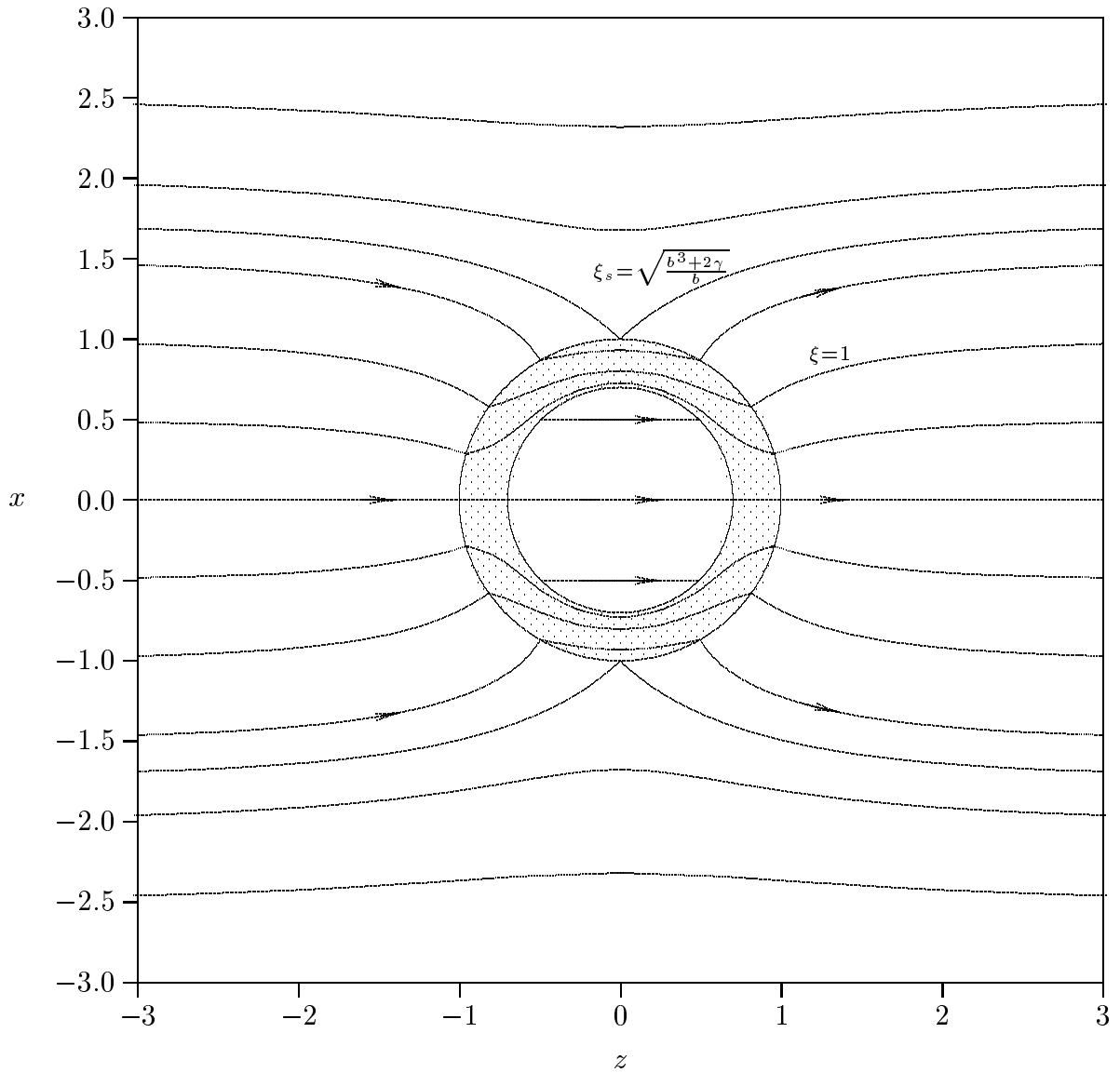


fig.19.8-2

Per comprendere meglio il meccanismo dello schermaggio, ossia della debole penetrazione del campo nella parte cava ( $r < a$ ), vogliamo valutare il valore del parametro  $\xi$ , sia esso  $\xi_s^{(i)}$ , al di sopra del quale le linee di forza non penetrano nella zona cava ma vengono "guidate" all'interno dello strato.

Per questo consideriamo la (19.8.92); deve necessariamente essere:

$$\xi_1 \sqrt{\frac{r}{r^3 - 2\zeta a^3}} \leq 1 \quad (19.8.96)$$

La funzione  $\sqrt{\frac{r}{r^3 - 2\zeta a^3}}$ , per  $r \geq a$  é decrescente all'aumentare di  $r$  ed ha il valore massimo per  $r = a$ . Tale valore massimo vale  $\sqrt{\frac{1}{a^2(1 - 2\zeta)}}$

Ne segue che per valori di  $\xi_1 > \sqrt{a^2(1 - 2\zeta)}$  la (19.8.92) é soddisfatta soltanto per valori di  $r > a$  cioè le linee di forza non toccheranno mai la sfera interna di raggio  $a$  ossia **esse non penetrano nella zona cava**.

Viceversa per valori di  $\xi_1 \leq \sqrt{a^2(1 - 2\zeta)}$  la (19.8.92) é soddisfatta anche per  $r = a$  e quindi le linee di forza toccheranno la sfera interna e penetrano nella zona cava.

Il valore  $\xi_{1s} = \sqrt{a^2(1 - 2\zeta)}$  rappresenta quindi il valore di  $\xi_1$  al di sopra del quale le linee di forza si mantengono sempre all'interno dello strato. Ad esso corrisponde il valore  $\xi_s^{(i)}$  che si può facilmente calcolare dalla formula (19.8.93).

Si ha:

$$\xi_{1s} = \xi_s^{(i)} \frac{\sqrt{\frac{b}{b^3 + 2\gamma}}}{\sqrt{\frac{b}{b^3 - 2\zeta a^3}}}$$

da cui:

$$\xi_s^{(i)} = \xi_{1s} \frac{\sqrt{\frac{b}{b^3 - 2\zeta a^3}}}{\sqrt{\frac{b}{b^3 + 2\gamma}}} = \sqrt{a^2(1 - 2\zeta)} \frac{\sqrt{\frac{b}{b^3 - 2\zeta a^3}}}{\sqrt{\frac{b}{b^3 + 2\gamma}}}$$

Il parametro  $\xi_s^{(i)}$  é funzione, oltre che dei raggi  $a$  e  $b$ , del parametro costitutivo  $\mu_r$ . É

interessante studiare tale andamento.

**Andamento di  $\xi_s^{(i)}$  in funzione di  $\mu_r$  dello strato, ( $a = 0.7, b = 1$ )**

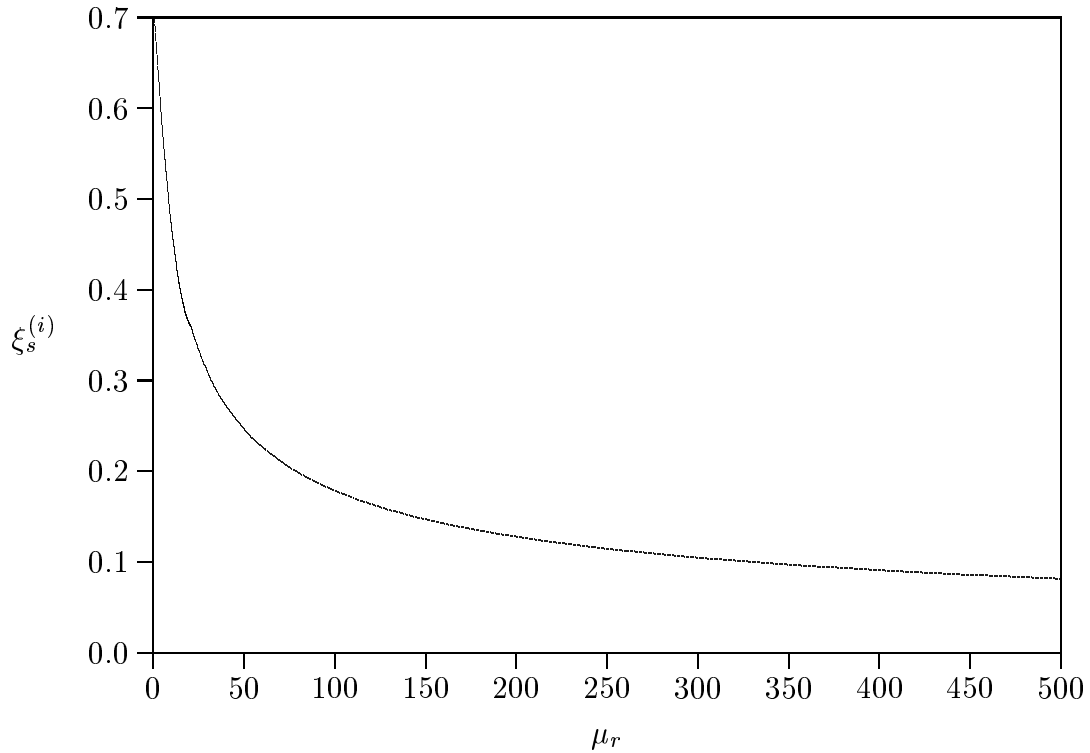


fig.19.8-3

$\mu_r$	$\gamma$	$\zeta$	$\xi_s^{(i)}$
1	0	0	0.7
2	0.1701	0.2	0.6758
10	0.6321	0.4286	0.4738
20	0.7822	0.4634	0.3671
50	0.9020	0.4851	0.2473
100	0.9488	0.4925	0.1789
200	0.9739	0.4963	0.1280
300	0.9824	0.4975	0.1049
400	0.9868	0.4981	0.0910
500	0.9894	0.4985	0.0815
1000	0.9947	0.4993	0.0578
5000	0.9989	0.4999	0.0259
10000	0.9995	0.4999	0.0183
...	...	...	...
...	...	...	...
$\infty$	1	0.5	0

Come abbiamo detto penetrano nella sfera cava soltanto le linee di forza contenute in un cilindro di raggio  $\xi_s^{(i)}$  con l'asse, diretto secondo le linee di forza del campo inizialmente

uniforme, passante per il centro della sfera. All'aumentare di  $\mu_r$  il raggio del cilindro diminuisce e quindi soltanto una piccola porzione del campo esterno contribuisce al campo nella regione cava. Le linee di forza esterne al cilindro vengono deviate e mantenute interamente all'interno dello strato. Per  $\mu_r \rightarrow \infty$ ,  $\xi_s^{(i)} \rightarrow 0$  e tutte le linee di forza sono all'interno dello strato; nessuna linea penetra nella zona cava ed il campo di induzione magnetica interno ad essa é nullo. Le figure 19.8-4 e 19.8-5 illustrano tali situazioni. Alleghiamo il programma in ambiente matlab per il calcolo di  $\xi_s^{(i)}$ .

### Programma Matlab csi.m

```
delete(get(0,'children'));
clf;
a=0.7;
b=1;
mu=(1:10:500)';
gamma=(2.*mu+1).*(mu-1).*(b.^3-a.^3) ./((2.*mu+1).*(mu+2)-2.*a.^3./b.^3.*...
(mu-1).^2);
zita=(mu-1)./(2.*mu+1);
csiis=sqrt(b./abs(b.^3-2.*zita.*a.^3)) ./sqrt(b./(b.^3+2.*gamma)).*sqrt(a.^2.*...
(1-2.*zita));
[mu gamma zita csiis]
plot(mu,csiis)
axis([0,500,0,0.7])
```

Alleghiamo il programma in ambiente matlab per il grafico delle linee di forza interne allo strato.

### Programma Matlab strato.m

```
delete(get(0,'children'));
clf;
%grafico delle linee di forza interne allo strato nel primo quadrante
a=0.7;
b=1;
r=b:-0.01:a;
mu=2;
gamma=(2.*mu+1).*(mu-1).*(b.^3-a.^3) ./((2.*mu+1).*(mu+2)-2.*a.^3./b.^3.*...
(mu-1).^2);
zita=(mu-1)./(2.*mu+1);
csi=1;
csi1=csi.*sqrt(b./(b.^3+2.*gamma)) ./sqrt(b./(b.^3-2.*zita.*a.^3))
y=csi1.*sqrt(r./(r.^3-2.*zita.*a.^3));
z=r.*sqrt(1-y.^2);
x=r.*y;
plot(z,x)
[z;x]'
axis([0,1,0,1])
```

```
%disegno del primo quadrante dello strato
x1=0:0.001:a;
z1=sqrt(a^2-x1.^2);
hold on
zoom
plot(z1,x1)
x2=0:0.001:b;
z2=sqrt(b^2-x2.^2);
hold on
zoom
plot(z2,x2)
```

Linee di forza del campo magnetico ( $\mu_r = 2, a = 0.7, b = 1$ )

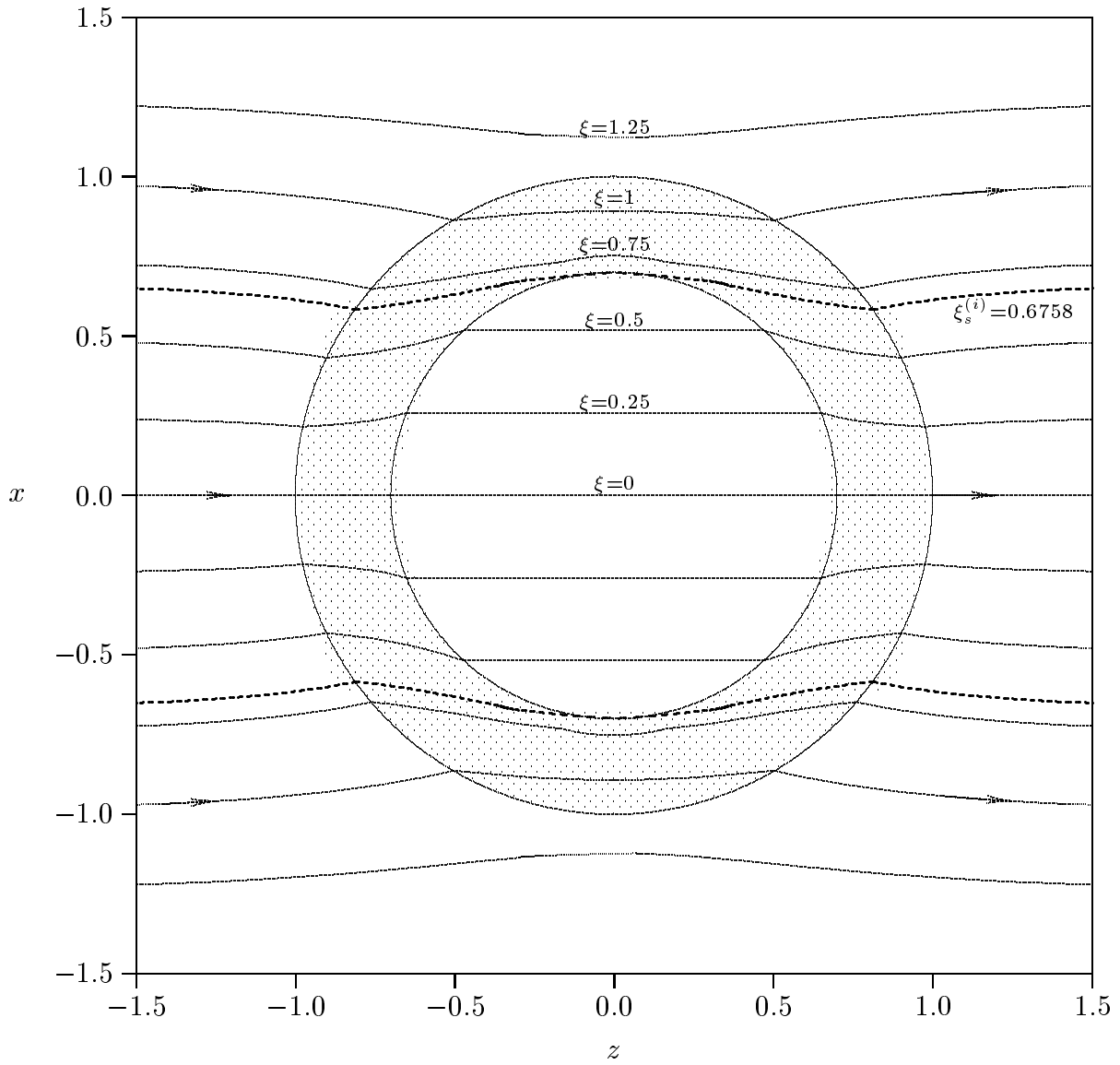


fig.19.8-4

**Linee di forza del campo magnetico ( $\mu_r = 20, a = 0.7, b = 1$ )**

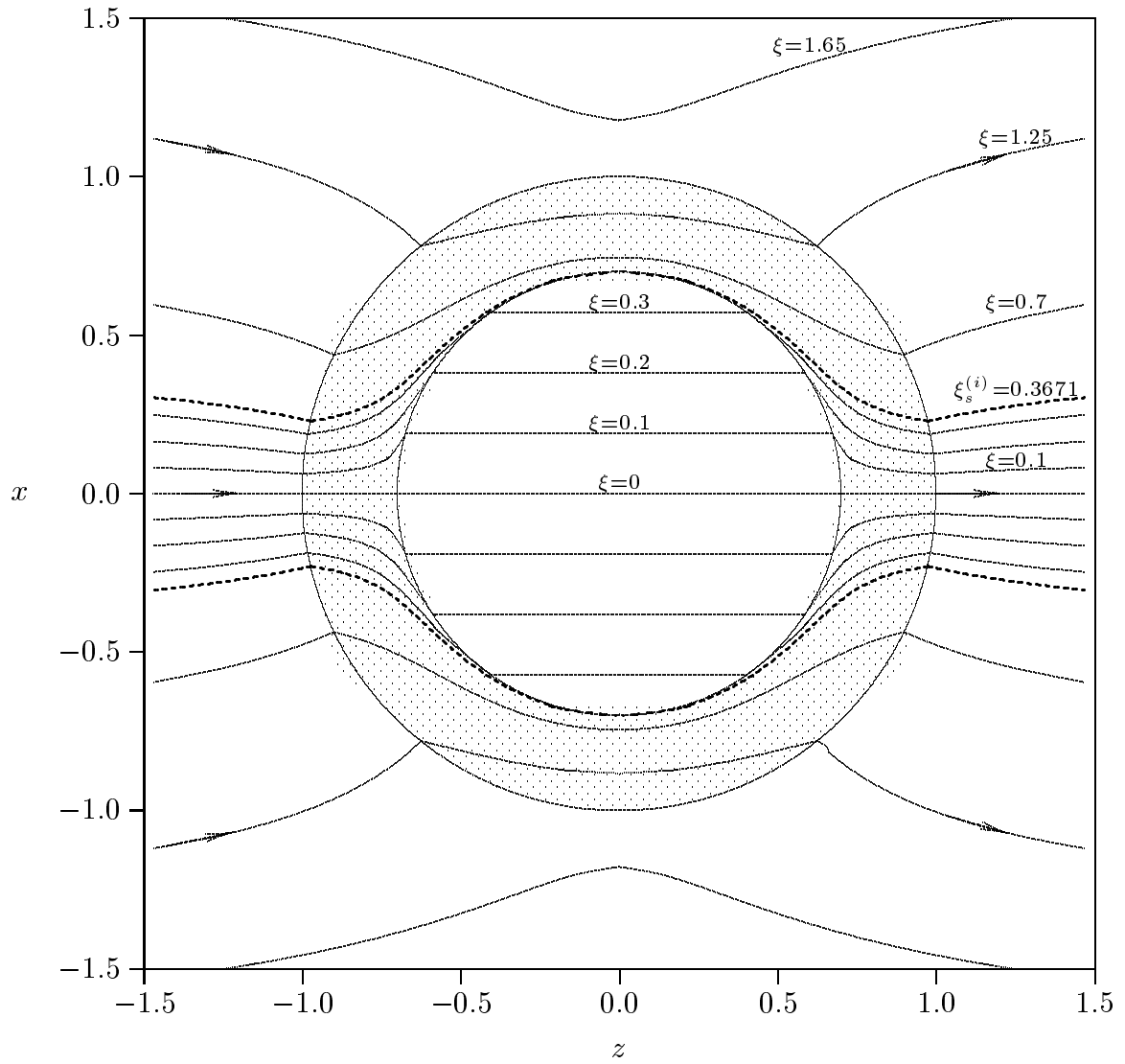


fig.19.8-5

### 19.9 - Teoria di Rayleigh sull'azzurro del cielo

Come applicazione del problema relativo alla sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme, trattiamo la teoria della diffusione della luce da parte delle molecole di gas, discussa quantitativamente per la prima volta da **Lord Rayleigh**† nel 1871 e nel 1899, per spiegare il fenomeno dell'azzurro del cielo. È importante ricordare che anche **Leonardo da Vinci** aveva capito gli aspetti essenziali di tale fenomeno nel 1500, effettuando esperimenti sulla diffusione della luce da parte di fumo di legna, anticipando così gli analoghi esperimenti effettuati da **Tyndall** intorno al 1870.

Consideriamo una molecola come una piccola sfera dielettrica di raggio  $a$  e costante dielettrica  $\epsilon$ , e supponiamo che essa venga irradiata da un'onda elettromagnetica piana il cui vettore campo elettrico é:

$$\vec{E}_i = E_0 \hat{z} e^{iky - i\omega t} \quad (19.9.1)$$

Nell'ipotesi che il raggio  $a$  della sfera sia molto piú piccolo della lunghezza d'onda della luce incidente, la fase dell'onda elettromagnetica  $e^{ik_{sfera}y}$  non varia in modo importante nei punti interni della sfera; pertanto si puó ritenere che la sfera stessa sia sottoposta ad un campo elettrico uniforme spazialmente come nel caso da noi già considerato.

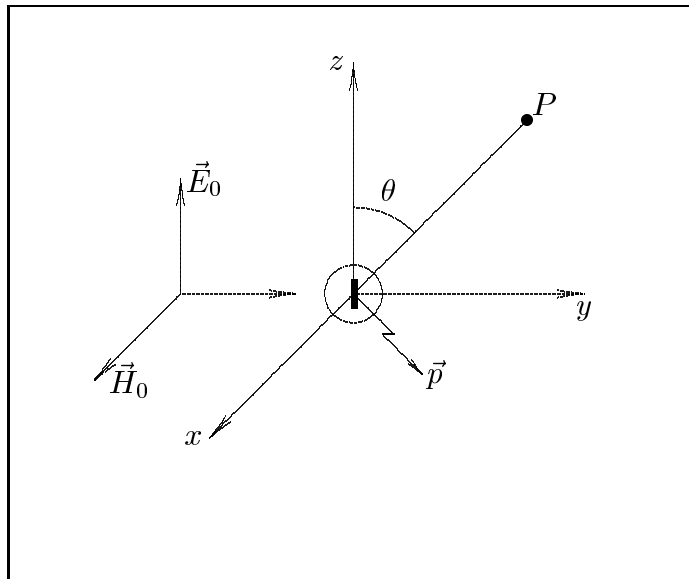


fig.19.9-1

Riprendiamo la formula (19.5.17) che esprime la funzione potenziale nei punti esterni

---

† John William Strutt, third Baron Rayleigh, (1842-1919): fisico inglese, insignito, nel 1904, del premio Nobel per la fisica per le sue ricerche sulla densità dei gas piú importanti e per la scoperta dell'argon.



alla sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme:

$$\Phi_{ext} = cost - E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 r^{-2} \cos \theta \quad (19.9.2)$$

Da questa formula si evince che il potenziale del campo elettrico che si stabilisce fuori della sfera é la somma del potenziale competente al campo uniforme preesistente e **di un potenziale di tipo dipolare** come si deduce dal terzo termine del secondo membro della (19.9.2).

Pertanto, segue che, una sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme si comporta come un dipolo elettrico statico.

Per calcolare tale momento di dipolo indotto basta eguagliare il terzo termine del secondo membro della (19.9.2) all'espressione generale del potenziale di un dipolo dato da:

$$\Phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (19.9.3)$$

Segue, pertanto, che il modulo del momento di dipolo indotto sulla sfera si ricava dalla equazione:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_{sfera} \cos \theta}{r^2} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 r^{-2} \cos \theta \quad (19.9.4)$$

da cui:

$$p_{sfera} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \quad (19.9.5)$$

Pertanto, nell'ipotesi che il centro della particella sferica si trovi nell'origine delle coordinate e, ponendo, in virtú dell'ipotesi  $a \ll \lambda$ ,  $y = 0$  nella (19.9.1), si ha per il momento di dipolo indotto da un'onda piana su una particella dielettrica di raggio molto piccolo rispetto alla lunghezza d'onda, la seguente espressione:

$$\vec{p}_{sfera} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \hat{z} e^{-i\omega t} \quad (19.9.6)$$

**La sfera dielettrica, irradiata da un'onda piana, si comporterá, pertanto, come un dipolo hertziano irradiante nello spazio un campo elettromagnetico che si sovrapporrá al campo dell'onda piana incidente.**

Tale campo di radiazione sará calcolato con le formule della teoria del dipolo hertziano, dopo aver legato la quantità  $Il$  che figura nell'espressione del campo elettrico emesso dal dipolo hertziano con il momento di dipolo della sferetta dato dalla (19.9.6).

Si ha l'equivalenza:

$$\vec{p}_{sfera} = ql\hat{z} \quad (19.9.7)$$

da cui

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dq}{dt} l\hat{z} \quad (19.9.8)$$

cioé

$$-i\omega\vec{p} = Il\hat{z} \quad (19.9.9)$$

Pertanto il campo emesso dalla sfera nella **far zone** é:

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\hat{e}_\theta \omega^2 p \mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta = -\hat{e}_\theta \omega^2 \mu_0 4\pi \epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta = \\ -\hat{e}_\theta k^2 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \frac{e^{ikr}}{r} \sin \theta \end{aligned} \quad (19.9.10)$$

Il campo magnetico diffuso dalla sfera dielettrica nella far zone é:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\hat{e}_\phi k \omega p \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta = -\hat{e}_\phi k^2 c p \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta = -\hat{e}_\phi k^2 c a^3 \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \frac{e^{ikr}}{r} \sin \theta \quad (19.9.11)$$

Il vettore di Poynting, mediato in un periodo, é reale ed é dato da:

$$\langle \vec{S} \rangle = \hat{e}_r \frac{k^4 c a^6 \epsilon_0}{2r^2} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 E_0^2 \sin^2 \theta \quad (19.9.12)$$

La potenza totale diffusa dalla sfera é:

$$P_{diff} = \frac{4}{3} \pi \frac{k^4}{Z} a^6 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 E_0^2 \quad (19.9.13)$$

É importante calcolare il rapporto fra la potenza totale diffusa dalla sfera e la densità di potenza dell'onda incidente; questo rapporto, che indichiamo con  $\sigma_d$  prende il nome di **sezione totale di diffusione** e si misura in  $m^2$ . Poiché:

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2Z} E_0^2 \quad (19.9.14)$$

é la densità di potenza, mediata in un periodo, dell'onda incidente, si ha:

$$\sigma_d = \frac{8}{3} \pi k^4 a^6 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 \quad (19.9.15)$$

Esprimendo la  $\sigma_d$  in funzione della lunghezza d'onda, si ha:

$$\sigma_d = \frac{128}{3} \pi^4 (\pi a^2) \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 \frac{a^4}{\lambda^4} \quad (19.9.16)$$

La formula (19.9.16) costituisce la **legge di Rayleigh**.

La dipendenza  $\frac{1}{\lambda^4}$  significa evidentemente che nel campo della luce visibile il rosso é la componente meno diffusa e il violetto la componente piú diffusa. La luce che si osserva in direzione diversa da quella del fascio incidente contiene una percentuale piú alta di componenti di alta frequenza (blu) rispetto alla composizione spettrale del fascio incidente, mentre il fascio trasmesso si arricchisce progressivamente di componenti rosse,

e contemporaneamente la sua intensità complessiva diminuisce. Il colore azzurro del cielo, il rosso del sole al tramonto, la fiocchezza del sole d'inverno e la facilità delle scottature d'estate sono tutte conseguenze della diffusione di Rayleigh della luce nell'atmosfera.

Infatti, la sezione di diffusione (19.9.16) rappresenta la potenza diffusa per molecola con un flusso unitario di energia incidente; nell'attraversare uno spessore  $dy$  del gas, la perdita percentuale di potenza è  $-N\sigma_d dy$ , essendo  $N$  il numero di molecole per unità di volume. Pertanto, l'intensità del fascio incidente diventa:

$$I(y) = I_0 e^{-N\sigma_d y} \quad (19.9.17)$$

Poiché l'indice di rifrazione dell'aria nel campo della luce visibile (4100 ÷ 6500) Å a T.P.N. è  $(n - 1) = 2.78 \cdot 10^{-4}$ , nell'ipotesi di un numero di molecole  $N = 2.69 \cdot 10^{19}$  molecole/cm<sup>3</sup>, valori tipici di coefficienti di attenuazione sono:

Colore	$N\sigma_d$ (cm <sup>-1</sup> )
Luce violetta ( $\lambda = 4100 \text{ \AA}$ )	$2.29 \cdot 10^{-11}$
Luce verde ( $\lambda = 5200 \text{ \AA}$ )	$8.86 \cdot 10^{-12}$
Luce rossa ( $\lambda = 6500 \text{ \AA}$ )	$3.63 \cdot 10^{-12}$

Sebbene i valori sopra riportati sono certamente molto approssimati, si vede subito come il coefficiente di attenuazione competente alla radiazione violetta è più grande di un fattore 10 rispetto alla radiazione rossa. Questo perché, ripetiamo, la luce violetta viene diffusa.

Usando un modello di atmosfera isoterma in cui la densità varia esponenzialmente con l'altezza (vedi profilo della ionosfera), si possono calcolare i seguenti rapporti fra l'intensità luminosa alla superficie della terra e quella incidente sull'atmosfera, con il sole allo zenith oppure all'alba o tramonto, per le tre lunghezze d'onda.

Colore	Zenith	Alba-tramonto
Rosso ( $\lambda = 6500 \text{ \AA}$ )	0.96	0.21
Verde ( $\lambda = 5200 \text{ \AA}$ )	0.90	0.024
Violetto ( $\lambda = 4100 \text{ \AA}$ )	0.76	0.000065

Questi numeri mettono in clamoroso rilievo lo spostamento verso il rosso della luce solare residua all'alba e al tramonto.