

Fibre ottiche e guide dielettriche

18.1 - Introduzione

Per la propagazione guidata di radiazione a frequenza nella gamma del visibile e del vicino infrarosso si può far uso delle **fibre ottiche**. Queste sono costituite da un materiale dielettrico filiforme, cioè sono di forma cilindrica rotonda e di lunghezza molto maggiore del diametro. Il loro indice di rifrazione varia in direzione radiale. Si distinguono, di solito, due classi di fibre: quelle il cui indice di rifrazione varia con continuità e quelle in cui la variazione dell'indice è discontinua.

Ci occuperemo essenzialmente di quest'ultima classe di fibre.

Lo schema più semplice adottato per questo tipo di fibre è quello di un cilindro dielettrico di indice di rifrazione n_1 circondato da un cilindro dielettrico concentrico di indice di rifrazione n_2 tali che:

$$n_1 > n_2 \quad (18.1.1)$$

Questo tipo di fibra è chiamata **fibra rivestita** (cladded fiber); il cilindro interno si chiama nucleo della fibra (core).

Sezione trasversale di fibra ottica cladded

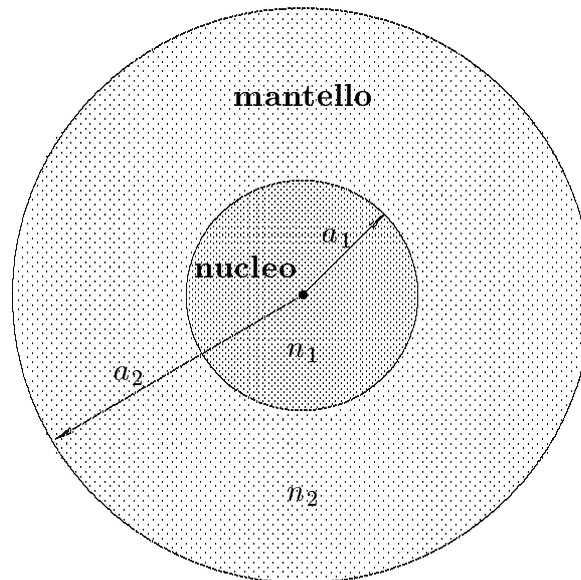


fig.18.1-1

La seconda regione dielettrica, con indice di rifrazione n_2 , non è essenziale per la propagazione guidata della luce. La fibra funzionerà da guida anche se $n_2 = 1$. Vi sono due motivi importanti che consigliano l'uso di una fibra ottica cladded piuttosto che una barra cilindrica dielettrica.

Il primo motivo é che i campi in una guida dielettrica non sono pienamente contenuti nel nucleo, ma si estendono leggermente al di fuori di esso, dove decadono con legge esponenziale. Poiché la fibra sicuramente viene sostenuta nello spazio, bisogna evitare effetti di diffusione e di distorsione del campo da parte dei meccanismi di supporto in contatto con il nucleo: questo si ottiene mediante il rivestimento dentro il quale il campo decade esponenzialmente cosicché all'esterno della fibra il campo é nullo.

La seconda ragione per usare fibre cladded deve essere ricercata nel meccanismo di guida dei campi nella fibra. Come vedremo in seguito, ad una data frequenza una fibra ottica é in grado di sostenere solo un numero finito di modi guidati, quelli la cui frequenza di taglio risulta inferiore alla frequenza data. Maggiore é il rapporto fra il raggio a_1 del nucleo interno della fibra e la lunghezza d'onda λ della radiazione guidata, maggiore é il numero di modi guidati possibili. Per trasmettere luce, é spesso desiderabile limitare il piú possibile il numero dei modi guidati: il funzionamento ad un solo modo é possibile purché il nucleo interno della guida abbia opportune dimensioni. Le dimensioni del nucleo che permettono operazioni a singolo modo, dipendono criticamente dal rapporto n_1/n_2 : maggiore é questo rapporto, minore deve essere a_1 per assicurare la propagazione a singolo modo. Dato che é difficile produrre fibre ottiche con un nucleo di diametro minore di 0.5μ , si preferisce evitare questo inconveniente facendo sí che il rapporto degli indici n_1/n_2 sia molto vicino all'unitá (cosa che non può essere ottenuta se é $n_2 = 1$). É allora possibile avere un diametro del nucleo molto maggiore (fino a parecchi micron) e nello stesso tempo un funzionamento a singolo modo della guida d'onda.

Le fibre ottiche hanno alcune caratteristiche in comune con le guide d'onda metalliche cave. Entrambe possono sostenere un numero finito di modi guidati per una data frequenza.

Entrambe presentano il problema della conversione di modo se la guida si allontana in qualunque maniera dalla perfetta geometria. Comunque, mentre guide d'onda metalliche possono sostenere solo modi guidati, e la conversione di modo é limitata allo scambio di potenza fra i finiti modi guidati, lo spettro dei modi delle guide dielettriche e fibre ottiche, oltre ad avere un finito numero di modi guidati, possiede anche un continuo di modi di radiazione non guidata.

Questi modi di radiazione sono legittime soluzioni delle equazioni di Maxwell che soddisfano le condizioni al contorno imposte sui campi dalla presenza dell'interfaccia dielettrica.

Tuttavia, mentre i modi guidati possono avere solo valori discreti delle loro costanti di propagazione, vi sono infiniti modi di radiazione con costanti di propagazione che formano uno spettro continuo. Deviazioni dalla perfetta geometria non solo convertono potenza fra i modi guidati della guida dielettrica ma anche trasferiscono potenza nello spettro continuo dei modi di radiazione.

Questa appare come radiazione all'uscita della guida dielettrica.

Discuteremo i modi delle guide dielettriche sulla base delle equazioni di Maxwell. Effetti di polarizzazione sono importanti per queste strutture e non possono essere ignorati. Conseguentemente non é ammissibile considerare i problemi dei modi guidati sulla base della equazione d'onda scalare. Il trattamento matematico dei modi guidati e di radiazione nelle fibre cilindriche é difficile ed ancora piú difficile é il trattamento della conversione dei modi.

Per questo, cominceremo a trattare le guide cilindriche per poi passare a fare lo studio completo nel caso di lastre dielettriche i cui risultati sono fisicamente gli stessi delle guide cilindriche ma la matematica é meno complessa.

18.2 - Modi guidati in fibre cilindriche rivestite

Per studiare i modi guidati in una fibra rivestita, possiamo supporre $a_2 \rightarrow \infty$. Assumiamo coordinate cilindriche e applichiamo le stesse equazioni che abbiamo utilizzato nel caso di guida circolare metallica. Calcoliamo, al solito, E_z e H_z e poi ricaviamo la \vec{E}_t e la \vec{H}_t dalle equazioni utilizzate per le guide metalliche.

Queste equazioni sono:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + h^2 E_z = 0 \quad (18.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + h^2 H_z = 0 \quad (18.2.2)$$

Notiamo subito che la (18.2.1) e la (18.2.2) sono sempre valide nel nostro caso in quanto, pur considerando regioni con diverso indice di rifrazione, le singole regioni sono mezzi omogenei.

Fattorizziamo la soluzione delle (18.2.1) e (18.2.2) come prodotto di due funzioni $F(r)$ e $G(\phi)$, per esse si ha:

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} + \left(h^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F(r) = 0 \quad (18.2.3)$$

$$\frac{d^2 G(\phi)}{d\phi^2} = -\nu^2 G(\phi) \quad (18.2.4)$$

L'equazione (18.2.4) ammette come soluzione:

$$G(\phi) = e^{i\nu\phi} \quad (18.2.5)$$

con ν intero $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (per quanto abbiamo già precedentemente detto).

Consideriamo l'equazione radiale in $F(r)$; come abbiamo già visto, una soluzione è la funzione di Bessel di ordine ν $J_\nu(x)$ con $x = hr$. Poiché dobbiamo descrivere il campo anche fuori dal core, abbiamo bisogno di un'altra soluzione indipendente della equazione radiale.

La soluzione $J_{-\nu}(x)$ è da scartare in quanto J_ν e $J_{-\nu}$ sono linearmente dipendenti, ossia: $J_\nu(x) = (-1)^\nu J_{-\nu}(x)$.

Si deve quindi ricorrere a qualche altro metodo per trovare una seconda soluzione. Per questo si considera la funzione di Bessel di seconda specie definita dalla relazione:

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)] \quad (18.2.6)$$

Questa viene chiamata, anche, funzione di Neumann.

Si può dimostrare che questa funzione è indipendente da $J_\nu(x)$ per ogni valore di ν ma per ν intero il secondo membro assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Il valore della funzione si può determinare col solito procedimento di derivare numeratore e denominatore rispetto

a ν e calcolare il limite per ν intero. L'espressione risultante é piuttosto complicata. Ci limitiamo qui a darne solo il primo termine valido in prossimitá dell'origine.

$$N_0(x) \simeq -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma_0 x} \quad (18.2.7)$$

$$N_n(x) \simeq -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (18.2.8)$$

dove $\gamma_0 = 1.78107$ e $|x| \ll 1$.

La proprietá caratteristica delle funzioni di Bessel di seconda specie é la loro singolaritá nell'origine. Poiché esse diventano infinite per $x = 0$, non si possono utilizzare per rappresentare campi finiti (e quindi fisicamente significanti) nell'intorno dell'origine e quindi nel nucleo della fibra.

Vediamo adesso di analizzare il comportamento delle funzioni di Bessel per x sufficientemente grande cioè il loro comportamento asintotico. Si ha:

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right) \quad (18.2.9)$$

$$N_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right) \quad (18.2.10)$$

per $|x| \gg 1$ e $|x| \gg \nu$.

Cosicché a distanze molto grandi dall'origine le funzioni cilindriche (la classe delle funzioni di Bessel) di prima e seconda specie si comportano come le funzioni seno e coseno, ma si attenuano al crescere di x come $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Per descrivere il campo fuori dal nucleo abbiamo bisogno di funzioni che decrescono con legge esponenziale.

Ci costruiamo, allora, una combinazione lineare delle soluzioni $J_\nu(x)$ e $N_\nu(x)$ per ottenere delle funzioni adatte al nostro caso.

Si definiscono quindi le funzioni di Bessel di terza specie, o funzioni di Hankel come vengono dette comunemente, mediante le relazioni:

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad (18.2.11)$$

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \quad (18.2.12)$$

Dalle formule precedenti si deduce che per valori molto grandi di x si può scrivere:

$$H_\nu^{(1)} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{+i \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right)} \quad (18.2.13)$$

$$H_\nu^{(2)} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right)} \quad (18.2.14)$$

per $|x| \gg 1$ e $|x| \gg \nu$.

Se x (cioé hr e quindi h) é reale le (18.2.13) ÷ (18.2.14) rappresentano onde viaggianti lungo la direzione positiva o negativa di r a seconda della nostra scelta nella dipendenza temporale $e^{\pm i\omega t}$.

Pertanto, poiché l'onda si perderebbe verso l'esterno del nucleo della fibra e non rimarrebbe guidata in esso, se vogliamo modi guidati dobbiamo imporre h immaginario.

Pertanto, in virtù del fondamentale teorema sulle onde guidate in guide metalliche, poniamo $h = i\gamma$.

In questo caso $H_\nu^{(1)}(i\gamma r)$ diventa proporzionale a $e^{-\gamma r}$ per grandi valori dello argomento, mentre $H_\nu^{(2)}(i\gamma r)$ diventa proporzionale a $e^{+\gamma r}$. É chiaro, quindi che solo $H_\nu^{(1)}(i\gamma r)$ col suo comportamento di decadere esponenzialmente é idonea a descrivere modi guidati lungo l'asse della fibra fuori dal core. $H_\nu^{(2)}(i\gamma r)$ deve essere scartata perché descrive campi che crescono esponenzialmente fuori dalla fibra.

Le funzioni J_ν , N_ν , $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$, o una loro qualunque combinazione sono dette funzioni cilindriche.

Riepilogando, possiamo affermare che ci necessitano soluzioni diverse a seconda che siamo nella regione interna al nucleo della fibra o in quella esterna.

18.3 - Soluzioni nel nucleo e nel mantello

Le soluzioni nel nucleo devono restare finite per $r = 0$ mentre le soluzioni nella regione del mantello devono decadere esponenzialmente lungo r se vogliamo trovare soluzioni per modi guidati lungo z .

Quindi per $r < a$ si ha:

$$E_z = A_\nu J_\nu(hr) e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.1)$$

$$H_z = B_\nu J_\nu(hr) e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.2)$$

Dalle (16.1.38) e (16.1.39) si ricava:

$$E_r = -\frac{i}{h^2} \left[\beta h A_\nu J'_\nu(hr) + i\omega\mu_0 \frac{\nu}{r} B_\nu J_\nu(hr) \right] e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.3)$$

$$E_\phi = -\frac{i}{h^2} \left[i\beta \frac{\nu}{r} A_\nu J_\nu(hr) - h\omega\mu_0 B_\nu J'_\nu(hr) \right] e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.4)$$

$$H_r = -\frac{i}{h^2} \left[-i\omega\epsilon_1 \frac{\nu}{r} A_\nu J_\nu(hr) + h\beta B_\nu J'_\nu(hr) \right] e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.5)$$

$$H_\phi = -\frac{i}{h^2} \left[h\omega\epsilon_1 A_\nu J'_\nu(hr) + i\beta \frac{\nu}{r} B_\nu J_\nu(hr) \right] e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.6)$$

dove $J'_\nu(hr)$ indica la derivata prima della funzione di Bessel J_ν rispetto ad hr .

La relazione fra l'autovalore h e la costante di propagazione β é:

$$h^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - \beta^2 \quad (18.3.7)$$

Posto $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_0$ si ha:

$$h^2 = k_1^2 - \beta^2 \quad (18.3.8)$$

La costante dielettrica del core é correlata all'indice di rifrazione dall'equazione:

$$n_1^2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \quad (18.3.9)$$

Le componenti del campo nel mantello, cioé per $r > a$, sono date da:

$$E_z = C_\nu H_\nu^{(1)}(i\gamma r) e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.10)$$

$$H_z = D_\nu H_\nu^{(1)}(i\gamma r) e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.11)$$

Dalle (16.1.38) e (16.1.39) si ricava:

$$E_r = -\frac{1}{\gamma^2} \left[\beta\gamma C_\nu H_\nu^{(1)'}(i\gamma r) + \omega\mu_0 \frac{\nu}{r} D_\nu H_\nu^{(1)}(i\gamma r) \right] e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.12)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{\gamma^2} \left[\beta \frac{\nu}{r} C_\nu H_\nu^{(1)}(i\gamma r) - \gamma\omega\mu_0 D_\nu H_\nu^{(1)'}(i\gamma r) \right] e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.13)$$

$$H_r = -\frac{1}{\gamma^2} \left[-\omega\epsilon_2 \frac{\nu}{r} C_\nu H_\nu^{(1)}(i\gamma r) + \gamma\beta D_\nu H_\nu^{(1)'}(i\gamma r) \right] e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.14)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{\gamma^2} \left[\gamma\omega\epsilon_2 C_\nu H_\nu^{(1)'}(i\gamma r) + \beta \frac{\nu}{r} D_\nu H_\nu^{(1)}(i\gamma r) \right] e^{i\nu\phi} e^{-i\beta z} \quad (18.3.15)$$

Si noti che in tutte le formule delle componenti dei campi é stato omesso il fattore $e^{i\omega t}$.

La relazione fra γ , β e $k_2^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_0$ é data da:

$$\gamma^2 = \beta^2 - k_2^2 \quad (18.3.16)$$

18.4 - Condizioni al contorno ed equazione di dispersione

Perché il problema sia univocamente determinato dobbiamo trovare le costanti A_ν , B_ν , C_ν , D_ν e gli autovalori h e γ per determinare la costante di propagazione β .

Per questo dobbiamo imporre le condizioni al contorno per i campi sulla superficie di separazione fra il nucleo e il mantello.

Poiché delle quattro costanti solo tre devono essere determinate in quanto una, per esempio A , dipende dalla sorgente, abbiamo bisogno di quattro equazioni che costruiamo imponendo le condizioni al contorno soltanto sulle componenti tangenti alla superficie, cioé: E_z , H_z , E_ϕ , H_ϕ .

Per quanto sappiamo deve esserci continuità fra queste componenti quando si passa dal nucleo al mantello, cioé deve essere:

$$A_\nu J_\nu(ha) - C_\nu H_\nu^{(1)}(i\gamma a) = 0 \quad (18.4.1)$$

$$\frac{\beta}{h^2} \frac{\nu}{a} A_\nu J_\nu(ha) + i \frac{\omega\mu_0}{h} B_\nu J_\nu'(ha) + \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{\nu}{a} C_\nu H_\nu^{(1)}(i\gamma a) - \frac{\omega\mu_0}{\gamma} D_\nu H_\nu^{(1)'}(i\gamma a) = 0 \quad (18.4.2)$$

$$B_\nu J_\nu(ha) - D_\nu H_\nu^{(1)}(i\gamma a) = 0 \quad (18.4.3)$$

$$-i \frac{\omega\epsilon_1}{h} A_\nu J_\nu'(ha) + \frac{\beta}{h^2} \frac{\nu}{a} B_\nu J_\nu(ha) + \frac{\omega\epsilon_2}{\gamma} C_\nu H_\nu^{(1)'}(i\gamma a) + \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{\nu}{a} D_\nu H_\nu^{(1)}(i\gamma a) = 0 \quad (18.4.4)$$

Il sistema (18.4.1) ÷ (18.4.4) é un sistema di equazioni omogenee nelle incognite A_ν , B_ν , C_ν e D_ν . Esso può essere ridotto ad un sistema di due equazioni sostituendo nella (18.4.2) e nella (18.4.4) le incognite C_ν e D_ν ricavate dalla (18.4.1) e dalla (18.4.3) rispettivamente, ossia:

$$C_\nu = \frac{J_\nu(ha)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} A_\nu \quad (18.4.5)$$

$$D_\nu = \frac{J_\nu(ha)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} B_\nu \quad (18.4.6)$$

Si ottengono quindi le seguenti due equazioni nelle incognite A_ν e B_ν :

$$\frac{\beta\nu}{a} A_\nu \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) + i\omega B_\nu \left(\frac{\mu_0}{h} \frac{J'_\nu(ha)}{J_\nu(ha)} + i \frac{\mu_0}{\gamma} \frac{H_\nu^{(1)'}(i\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} \right) = 0 \quad (18.4.7)$$

$$-i\omega A_\nu \left(\frac{\epsilon_1}{h} \frac{J'_\nu(ha)}{J_\nu(ha)} + i \frac{\epsilon_2}{\gamma} \frac{H_\nu^{(1)'}(i\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} \right) + \frac{\beta\nu}{a} B_\nu \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) = 0 \quad (18.4.8)$$

Il sistema di equazioni (18.4.7) e (18.4.8) ammette soluzioni diverse da quella banale se il determinante dei coefficienti é nullo, ossia se:

$$\omega^2 \left(\frac{\mu_0}{h} \frac{J'_\nu(ha)}{J_\nu(ha)} + i \frac{\mu_0}{\gamma} \frac{H_\nu^{(1)'}(i\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} \right) \left(\frac{\epsilon_1}{h} \frac{J'_\nu(ha)}{J_\nu(ha)} + i \frac{\epsilon_2}{\gamma} \frac{H_\nu^{(1)'}(i\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} \right) = \frac{\beta^2 \nu^2}{a^2} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 \quad (18.4.9)$$

che, mettendo in evidenza μ_0 e ϵ_2 , si può scrivere:

$$\omega^2 \mu_0 \epsilon_2 \left(\frac{1}{h} \frac{J'_\nu(ha)}{J_\nu(ha)} + i \frac{1}{\gamma} \frac{H_\nu^{(1)'}(i\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} \right) \left(\frac{\epsilon_1}{h} \frac{J'_\nu(ha)}{J_\nu(ha)} + i \frac{1}{\gamma} \frac{H_\nu^{(1)'}(i\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} \right) = \frac{\beta^2 \nu^2}{a^2 \gamma^4} \left(1 + \frac{\gamma^2}{h^2} \right)^2 \quad (18.4.10)$$

D'altra parte, per la (18.3.8) e per la (18.3.16), si ha:

$$\gamma^2 + h^2 = h^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{h^2} \right) = k_1^2 - k_2^2 = \omega^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \mu_0 = \omega^2 \epsilon_2 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 \right) \mu_0 \quad (18.4.11)$$

Sostituendo la (18.4.11) nella (18.4.10) dopo aver moltiplicato entrambi i membri per $a^2 \gamma^4$ e diviso per $k_2^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_0$, si ha finalmente l'equazione di dispersione:

$$\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{a\gamma^2}{h} \frac{J'_\nu(ha)}{J_\nu(ha)} + i\gamma a \frac{H_\nu^{(1)'}(i\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} \right) \left(\frac{a\gamma^2}{h} \frac{J'_\nu(ha)}{J_\nu(ha)} + i\gamma a \frac{H_\nu^{(1)'}(i\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} \right) = \left[\nu \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 \right) \frac{\beta k_2}{h^2} \right]^2 \quad (18.4.12)$$

Dalla equazione (18.4.7) o (18.4.8) si ricava:

$$B_\nu = \frac{i}{\nu} ah\gamma \frac{\epsilon_1 \gamma J'_\nu(ha) H_\nu^{(1)}(i\gamma a) + i\epsilon_2 h J_\nu(ha) H_\nu^{(1)'}(i\gamma a)}{\omega(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mu_0 \beta J_\nu(ha) H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} A_\nu \quad (18.4.13)$$

che insieme alle equazioni (18.4.5) e (18.4.6) fornisce i valori delle ampiezze dei campi in funzione dell'ampiezza A_ν predeterminata.

18.5 - Modi TE e modi TM

Se esaminiamo il sistema di equazioni (18.4.1) ÷ (18.4.4) osserviamo che se ν è diverso da zero, non è possibile che sia nulla una componente del campo nella direzione di propagazione.

Infatti, se fosse $E_z = 0$ significa porre $A_\nu = 0$ e quindi dalla (18.4.1) $C_\nu = 0$; le rimanenti equazioni sono incompatibili.

Questo significa che salvo il caso $\nu = 0$, da trattarsi a parte, nella guida ottica circolare non possono propagarsi onde solo di tipo *TE* o onde solo di tipo *TM*.

Esaminiamo il caso $\nu = 0$

Posto $\nu = 0$, le equazioni (18.4.1) ÷ (18.4.4) diventano:

$$A_0 J_0(ha) - C_0 H_0^{(1)}(i\gamma a) = 0 \quad (18.5.1)$$

$$i \frac{\omega\mu_0}{h} B_0 J'_0(ha) - \frac{\omega\mu_0}{\gamma} D_0 H_0^{(1)'}(i\gamma a) = 0 \quad (18.5.2)$$

$$B_0 J_0(ha) - D_0 H_0^{(1)}(i\gamma a) = 0 \quad (18.5.3)$$

$$-i \frac{\omega\epsilon_1}{h} A_0 J'_0(ha) + \frac{\omega\epsilon_2}{\gamma} C_0 H_0^{(1)'}(i\gamma a) = 0 \quad (18.5.4)$$

Consideriamo il modo *TE* cioè poniamo $A_0 = 0$ e quindi $C_0 = 0$. Perché il sistema (18.5.1) ÷ (18.5.4) possa ammettere soluzioni deve essere:

$$\frac{i\omega\mu_0}{h} \frac{J'_0(ha)}{J_0(ha)} = \frac{\omega\mu_0}{\gamma} \frac{H_0^{(1)'}(i\gamma a)}{H_0^{(1)}(i\gamma a)} \quad \text{Modo TE} \quad (18.5.5)$$

Poiché sappiamo che per una qualsiasi soluzione della equazione di Bessel vale:

$$\frac{dZ_\nu(\rho)}{d\rho} = \frac{\nu}{\rho} Z_\nu(\rho) - Z_{\nu+1}(\rho) \quad (18.5.6)$$

Ne segue:

$$Z'_0(\rho) = -Z_1(\rho) \quad (18.5.7)$$

Quindi l'equazione di dispersione per il modo *TE* è:

$$\frac{\gamma}{h} \frac{J_1(ha)}{J_0(ha)} + i \frac{H_1^{(1)}(i\gamma a)}{H_0^{(1)}(i\gamma a)} = 0 \quad \text{Modo TE} \quad (18.5.8)$$

Analogamente posto nelle (18.5.1) ÷ (18.5.4) $D_0 = B_0 = 0$ ($H_z = 0$), si ha:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\gamma}{h} \frac{J_1(ha)}{J_0(ha)} + i \frac{H_1^{(1)}(i\gamma a)}{H_0^{(1)}(i\gamma a)} = 0 \quad \text{Modo TM} \quad (18.5.9)$$

La (18.5.8) e la (18.5.9) rappresentano le equazioni di dispersione nel caso di modo TE e TM rispettivamente, corrispondenti a $\nu = 0$.

Per $\nu \neq 0$ abbiamo modi che hanno $E_z \neq 0$ e $H_z \neq 0$.

Questi modi verranno indicati con la sigla $(EH)_{\nu r}$ o $(HE)_{\nu r}$.

18.6 - Frequenza di cutoff

Riscriviamo l'equazione del campo fuori dal nucleo della fibra.

Esso é descritto dalla funzione:

$$H_\nu^{(1)}(i\gamma r) = \sqrt{\frac{2}{\pi i \gamma r}} e^{-i\left(\pi \frac{\nu}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{-\gamma r} \quad \gamma r \gg 1 \quad (18.6.1)$$

É chiaro che per grandi valori di γ il campo é concentrato dentro il nucleo della fibra.

Al diminuire di γ il campo si estende nello spazio fuori dal nucleo. Per $\gamma = 0$ il campo é tutto fuori e non abbiamo piú campo dentro la guida.

La frequenza per cui questo accade é chiamata frequenza di cutoff che si ottiene dall'equazione:

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} = 0 \quad (18.6.2)$$

dove la costante β deve anche soddisfare la relazione:

$$h^2 = k_1^2 - \beta^2 \quad (18.6.3)$$

Per ottenere h bisogna risolvere l'equazione di dispersione al cutoff, cioé imponendo nella (18.4.12) $\gamma = 0$.

La soluzione dell'equazione di dispersione al cutoff può essere ottenuta da un procedimento dimostrato da **Schlesinger, Diamant e Vigants**. Si può dimostrare, infatti, che introducendo le seguenti abbreviazioni:

$$J^+ = \frac{1}{ha} \frac{J_{\nu+1}(ha)}{J_\nu(ha)} \quad (18.6.4)$$

$$J^- = \frac{1}{ha} \frac{J_{\nu-1}(ha)}{J_\nu(ha)} \quad (18.6.5)$$

$$H^+ = \frac{1}{i\gamma a} \frac{H_{\nu+1}^{(1)}(i\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(i\gamma a)} \quad (18.6.6)$$

$$H^- = \frac{1}{i\gamma a} \frac{H_{\nu-1}^{(1)}(i\gamma a)}{H_{\nu}^{(1)}(i\gamma a)} \quad (18.6.7)$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (18.6.8)$$

l'equazione di dispersione (18.4.12) si può scrivere:

$$(\epsilon J^- - H^-) (J^+ - H^+) + (\epsilon J^+ - H^+) (J^- - H^-) = 0 \quad (18.6.9)$$

Per risolvere la (18.6.9) al cutoff cioè per $\gamma = 0$ é sufficiente inserire in essa l' approssimazione delle funzioni J^+ , J^- , H^+ e H^- per piccoli argomenti e risolverla per $\gamma = 0$.

Si ha:

$$H_0^{(1)}(i\gamma a) \simeq \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\Gamma\gamma a}{2} \quad (\gamma a \ll 1) \text{ e } \Gamma = 1.781672 \quad (18.6.10)$$

$$H_{\nu}^{(1)}(i\gamma a) \simeq -\frac{i(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{i\gamma a}\right)^{\nu} \quad (\gamma a \ll 1) \text{ per } \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (18.6.11)$$

$$H^+ = -\frac{2\nu}{(a\gamma)^2} \quad \text{per } \nu = 1, 2, 3, \dots \text{ e } a\gamma \ll 1 \quad (18.6.12)$$

$$H^- = \frac{1}{2(\nu-1)} \quad \text{per } \nu = 2, 3, \dots \text{ e } a\gamma \ll 1 \quad (18.6.13)$$

$$H^- = -\ln \frac{\Gamma\gamma a}{2} \quad \text{per } \nu = 1 \text{ e } a\gamma \ll 1 \quad (18.6.14)$$

Sostituendo la H^+ nella (18.6.9) dopo aver sostituito a J^+ e J^- le loro definizioni, si ha:

$$(\epsilon J_{\nu-1} - haH^- J_{\nu}) (a^2\gamma^2 J_{\nu+1}(ha) + 2\nu haJ_{\nu}) + (\epsilon a^2\gamma^2 J_{\nu+1} + 2\nu haJ_{\nu}) (J_{\nu-1} - haH^- J_{\nu}) = 0 \quad (18.6.15)$$

Al tendere di $\gamma \rightarrow 0$ distinguiamo due casi: $\nu = 1$ e $\nu > 1$.

Caso $\nu = 1$

La (18.6.15) per $\nu = 1$ e $\gamma \rightarrow 0$ si riduce a:

$$(\epsilon J_0 - haH^- J_1) 2haJ_1 + 2haJ_1 (J_0 - haH^- J_1) = 0 \quad (18.6.16)$$

che si può scrivere:

$$2haJ_1(ha) \left[J_0(\epsilon + 1) + 2haJ_1 \ln \frac{\Gamma\gamma a}{2} \right] = 0 \quad (18.6.17)$$

la cui soluzione per $\gamma \rightarrow 0$ é:

$$J_1(ha) = 0 \quad (18.6.18)$$

che ammette come soluzioni:

$$ha = x_{1r} \quad \text{compresa la } x_{11} = 0 \text{ cioè } h = 0 \quad (18.6.19)$$

Caso $\nu > 1$

La (18.6.15) per $\nu > 1$ e $\gamma \rightarrow 0$ si riduce a:

$$(\epsilon J_{\nu-1} - haH^- J_\nu) 2\nu ha J_\nu + 2\nu ha J_\nu (J_{\nu-1} - haH^- J_\nu) = 0 \quad (18.6.20)$$

$$J_\nu(ha) \left[(\epsilon + 1) J_{\nu-1}(ha) - \frac{ha}{\nu - 1} J_\nu(ha) \right] = 0 \quad (18.6.21)$$

che ammette due soluzioni:

$$J_\nu(ha) = 0 \quad \text{per } ha \neq 0 \text{ e } \nu = 2, 3, 4.. \quad (18.6.22)$$

e

$$(\epsilon + 1) J_{\nu-1}(ha) = \frac{ha}{\nu - 1} J_\nu(ha) \quad \nu = 2, 3, 4.. \quad (18.6.23)$$

È importante osservare che nella (18.6.22) la soluzione $ha = 0$ è da escludere in quanto essa non soddisfa l'equazione (18.4.9).

Caso $\nu = 0$

L'equazione di dispersione per $\nu = 0$ (modi *TE* e *TM*) e piccoli valori di γ è:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\gamma}{h} \frac{J_1(ha)}{J_0(ha)} + i \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{H_1^{(1)}(i\gamma a)}{H_0^{(1)}(i\gamma a)} = 0 \quad \text{modo } TM \quad (18.6.24)$$

cioè:

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{h}{\gamma} \frac{J_0(ha)}{J_1(ha)} = -\gamma a \ln \frac{2}{\Gamma \gamma a} \quad (18.6.25)$$

la cui soluzione per $\gamma a \rightarrow 0$ è $J_0(ha) = 0$, in quanto $\lim_{\gamma a \rightarrow 0} \gamma a \ln \frac{2}{\Gamma \gamma a} = 0$, che è analoga per i modi *TE*.

Effettuiamo, ora, il calcolo esplicito della frequenza di cutoff.

Dalla (18.6.2) e dalla (18.6.3) si ha al cutoff:

$$h_c^2 = \omega_c^2 \epsilon_1 \mu_0 - \beta_c^2 \quad \text{e} \quad \beta_c^2 = \omega_c^2 \epsilon_2 \mu_0 \quad (18.6.26)$$

da cui:

$$h_c^2 = \omega_c^2 \epsilon_1 \mu_0 - \omega_c^2 \epsilon_2 \mu_0 \quad (18.6.27)$$

e quindi:

$$\omega_c^2 = \frac{h_c^2}{\mu_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \quad \text{ossia} \quad f_c = \frac{h_c}{2\pi \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mu_0}} \quad (18.6.28)$$

Sostituendo nella (18.6.28) il valore di h_c trovato si ottiene la frequenza di cutoff f_c .

Riepiloghiamo le soluzioni di cutoff dei modi guidati:

$$1) \quad HE_{11} \quad h_c a = 0 \quad \nu = 1 \quad r = 1 \quad (18.6.29)$$

$$2) \quad HE_{1r} \quad h_c a = x_{1r} \quad \nu = 1 \quad r > 1 \quad (18.6.30)$$

$$3) \quad EH_{\nu r} \quad h_c a = x_{\nu r} \quad \nu = 2, 3, \dots \quad r > 1 \quad (18.6.31)$$

$$4) \quad HE_{\nu r} \quad (\epsilon + 1)J_{\nu-1}(ha) = \frac{ah}{\nu-1}J_{\nu}(ha) \text{ per } \nu = 2, 3, 4 \dots \text{ e } ha \neq 0 \quad (18.6.32)$$

Il piú importante risultato della nostra indagine é il fatto che vi é un modo la cui frequenza di cutoff é zero. Solo il modo di ordine piú basso $\nu = 1$ ha un valore nullo di h e conseguentemente una frequenza di cutoff $f_c = 0$. Questo modo può cosí esistere a qualunque frequenza e per qualunque diametro delle fibra.

La seguente tabella fornisce i valori di $x_{\nu r}$:

ν	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	
0	2.405	5.52	8.654	<i>TE, TM</i>
1	0	3.832	7.016	<i>HE</i>
2	2.445	5.538	8.665	<i>HE</i> $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 1.1$
2	5.135	8.417	11.620	<i>EH</i>

Il solo modo che si propaga con frequenza di cutoff nulla é il modo HE_{11} .

Il modo che ha frequenza di cutoff piú bassa é il modo TE_{01} o TM_{01} .

Pertanto l'intervallo di frequenza per operazione a singolo modo é dato da:

$$0 < f < \frac{2.405}{2\pi a \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mu_0}} = f_{c01} \quad (18.6.33)$$

A titolo di esempio, consideriamo una fibra che abbia i seguenti parametri:

$$a = 1\mu, \quad \epsilon_{r1} = 1.5, \quad \epsilon_{r2} = 1.36, \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 1.1, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}, \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \quad (18.6.34)$$

da cui, si ha:

$$f_{c01} = 3.068 \cdot 10^{14} Hz \quad (18.6.35)$$

Ricordiamo che il rosso del laser Helio Neon ha una frequenza di: $4.74 \cdot 10^{14} Hz$.

Appendice al Cap. 18

18A.1 - Trasformazione dell'equazione di dispersione

Per trasformare l'equazione di dispersione in una forma utile per il calcolo della frequenza di cut-off, introduciamo, come abbiamo detto, le seguenti posizioni:

$$J^+ = \frac{1}{ha} \frac{J_{\nu+1}(ha)}{J_{\nu}(ha)} \quad (18A.1.1)$$

$$J^- = \frac{1}{ha} \frac{J_{\nu-1}(ha)}{J_{\nu}(ha)} \quad (18A.1.2)$$

$$H^+ = \frac{1}{i\gamma a} \frac{H_{\nu+1}^{(1)}(i\gamma a)}{H_{\nu}^{(1)}(i\gamma a)} \quad (18A.1.3)$$

$$H^- = \frac{1}{i\gamma a} \frac{H_{\nu-1}^{(1)}(i\gamma a)}{H_{\nu}^{(1)}(i\gamma a)} \quad (18A.1.4)$$

e le seguenti formule ricorrenti per tutte le funzioni cilindriche (vedi Abramowitz, Handbook of mathematical functions, pag. 361):

$$Z'_{\nu} = \frac{1}{2} (Z_{\nu-1} - Z_{\nu+1}) \quad (18A.1.5)$$

$$Z_{\nu-1} + Z_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} Z_{\nu} \quad (18A.1.6)$$

essendo x l'argomento della funzione Z , nonché $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$.

Applicando la (18A.1.5) possiamo scrivere:

$$J'_{\nu}(ha) = \frac{1}{2} (J_{\nu-1}(ha) - J_{\nu+1}(ha)) \quad (18A.1.7)$$

$$H'_{\nu}^{(1)}(i\gamma a) = \frac{1}{2} [H_{\nu-1}^{(1)}(i\gamma a) - H_{\nu+1}^{(1)}(i\gamma a)] \quad (18A.1.8)$$

che sostituite nella (18.4.12), insieme alle posizioni (18A.1.1) ÷ (18A.1.4), comporta:

$$\begin{aligned} & \left[\epsilon \frac{a\gamma^2}{h} \frac{1}{2} ha (J^- - J^+) + i\gamma a \frac{1}{2} i\gamma a (H^- - H^+) \right] \cdot \\ & \cdot \left[\frac{a\gamma^2}{h} \frac{1}{2} ha (J^- - J^+) + i\gamma a \frac{1}{2} i\gamma a (H^- - H^+) \right] = \frac{\nu^2 \beta^2 k_2^2}{h^4} (\epsilon - 1)^2 \end{aligned} \quad (18A.1.9)$$

che si può ancora scrivere:

$$[\epsilon (J^- - J^+) - (H^- - H^+)] [(J^- - J^+) - (H^- - H^+)] = \frac{4\nu^2 \beta^2 k_2^2}{a^4 \gamma^4 h^4} (\epsilon - 1)^2 \quad (18A.1.10)$$

Raggruppando i termini, si ha:

$$[(\epsilon J^- - H^-) - (\epsilon J^+ - H^+)] [(J^- - H^-) - (J^+ - H^+)] = \frac{4\nu^2 \beta^2 k_2^2}{a^4 \gamma^4 h^4} (\epsilon - 1)^2 \quad (18A.1.11)$$

e ancora:

$$\begin{aligned} & (\epsilon J^- - H^-) (J^- - H^-) - (\epsilon J^- - H^-) (J^+ - H^+) - (\epsilon J^+ - H^+) (J^- - H^-) + \\ & + (\epsilon J^+ - H^+) (J^+ - H^+) = \frac{4\nu^2 \beta^2 k_2^2}{a^4 \gamma^4 h^4} (\epsilon - 1)^2 \end{aligned} \quad (18A.1.12)$$

Consideriamo, ora, l'equazione (18A.1.6); essa comporta:

$$J^- + J^+ = \frac{2\nu}{(ha)^2} \quad (18A.1.13)$$

$$H^- + H^+ = \frac{2\nu}{(i\gamma a)^2} \quad (18A.1.14)$$

Sottraiamo la (18A.1.14) dalla (18A.1.13):

$$(J^+ - H^+) + (J^- - H^-) = \frac{2\nu}{a^2} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (18A.1.15)$$

Moltiplichiamo la (18A.1.13) per ϵ e sottraiamo da essa la (18A.1.14), si ha:

$$(\epsilon J^+ - H^+) + (\epsilon J^- - H^-) = \frac{2\nu}{a^2} \left(\frac{\epsilon}{h^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (18A.1.16)$$

Moltiplicando ciascun membro dell'equazione (18A.1.15) per il corrispondente membro dell'equazione (18A.1.16), si ha:

$$\begin{aligned} & (\epsilon J^+ - H^+) (J^+ - H^+) + (\epsilon J^+ - H^+) (J^- - H^-) + \\ & + (\epsilon J^- - H^-) (J^+ - H^+) + (\epsilon J^- - H^-) (J^- - H^-) = \\ & = \frac{4\nu^2}{a^4} \left(\frac{\epsilon}{h^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right] = \frac{4\nu^2}{a^4 h^4 \gamma^4} (\epsilon \gamma^2 + h^2) (\gamma^2 + h^2) \end{aligned} \quad (18A.1.17)$$

Ricordando che $\gamma^2 = \beta^2 - k_2^2$ e $h^2 = k_1^2 - \beta^2$, si ha:

$$\epsilon \gamma^2 + h^2 = \epsilon \beta^2 - \epsilon k_2^2 + k_1^2 - \beta^2 = (\epsilon - 1) \beta^2 \quad (18A.1.18)$$

in quanto $-\epsilon k_2^2 = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 = -\epsilon_1 \omega^2 \mu_0 = -k_1^2$ e, dalla (18.4.11):

$$h^2 + \gamma^2 = (\epsilon - 1) k_2^2 \quad (18A.1.19)$$

Sostituendo le espressioni (18A.1.18) e (18A.1.19), la (18A.1.17) si scrive:

$$\begin{aligned}
 & (\epsilon J^+ - H^+) (J^+ - H^+) + (\epsilon J^+ - H^+) (J^- - H^-) + \\
 & + (\epsilon J^- - H^-) (J^+ - H^+) + (\epsilon J^- - H^-) (J^- - H^-) = \\
 & = \frac{4\nu^2 \beta^2 k_2^2}{a^4 h^4 \gamma^4} (\epsilon - 1)^2
 \end{aligned} \tag{18A.1.20}$$

e ancora:

$$\begin{aligned}
 & (\epsilon J^+ - H^+) (J^+ - H^+) + (\epsilon J^- - H^-) (J^- - H^-) = \\
 & = - (\epsilon J^+ - H^+) (J^- - H^-) - (\epsilon J^- - H^-) (J^+ - H^+) + \\
 & + \frac{4\nu^2 \beta^2 k_2^2}{a^4 h^4 \gamma^4} (\epsilon - 1)^2
 \end{aligned} \tag{18A.1.21}$$

Sostituendo la (18A.1.21) nella (18A.1.12), si ottiene la formula finale:

$$(\epsilon J^+ - H^+) (J^- - H^-) + (\epsilon J^- - H^-) (J^+ - H^+) = 0 \tag{18A.1.22}$$