

Teoria dei sistemi di antenne rettilinee

Una grande varietà di diagrammi di radiazione può essere realizzata ordinando nello spazio un insieme di antenne operanti alla stessa frequenza. I campi irradiati dalle singole antenne interferiscono costruttivamente in certe direzioni e distruttivamente in altre, e così **producono un diagramma di radiazione direzionale**.

La conoscenza della posizione di ciascuna antenna, l'orientazione e la distribuzione di corrente, insieme ad una completa descrizione delle sorgenti monocromatiche di corrente, determina univocamente il diagramma di radiazione risultante. Il problema inverso di trovare un insieme di antenne che produrrebbero un diagramma di radiazione assegnato non ha una soluzione unica.

Un importante esempio di tale insieme di antenne è la configurazione che in inglese prende il nome di **array** ed in italiano di **schiera** o **cortina**, che per definizione è composto di un numero finito di antenne identiche, identicamente orientate, ed eccitate in modo tale che le distribuzioni di corrente sulle singole antenne sono le stesse in forma ma possono differire in fase ed ampiezza.

Segue da questa definizione che il diagramma di radiazione di un array è sempre il prodotto di due funzioni, una rappresentante il diagramma di radiazione di una singola antenna nell'array e l'altra chiamata **array factor** o **fattore spaziale**, che può essere interpretata come il diagramma di radiazione di un simile sistema di antenne non direttive (isotrope).

Di tutti i possibili arrays il sistema costituito da **un insieme di antenne rettilinee** è il più semplice da studiare matematicamente e quindi costituisce una base naturale per una discussione sui sistemi di antenne. Limiteremo la nostra attenzione a sistemi di antenne rettilinee.

14.1 - Array di antenne a mezz'onda parallele

Consideriamo un sistema di antenne rettilinee che per definizione consiste di n dipoli a mezz'onda eccitati nel centro ed orientati parallelamente all'asse z con i centri nei punti x_p ($p = 0, 1, 2, \dots, n-1$) sull'asse x . Ogni dipolo è alimentato indipendentemente, ha una lunghezza $2l$ ed è risonante cioè $kl = \frac{\pi}{2}$.

Assumendo l'approssimazione che la vicinanza dei dipoli non modifica le correnti in essi circolanti o, equivalentemente che i dipoli non interagiscono fra di loro, la densità di corrente lungo il dipolo p -esimo è quella di un dipolo isolato:

$$\vec{J}^{(p)} = \hat{z} A_p \delta(x - x_p) \delta(y) \cos kz \quad (-l \leq z \leq l) \quad (14.1.1)$$

dove A_p denota l'ampiezza complessa della corrente.

Quindi la densità di corrente risultante per l'intero insieme di antenne è la somma:

$$\vec{J} = \sum_{p=0}^{n-1} \vec{J}^{(p)} = \hat{z} \delta(y) \cos kz \sum_{p=0}^{n-1} A_p \delta(x - x_p) \quad (14.1.2)$$

Questa densità di corrente dá luogo alla seguente espressione per il vettore radiazione \vec{N} :

$$\vec{N} = \int_V e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}') d^3r' = \hat{z} \left[\int e^{-iky' \sin \theta \sin \phi} \delta(y') dy' \right] \left[\int_{-l}^{+l} e^{-ikz' \cos \theta} \cos kz' dz' \right] \left[\int \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikx' \sin \theta \cos \phi} \delta(x' - x_p) dx' \right] \quad (14.1.3)$$

essendo:

$$\hat{e}_r = \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta \quad (14.1.4)$$

e, quindi:

$$\hat{e}_r \cdot \vec{r}' = x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta \quad (14.1.5)$$

Effettuando l'integrazione si ha:

$$\vec{N} = \hat{z} \frac{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{k \sin^2 \theta} \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikx_p \sin \theta \cos \phi} \quad (14.1.6)$$

Il secondo integrale della (14.1.3) é lo stesso di quello competente ad una singola antenna rettilinea e si ottiene ponendo $kl = \frac{\pi}{2}$ nella (12.7.5).

Poiché $\hat{z} = \hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta$, dalla (14.1.6) segue:

$$N_\phi = 0 \quad e \quad N_\theta = -\frac{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{k \sin \theta} \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikx_p \sin \theta \cos \phi} \quad (14.1.7)$$

Quindi, il vettore di Poynting risulta radiale e, per la (11.7.22) risulta:

$$S_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r^2} |F(\theta)A(\theta, \phi)|^2 \quad (14.1.8)$$

essendo:

$$F(\theta) = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \quad e \quad A(\theta, \phi) = \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikx_p \sin \theta \cos \phi} \quad (14.1.9)$$

$F(\theta)$ é il fattore di forma di ciascun dipolo come se fosse solo nello spazio, $A(\theta, \phi)$ rappresenta il fattore di forma di tutto il sistema e prende il nome di array factor.

Il diagramma di radiazione di tutto il sistema é quindi rappresentato dalla funzione:

$$U(\theta, \phi) = |F(\theta)A(\theta, \phi)| = |F(\theta)| |A(\theta, \phi)| \quad (14.1.10)$$

14.2 - Studio dell'array factor nel caso di antenne equidistanziate

Per studiare il diagramma di radiazione di un sistema di antenne a mezz'onda, consideriamo il caso particolare in cui le antenne sono equidistanti, cioè per cui $x_p = pd$, dove d é la distanza fra un antenna e l'altra. La figura (14.2-1) illustra un tale sistema di antenne orientate lungo l'asse z ed il conveniente sistema di coordinate adatto a descrivere il diagramma di radiazione.

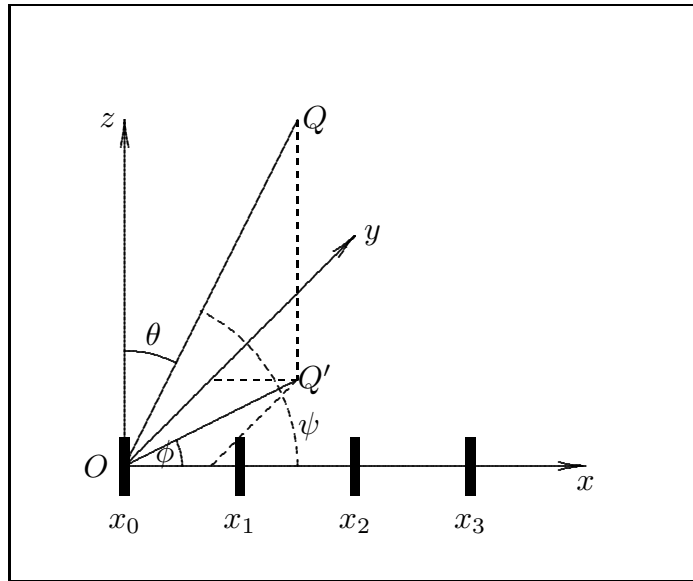


fig.14.2-1

Sia ψ l'angolo fra l'asse x e la linea di osservazione \overline{OQ} ; si ha, ovviamente:

$$\cos \psi = \hat{e}_r \cdot \hat{x} = \sin \theta \cos \phi \quad (14.2.1)$$

L'array factor diventa, pertanto, solo funzione di ψ come si può dedurre dalla seconda formula delle (14.1.9) e risulta:

$$A(\psi) = \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikx_p \cos \psi} \quad (14.2.2)$$

Imponendo la restrizione di equidistanza nella (14.2.2) ed esprimendo A_p come:

$$A_p = a_p e^{-ip\gamma} \quad (14.2.3)$$

che esplicitamente mostra attraverso il fattore $e^{-ip\gamma}$ la variazione progressiva di fase γ delle correnti, otteniamo per $A(\psi)$ l'espressione:

$$A(\psi) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p e^{-ip(kd \cos \psi + \gamma)} = \sum_{p=0}^{n-1} a_p e^{ip\alpha} \quad (14.2.4)$$

dove:

$$\alpha = -kd \cos \psi - \gamma \quad (14.2.5)$$

Allora, se introduciamo la variabile complessa ξ definita da:

$$\xi = e^{i\alpha} \quad (14.2.6)$$

la funzione $A(\psi)$ prende la forma di un polinomio di grado $n - 1$ nella variabile complessa ξ :

$$A(\psi) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \xi^p \quad (14.2.7)$$

Quando i coefficienti a_p del polinomio (14.2.7) sono uguali a una costante che possiamo porre eguale all'unit , il sistema di antenne   detto uniforme. Ne segue che:

$$A(\psi) = \sum_{p=0}^{n-1} \xi^p = \frac{\xi^n - 1}{\xi - 1} \quad \text{ sistema uniforme di antenne} \quad (14.2.8)$$

Il risultato della (14.2.8) deriva dal fatto che il secondo membro di essa rappresenta una progressione geometrica.

Sostituendo a ξ la (14.2.6), la (14.2.8) diventa:

$$\begin{aligned} A(\psi) &= \frac{e^{in\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{e^{+in\frac{\alpha}{2}} - 1}{e^{+i\frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{e^{+in\frac{\alpha}{2}} - e^{-in\frac{\alpha}{2}}}{e^{+i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}} \left[e^{in\frac{\alpha}{2}} - e^{-in\frac{\alpha}{2}} \right]}{e^{-i\frac{\alpha}{2}} \left[e^{+i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}} \right]} = \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}} 2i \sin \left(n \frac{\alpha}{2} \right)}{e^{-i\frac{\alpha}{2}} 2i \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} = \\ &= \left[e^{i(n-1)\frac{\alpha}{2}} \right] \frac{\sin \left(n \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \end{aligned} \quad (14.2.9)$$

Ne segue che:

$$|A(\psi)| = \left| \frac{\sin \left(n \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \right| = \left| \frac{\sin [n (kd \cos \psi + \gamma) / 2]}{\sin [(kd \cos \psi + \gamma) / 2]} \right| \quad (14.2.10)$$

Calcoliamo, adesso, il massimo valore della funzione $|A(\psi)|$.

Sviluppando esplicitamente la sommatoria che compare nella formula (14.2.8), si ha:

$$|A(\psi)| = |1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \dots + \xi^{n-1}| \leq 1 + |\xi| + |\xi^2| + |\xi^3| + \dots + |\xi^{n-1}| \quad (14.2.11)$$

e poiché per la (14.2.6) risulta $|\xi| = 1$, ne segue:

$$|A(\psi)| \leq n \quad (14.2.12)$$

Osserviamo, ora, che dalla (14.2.10), per $\alpha \rightarrow 2m\pi$ con m intero, risulta:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2m\pi} |A(\psi)| = \left| \lim_{\alpha \rightarrow 2m\pi} \frac{\sin\left(n\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right| = \left| \lim_{\alpha \rightarrow 2m\pi} \frac{n \cos\left(n\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right| = n \quad (14.2.13)$$

Ne segue che n è il massimo valore della funzione $|A(\psi)|$ raggiunto per valori di α multipli pari di π .

Per graficare i diagrammi di radiazione è conveniente introdurre la funzione $K(\psi)$ così definita:

$$K(\psi) = \frac{|A(\psi)|}{|A(\psi)|_{max}} = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin[n(kd \cos \psi + \gamma)/2]}{\sin[(kd \cos \psi + \gamma)/2]} \right| \quad (14.2.14)$$

che prende il nome di **normalized array factor** (fattore di cortina normalizzato), in modo cioè che il suo valore massimo è normalizzato all'unità.

Poiché la funzione (14.2.10) è periodica di periodo 2π rispetto ad α , il suo studio potrà limitarsi all'intervallo $(0 \leq \frac{\alpha}{2} \leq \pi)$; essa si annulla in tale intervallo se è:

$$\frac{n\alpha}{2} = r\pi \quad (14.2.15)$$

con r intero positivo diverso da zero e da n (per evitare che si annulli anche il denominatore). Poiché, data la variabilità di $\frac{\alpha}{2}$ nell'intervallo $[0, \pi]$, deve essere $(0 \leq r \leq n)$, si conclude che il fattore di cortina si annulla $(n - 1)$ volte.

14.3 - Studio dell'array factor nel caso di un sistema uniforme di antenne in fase

Supponiamo, inizialmente, che **le sorgenti siano in fase l'una con l'altra (cioè $\gamma = 0$) e che esse distino fra loro di una semilunghezza d'onda.**

Vogliamo studiare in questo caso il diagramma di radiazione orizzontale molto importante nella pratica.

Si ha, quindi: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $d = \frac{\lambda}{2}$, $\gamma = 0$, $\cos \psi = \cos \phi$, $kd = \pi$.

Ne segue che:

$$K(\phi) = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2} \cos \phi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos \phi\right)} \right| \quad (14.3.1)$$

Poiché cambiando ϕ in $(\pi \pm \phi)$, la (14.3.1) resta invariata, il modulo del fattore di cortina è, in questo caso, una funzione simmetrica rispetto al punto O .

La funzione $K(\phi)$ **é massima**, per la formula (14.2.13), quando $\pi \cos \phi = 0$ cioè quando $\cos \phi = 0$ ossia quando $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{3\pi}{2}$; cioè $K(\phi)$ é massima in entrambi i versi della direzione normale al piano su cui giacciono le antenne.

La funzione $K(\phi)$ **si annulla** per $\cos \phi = \frac{2r}{n}$.

Supposto, per fissare le idee, che n sia pari, r puó assumere i valori interi compresi fra $-\frac{n}{2}$ ed $\frac{n}{2}$ (escluso lo zero); il diagramma presenta $2n - 2$ lobi, sicché oltre ai massimi principali $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{3\pi}{2}$ esistono anche altri $2n - 4$ massimi relativi, i cui valori sono peraltro molto piú piccoli di quelli principali.

Passiamo a studiare l'apertura $\Delta\omega$ del lobo che presenta il massimo principale, ossia l'angolo fra le due direzioni di zero che lo comprendono. Detto ϕ_0 l'angolo di zero piú prossimo a quello del massimo principale ($\phi = \frac{\pi}{2}$) sia $\cos \phi_0 = \frac{2r}{n}$; ma é d'altra parte, $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\pi}{2} - \phi_0$, sicché l'apertura $\Delta\omega$ del lobo principale vale:

$$\Delta\omega = 2 \arcsin \frac{2}{n} \tag{14.3.2}$$

e diminuisce al crescere di n . Ne segue che la direttività di un sistema di antenne come quella qui in esame é tanto piú accentuata, quanto maggiore é il numero delle antenne elementari che lo costituiscono.

Per generalizzare quanto precedentemente detto, anche nel caso in cui le antenne non distano di una semilunghezza d'onda, valutiamo la (14.2.14) per $\gamma = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e diversi valori di kd .

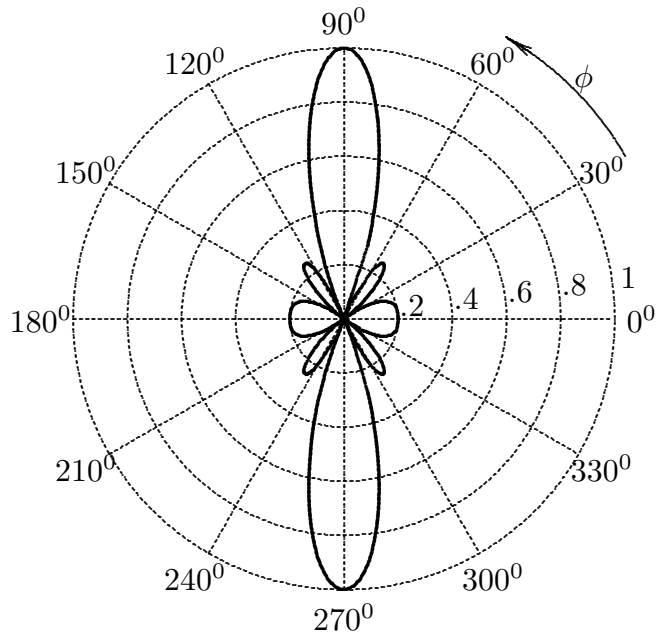
Valori della funzione $\left\{ K(\phi) = \frac{ A(\phi) }{ A(\phi) _{max}} = \frac{1}{n} \left \frac{\sin [n (kd \cos \phi) / 2]}{\sin [(kd \cos \phi) / 2]} \right \right\}$ per $n = 5$				
ϕ	$d = \frac{\lambda}{2}$ $kd = \pi$	$d = \lambda$ $kd = 2\pi$	$d = \frac{3\lambda}{2}$ $kd = 3\pi$	$d = 2\lambda$ $kd = 4\pi$
0^0	0.2	1	0.2	1
5^0	0.2	0.999	0.199	0.998
10^0	0.198	0.99	0.188	0.96
15^0	0.193	0.95	0.14	0.83
20^0	0.179	0.86	0.03	0.51
25^0	0.15	0.69	0.13	0.07
30^0	0.10	0.48	0.25	0.23
35^0	0.03	0.11	0.13	0.124
40^0	0.056	0.15	0.32	0.176
45^0	0.149	0.25	0.86	0.046
50^0	0.22	0.14	0.95	0.25
55^0	0.25	0.08	0.38	0.33
60^0	0.2	0.2	0.2	1

65 ⁰	0.057	0.07	0.11	0.28
70 ⁰	0.17	0.18	0.195	0.23
75 ⁰	0.45	0.22	0.04	0.19
80 ⁰	0.72	0.16	0.22	0.17
85 ⁰	0.927	0.73	0.44	0.15
90 ⁰	1	1	1	1

DIAGRAMMI DI RADIAZIONE NORMALIZZATI

Sistema uniforme di 5 antenne in fase: $kd = \pi$

Broadside array



Sistema uniforme di 5 antenne in fase: $kd = 2\pi$

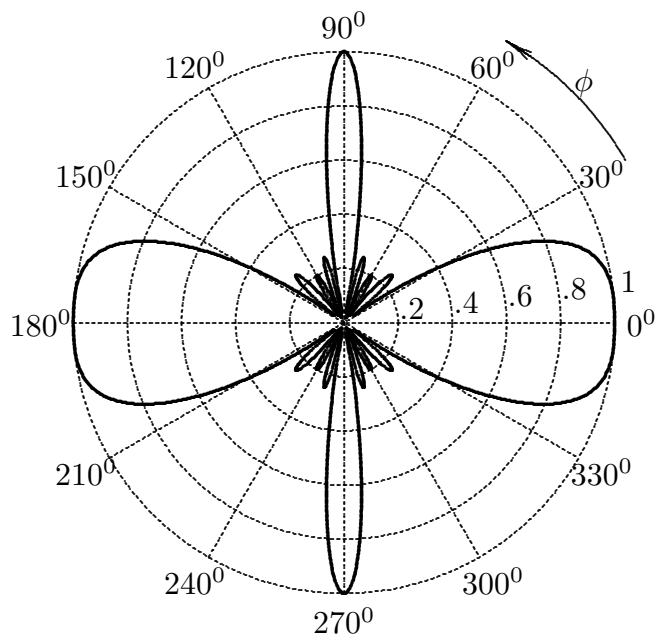
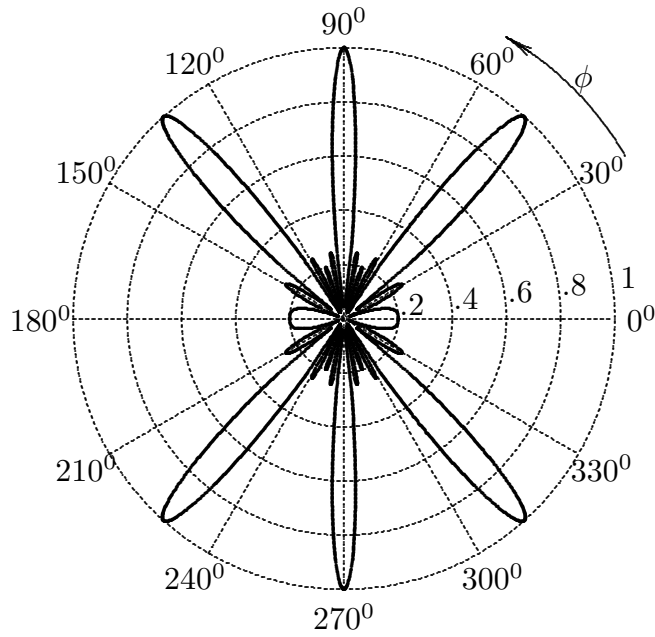


fig.14.3-1

DIAGRAMMI DI RADIAZIONE NORMALIZZATI

Sistema uniforme di 5 antenne in fase: $kd = 3\pi$



Sistema uniforme di 5 antenne in fase: $kd = 4\pi$

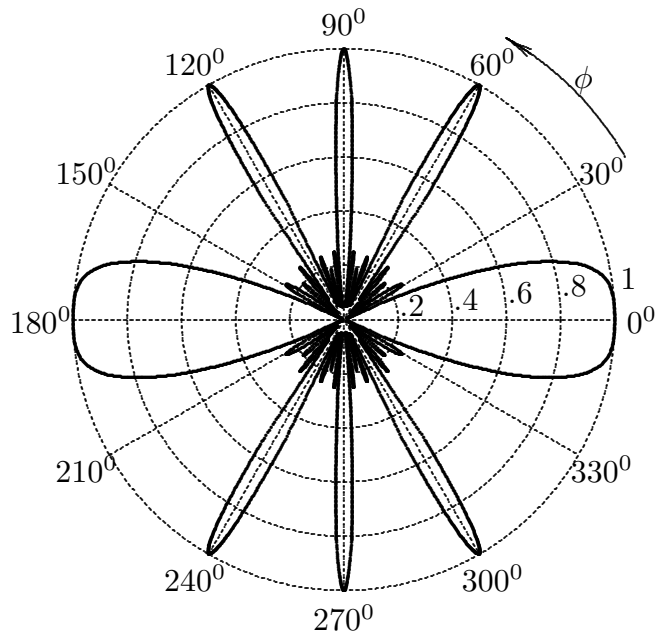
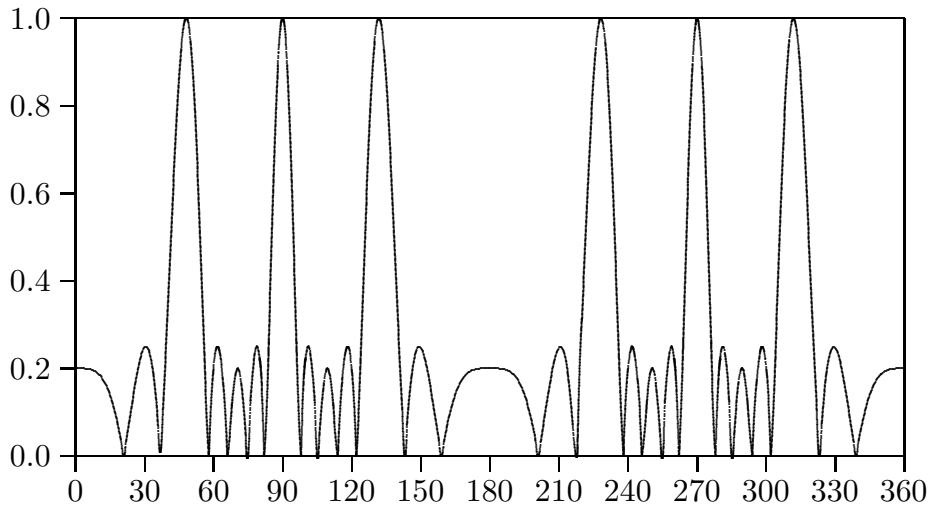


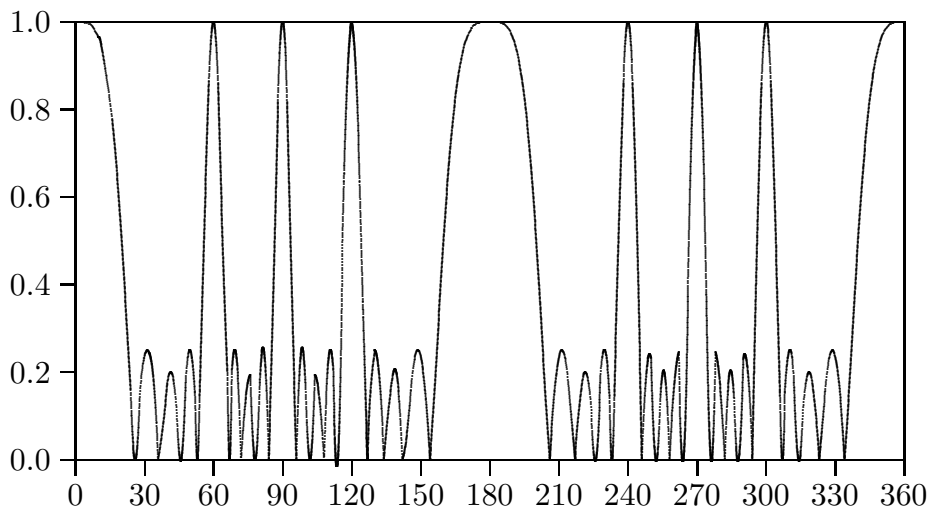
fig.14.3-2

DIAGRAMMI DI RADIAZIONE PROIETTATI

Sistema uniforme di 5 antenne in fase: $kd = 3\pi$



Sistema uniforme di 5 antenne in fase: $kd = 4\pi$



14.4 - Studio dell'array factor nel caso di un sistema uniforme di antenne sfasate

Supponiamo, ora, che le sorgenti siano sfasate progressivamente in modo tale che $kd = -\gamma$ o $kd = \gamma$, la radiazione é disposta principalmente nella direzione della linea delle sorgenti ed in questo caso si dice che il sistema opera come un **end fire array**. Se la distanza é inferiore ad una mezza lunghezza d'onda ($kd < \pi$) vi é un singolo lobo nella direzione $\psi = \pi$ quando $kd = \gamma$. Ma se la distanza é eguale a mezza lunghezza d'onda ($kd = \pi$), esistono simultaneamente due lobi **end fire**, uno lungo $\psi = 0$ e l'altro lungo $\psi = \pi$. Quindi, quando $kd < \pi$, il sistema é **unilateral end fire array** e quando $kd = \pi$ é **bilateral end fire array**. Un aumento nella direttività di un **unilateral end fire array** é realizzata quando é soddisfatta la condizione di Hansen e Woodyard cioè:

$$\gamma = -\left(kd + \frac{\pi}{n}\right) \quad \text{o} \quad \gamma = \left(kd + \frac{\pi}{n}\right) \quad (14.4.1)$$

Se si desidera che il lobo grande sia diretto in qualche direzione arbitraria $\psi = \psi_1$, allora la fase γ e la distanza d devono essere scelte in modo tale che $kd \cos \psi_1 + \gamma = 0$.

Valutiamo la (14.2.14) per $\theta = \frac{\pi}{2}$, $n=2$ e due diversi valori di kd e γ

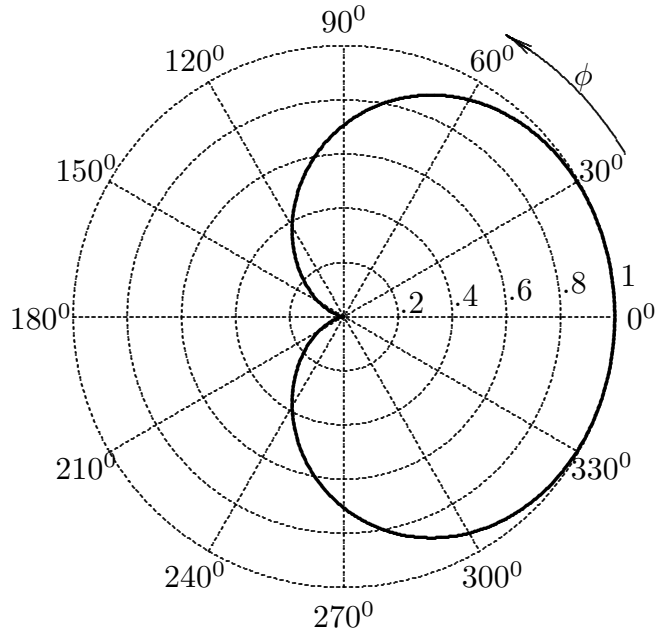
ϕ	Valori della funzione $\left\{ K(\phi) = \frac{ A(\phi) }{ A(\phi) _{max}} = \frac{1}{n} \left \frac{\sin [n (kd \cos \phi + \gamma) / 2]}{\sin [(kd \cos \phi + \gamma) / 2]} \right \right\}$ per $n = 2$	
	$d = \frac{\lambda}{4}$ e $\gamma = -\frac{\pi}{2}$ $kd = \frac{\pi}{2}$	$d = \frac{\lambda}{2}$ e $\gamma = \pm\pi$ $kd = \pi$
0^0	1	1
10^0	0.999	0.9997
20^0	0.999	0.996
30^0	0.994	0.98
40^0	0.983	0.93
50^0	0.96	0.85
60^0	0.92	0.71
70^0	0.87	0.51
80^0	0.80	0.27
90^0	0.71	0
100^0	0.60	0.27
110^0	0.49	0.51
120^0	0.38	0.71
130^0	0.28	0.85
140^0	0.18	0.93
150^0	0.11	0.98

160 ⁰	0.05	0.996
170 ⁰	0.012	0.999
180 ⁰	0.0	1

DIAGRAMMI DI RADIAZIONE NORMALIZZATI

Sistema uniforme di 2 antenne sfasate di $-\pi/2$: $kd = \pi/2$

Cardioide (Unilateral end - fire array)



Sistema uniforme di 2 antenne sfasate di π : $kd = \pi$

Bilateral end - fire array

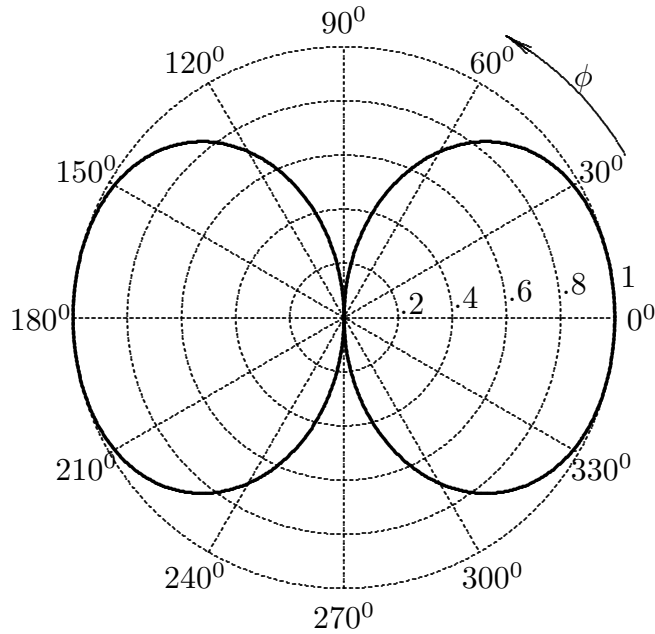
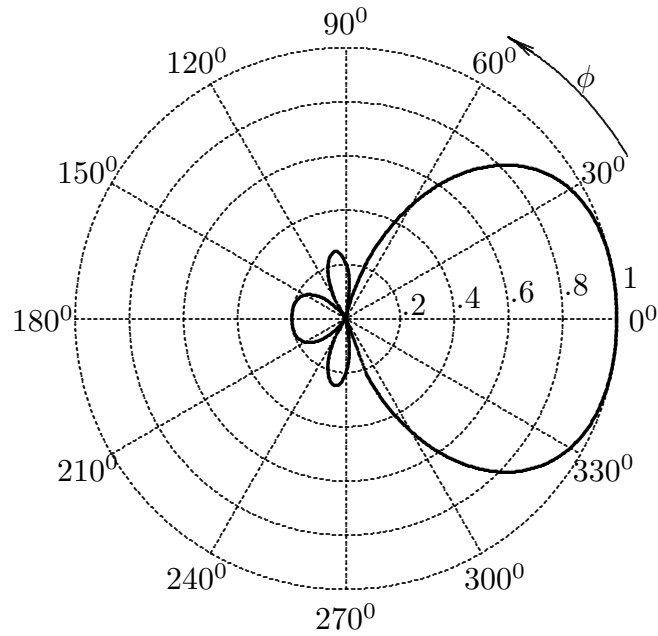


fig.14.4-1

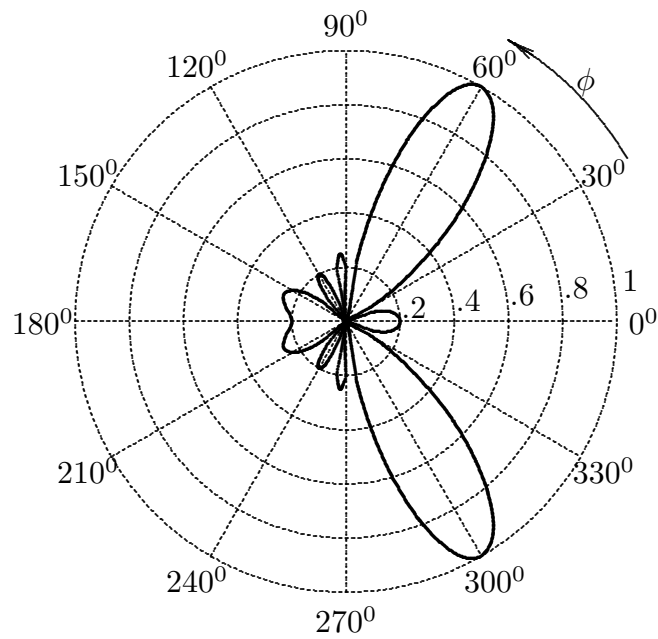
DIAGRAMMI DI RADIAZIONE NORMALIZZATI

Sistema uniforme di 5 antenne sfasate di $-\pi/2$: $kd = \pi/2$

Unilateral end - fire array



Sistema uniforme di 5 antenne sfasate di $-\pi/2$: $kd = \pi$



Diagrammi di radiazione normalizzati di due antenne a mezz'onda verticali in funzione della differenza di fase γ e della distanza d

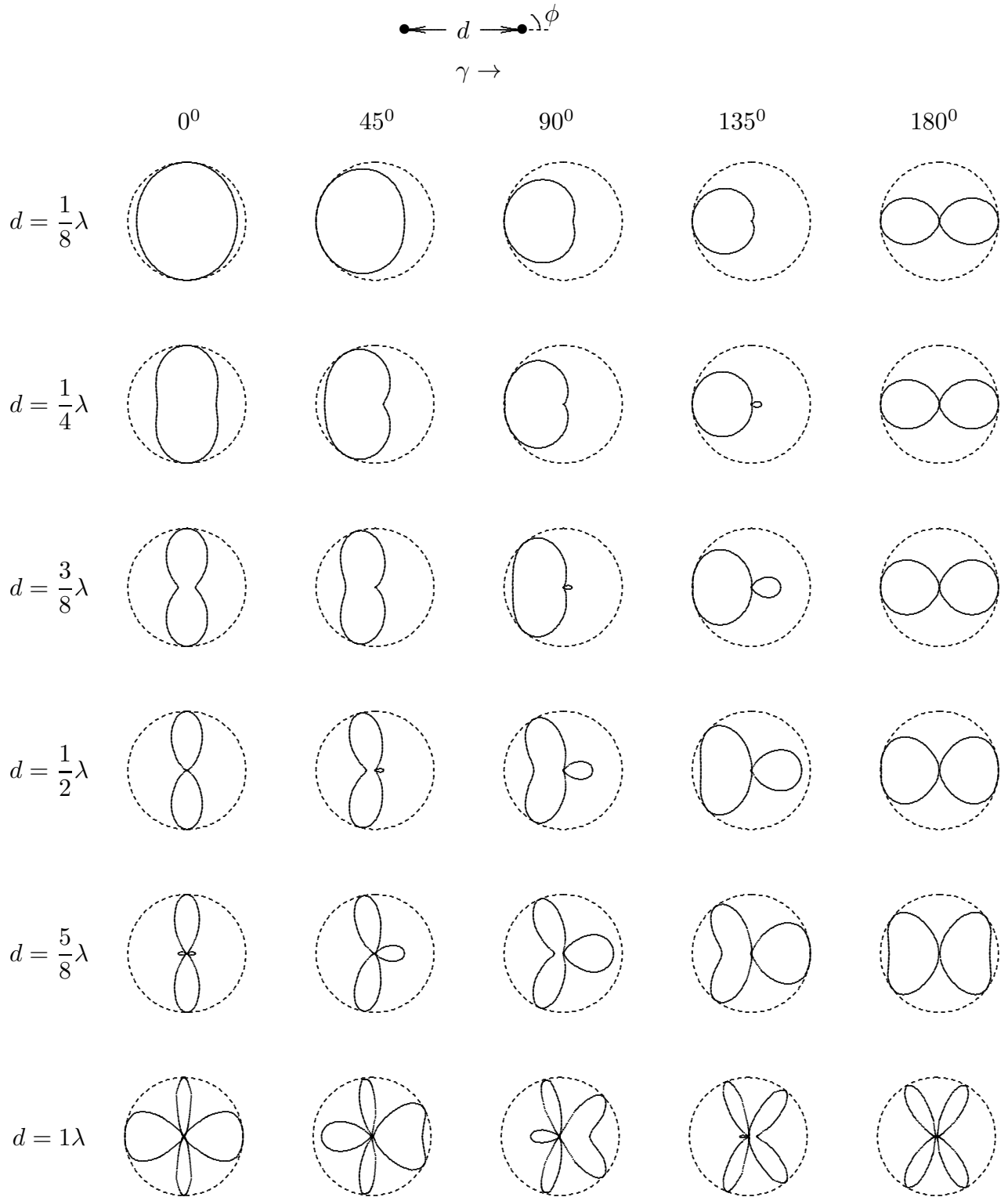


fig.14.4-3

14.5 - Sistema di antenne rettilinee con distribuzione disuniforme di correnti

Quando il sistema di antenne é eccitato con distribuzione uniforme di corrente, nel diagramma di radiazione compaiono dei lobi laterali che talvolta hanno un elevato livello di potenza. Per ridurre questi lobi si utilizza l'eccitazione non uniforme delle singole antenne dell'array; cioè i coefficienti a_p sono diversi l'uno dall'altro.

Un modo di scegliere questi coefficienti a_p , però di non facile realizzazione pratica, é quello di assumerli eguali ai coefficienti della serie binomiale cioè a:

$$a_p = \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!} \tag{14.5.1}$$

cioé i valori delle ampiezze della corrente che scorre nelle antenne sono rappresentati dalla seguente tabella:

n	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1

Un dispositivo di tale tipo prende il nome di **sistema binomiale di antenne**.

In questo caso il fattore di forma (l'array factor) dato dalla (14.2.7) si scrive:

$$A(\psi) = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \xi^p = (1 + \xi)^{n-1} \tag{14.5.2}$$

Sostituendo al posto di ξ la sua definizione (14.2.6), $\xi = e^{i\alpha}$ con $\alpha = -kd \cos \psi - \gamma$, si ha:

$$A(\psi) = \left(1 + \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{-i\frac{\alpha}{2}}} \right)^{n-1} = \left(e^{i\frac{\alpha}{2}} 2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)^{n-1} \tag{14.5.3}$$

il cui modulo é:

$$|A(\psi)| = 2^{n-1} |\cos^{n-1} [(kd \cos \psi + \gamma) / 2]| \tag{14.5.4}$$

La (14.5.4) rappresenta il fattore di forma del **diagramma di radiazione di un sistema binomiale di antenne**.

É importante osservare che la (14.5.4) rappresenta il prodotto dei fattori di forma (array factors) di $n - 1$ coppie di antenne distanti d e percorse da correnti eguali.

Infatti, applicando la (14.2.10) per una coppia di antenne cioè per $n = 2$, si ha:

$$|[A(\psi)]_{n=2}| = \left| \frac{\sin \alpha}{\sin \left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right| \quad (14.5.5)$$

Tenendo conto che:

$$\sin \alpha = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{cioé} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 2 \cos \left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (14.5.6)$$

la (14.5.5) si può scrivere:

$$|[A(\psi)]_{n=2}| = 2 \left| \cos \left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| \quad (14.5.7)$$

Resta così dimostrata l'affermazione che il fattore di forma di un sistema binomiale di antenne é eguale al prodotto dei fattori di forma di $(n - 1)$ coppie di antenne distanti d e percorse dalla stessa corrente.

É evidente che il valore massimo della (14.5.4) é 2^{n-1} ; quindi il fattore di forma normalizzato nel caso di un sistema binomiale di antenne é:

$$K(\psi) = \left| \cos^{n-1} [(kd \cos \psi + \gamma) / 2] \right| \quad (14.5.8)$$

Dalla (14.5.8) segue immediatamente che $K(\psi)$ si annulla per $\alpha = \pi$ ed ha il valore massimo per $\alpha = 0$ e $\alpha = 2\pi$.

Nel caso in cui $\gamma = 0$, $kd = \pi$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, la (14.5.8) diventa:

$$K(\phi) = \left| \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \cos \phi\right) \right| \quad (14.5.9)$$

che si annulla per $\phi = 0^0$ e $\phi = 180^0$ ed ha il valore massimo per $\phi = 90^0$ e $\phi = 270^0$.

Questo sistema é, quindi, **broadside array** e si distingue da quello uniforme perché **é privo di lobi secondari**.

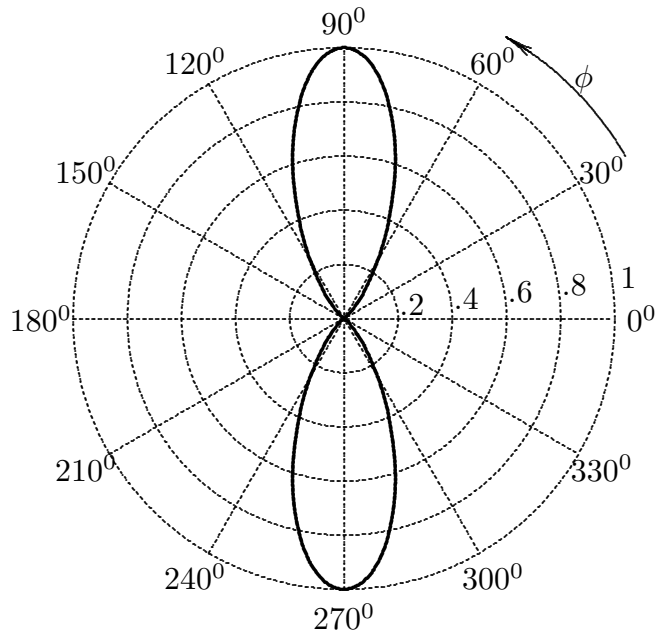
Tuttavia osserviamo che, a parità di numero di radiatori, il lobo del sistema uniforme é piú stretto di quello relativo al sistema binomiale.

Cosí variando opportunamente l'intensità di corrente nelle singole antenne, possiamo eliminare i lobi secondari ma risulta allargato il lobo trasversale.

Tuttavia, é possibile scegliere i coefficienti a_p in modo tale che la larghezza del lobo broadside é minimizzata per un fissato livello dei lobi secondari, o viceversa, il livello dei lobi secondari é minimizzato per una fissata larghezza del lobo broadside.

DIAGRAMMI DI RADIAZIONE NORMALIZZATI

Sistema binomiale di 5 antenne in fase: $kd = \pi$



Sistema binomiale di 5 antenne in fase: $kd = 2\pi$

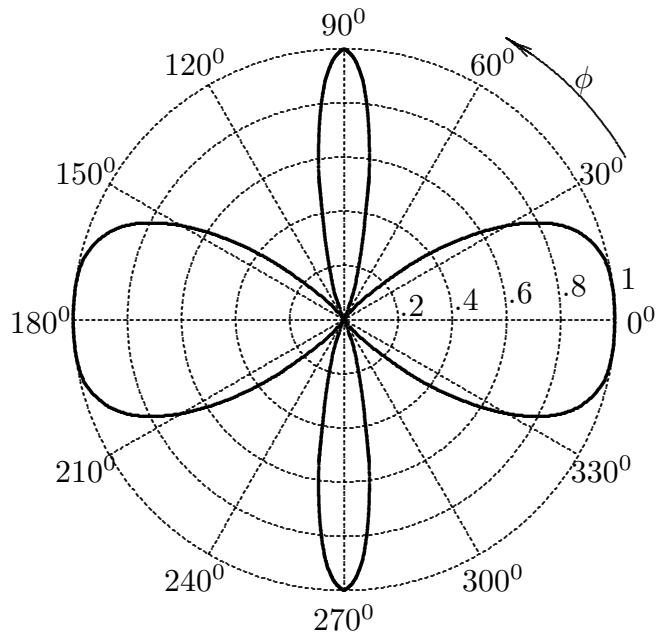
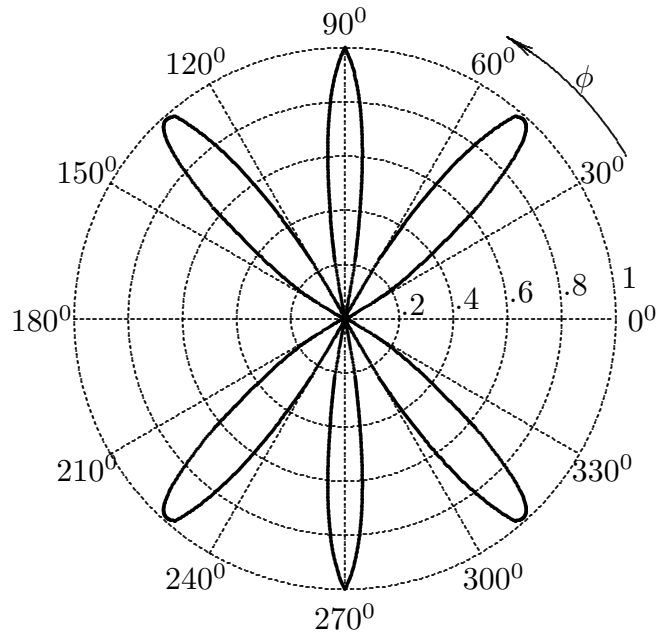


fig.14.5-1

DIAGRAMMI DI RADIAZIONE NORMALIZZATI

Sistema binomiale di 5 antenne in fase: $kd = 3\pi$



Sistema binomiale di 5 antenne in fase: $kd = 4\pi$

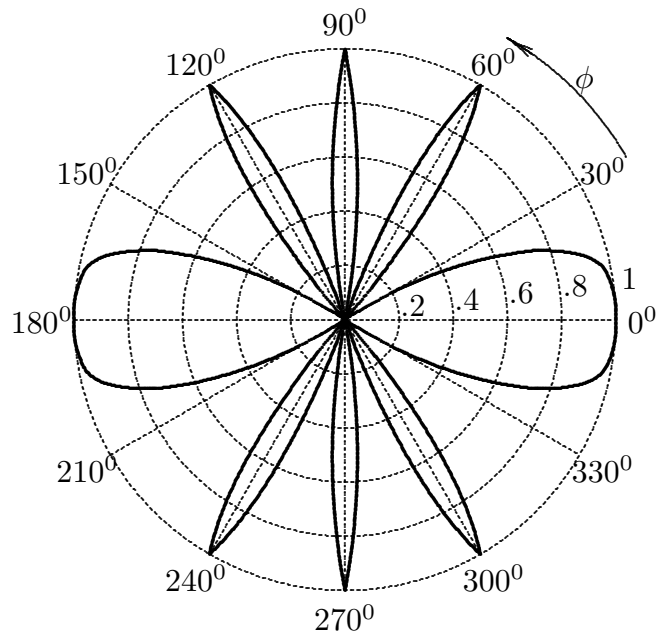


fig.14.5-2

14.6 - Sistema di antenne Dolph - Chebychev

I radiatori di tale sistema sono eccitati **in modo simmetrico** rispetto ad un radiatore centrale; dimostreremo che se i radiatori sono eccitati con correnti le cui ampiezze sono determinate dai coefficienti dei polinomi di Chebychev (o Tchebyscheff), il sistema mostra una minima larghezza del lobo di radiazione, fissato il livello dei lobi secondari che sono tutti eguali.

Si abbiano $2n+1$ antenne con centri nei punti O, O_1, \dots, O_{2n} . Consideriamo l'espressione (14.2.7) che ci fornisce il fattore di forma del diagramma di radiazione:

$$A(\psi) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \xi^p \quad (14.6.1)$$

In questo specifico caso é conveniente scrivere la (14.6.1) nella seguente maniera:

$$A(\psi) = \sum_{p=-n}^n a_p \xi^p \quad (14.6.2)$$

Supponiamo, inoltre, che sia:

$$a_{-n} = a_{+n}, \quad a_{-n+1} = a_{n-1}, \dots, \text{ecc.} \quad (14.6.3)$$

La (14.6.2) si scrive:

$$A(\psi) = a_{-n} \xi^{-n} + a_{-n+1} \xi^{-n+1} + \dots + a_0 + \dots + a_{n-1} \xi^{n-1} + a_n \xi^n \quad (14.6.4)$$

che per la (14.6.3) diventa:

$$A(\psi) = a_n \xi^{-n} + a_{n-1} \xi^{-n+1} + \dots + a_0 + \dots + a_{n-1} \xi^{n-1} + a_n \xi^n \quad (14.6.5)$$

Sostituendo a ξ l'espressione $\xi = e^{i\alpha}$ con $\alpha = -kd \cos \psi - \gamma$, si ha:

$$|A(\psi)| = 2 \left| \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \alpha + \dots + a_n \cos n\alpha \right| \quad (14.6.6)$$

Il sistema ora considerato comprende un numero dispari di antenne; per un sistema costituito da un numero pari di antenne $2n$ con centri nei punti $O, O_1, O_2, \dots, O_{2n-1}$ si ha:

$$A(\psi) = \sum_{p=-n}^{n-1} a_p \xi^p \quad (14.6.7)$$

Analogamente al caso precedente si ha:

$$a_{-n} = a_{n-1}, \quad a_{-n+1} = a_{n-2}, \dots, \text{ecc.} \quad (14.6.8)$$

La (14.6.7) unitamente alla (14.6.8) comporta:

$$A(\psi) = a_{n-1}\xi^{-n} + a_{n-2}\xi^{-n+1} + \dots + a_{n-2}\xi^{n-2} + a_{n-1}\xi^{n-1} \quad (14.6.9)$$

Moltiplicando e dividendo la (14.6.9) per $\xi^{-\frac{1}{2}}$ si ha:

$$A(\psi) = \xi^{-\frac{1}{2}} \left[a_{n-1}\xi^{-(n-\frac{1}{2})} + \dots + a_{n-2}\xi^{(n-1-\frac{1}{2})} + a_{n-1}\xi^{(n-\frac{1}{2})} \right] \quad (14.6.10)$$

Sostituendo a ξ l'espressione $e^{i\alpha}$ e tenendo conto che il modulo di $\xi^{-\frac{1}{2}}$ é 1, si ha:

$$|A(\psi)| = 2 \left| a_0 \cos \frac{\alpha}{2} + a_1 \cos \frac{3}{2}\alpha + \dots + a_{n-2} \cos \frac{2n-3}{2}\alpha + a_{n-1} \cos \frac{2n-1}{2}\alpha \right| \quad (14.6.11)$$

Vediamo, adesso, di esprimere la (14.6.11) e la (14.6.6) in funzione di particolari polinomi chiamati polinomi di Chebychev.

14.7 - Polinomi di Chebychev

Per prima cosa vediamo come si costruiscono tali polinomi.

Detto m un numero intero, si ha:

$$\begin{aligned} \cos(m+1)\delta &= \cos m\delta \cos \delta - \sin m\delta \sin \delta = \\ 2 \cos m\delta \cos \delta - (\cos m\delta \cos \delta + \sin m\delta \sin \delta) &= 2 \cos m\delta \cos \delta - \cos(m-1)\delta \end{aligned} \quad (14.7.1)$$

dalla quale si possono dedurre le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \cos \delta \\ \cos 2\delta &= 2 \cos^2 \delta - 1 \\ \cos 3\delta &= 4 \cos^3 \delta - 3 \cos \delta \\ \cos 4\delta &= 8 \cos^4 \delta - 8 \cos^2 \delta + 1 \\ \cos 5\delta &= 16 \cos^5 \delta - 20 \cos^3 \delta + 5 \cos \delta \end{aligned} \quad (14.7.2)$$

e cosí via.

La (14.7.2) esprime $\cos(m+1)\delta$ mediante un polinomio di grado $m+1$ nella variabile $\cos \delta$.

Posto $\cos \delta = x$, i polinomi al secondo membro delle (14.7.2) prendono il nome di **polinomi di Chebychev** e si indicano con il simbolo $T_n(x)$.

Pertanto, posto $\delta = \arccos x$, si ha la relazione:

$$\cos(n \arccos x) = T_n(x) \quad (|x| < 1) \quad (14.7.3)$$

Dalla (14.7.1) si ha subito la relazione ricorrente:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (14.7.4)$$

che permette di calcolare assai facilmente i polinomi di Chebychev che riscriviamo in funzione della variabile x :

$$T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots \quad (14.7.5)$$

Si vede subito dalle (14.7.5) che ogni polinomio contiene, a seconda del suo grado, solo potenze pari o dispari di x .

Si ha ancora $|T_n(x)| = |T_n(-x)|$ ed inoltre il numero dei coefficienti diversi da zero del polinomio é $\frac{n+2}{2}$ o $\frac{n+1}{2}$, a seconda che n é pari o dispari.

Va notato, inoltre che i polinomi (14.7.5) costruiti nell'ipotesi $|x| < 1$, risultano definiti per qualunque valore di x e verificano sempre le (14.7.4); ci si puó chiedere se anche per $|x| > 1$ possano darsi di essi espressioni del tipo (14.7.3). La risposta, affermativa, a tale questione é immediata: si osservi, a tal proposito, che se nella relazione:

$$x = \cos \delta = \frac{e^{i\delta} + e^{-i\delta}}{2} \quad (14.7.6)$$

poniamo $\delta = i\delta'$ con δ' reale, risulta, come é noto:

$$x = \frac{e^{-\delta'} + e^{\delta'}}{2} = \cosh \delta' \quad (14.7.7)$$

con $|x| > 1$; ed é pertanto $\delta' = \operatorname{arccosh} x$, ossia $\delta = i \operatorname{arccosh} x$.

Si ha, dunque, per $|x| > 1$:

$$T_n(x) = \cos (in \operatorname{arccosh} x) = \cosh (n \operatorname{arccosh} x) \quad (14.7.8)$$

Si osservi che se x varia da -1 a $+1$, $\operatorname{arccos} x$ puó variare da $-\pi$ a $+\pi$ e $n \operatorname{arccos} x$ da $-n\pi$ a $n\pi$. $T_n(x)$ si annulla per quei valori di x che sono soluzione dell'equazione:

$$\operatorname{arccos} x = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad (14.7.9)$$

dove k é un numero intero positivo variabile fra 0 e $n-1$ (in corrispondenza a valori negativi di k si ritroverebbero i medesimi valori di x , calcolati per k positivo).

Il polinomio $T_n(x)$ ha dunque n radici (cioé tutte le sue radici) reali e comprese nell'intervallo $(-1, +1)$; inoltre gli $n-1$ zeri della sua derivata $T'(x)$ (ciascuno dei quali, compreso fra due zeri consecutivi di $T(x)$) sono pure tutti interni all'intervallo $(-1, +1)$.

La derivata $T'(x)$ non puó dunque mutare di segno negli intervalli $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, in ciascuno dei quali, pertanto $T_n(x)$ risulterà sempre crescente o sempre decrescente.

Poiché d'altra parte $|T_n(x)|$ tende all'infinito per $x \rightarrow \pm\infty$, segue che $|T_n(x)|$ é sempre crescente con $|x|$ in entrambi gli intervalli citati. Notiamo infine che il massimo valore di $T_n(x)$ nell'intervallo $(-1, +1)$ é l'unitá.

Vogliamo adesso valutare il valore di x_0 , positivo e tale che $T_n(x_0) = b > 1$; dovendo, per quanto é stato or ora ricordato, essere $|x_0| > 1$ e posto pertanto $\delta_0 = \operatorname{arccosh} x_0$, dalla (14.7.8) si avrá:

$$b = \cosh(n\delta_0) = \frac{e^{n\delta_0} + e^{-n\delta_0}}{2} \quad (14.7.10)$$

Moltiplicando per $e^{n\delta_0}$, si ha:

$$e^{2n\delta_0} - 2be^{n\delta_0} + 1 = 0 \quad (14.7.11)$$

Ricordando, ora, che é $e^{n\delta_0} > 1$, risulta:

$$e^{n\delta_0} = b + \sqrt{b^2 - 1} \quad (14.7.12)$$

Analogamente, moltiplicando la (14.7.10) per $e^{-n\delta_0}$, si ha:

$$e^{-2n\delta_0} - 2be^{-n\delta_0} + 1 = 0 \quad (14.7.13)$$

Ricordando, ora, che é $e^{-n\delta_0} < 1$, risulta:

$$e^{-n\delta_0} = b - \sqrt{b^2 - 1} \quad (14.7.14)$$

e, quindi:

$$x_0 = \cosh \delta_0 = \frac{e^{\delta_0} + e^{-\delta_0}}{2} = \frac{1}{2} \left(b + \sqrt{b^2 - 1} \right)^{1/n} + \frac{1}{2} \left(b - \sqrt{b^2 - 1} \right)^{1/n} \quad (14.7.15)$$

A questo punto, é bene ricordare che quando x varia da 1 a x_0 ($|x_0| > 1$) il valore massimo della funzione $|T_n(x)|$ (crescente con $|x|$) é appunto b ; mentre nell'intervallo $(-1, +1)$ $T_n(x)$ vale al massimo 1. Si conclude perciò che il valore massimo di $T_n(x)$ nell'intervallo $(-1, x_0)$ vale appunto b (mentre esistono altri massimi relativi unitari).

14.8 - Applicazione dei polinomi di Chebychev ai sistemi di antenne rettilinee

Ciò premesso, riprendiamo la (14.6.6) e la (14.6.11); per quanto abbiamo detto le quantità $\cos \alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos n\alpha$ si possono esprimere come polinomi di grado $2n$ nella variabile $\cos \frac{\alpha}{2}$ ricordando che $\cos n\alpha = \cos 2n \frac{\alpha}{2}$.

Poniamo allora:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{x}{x_0} \quad (14.8.1)$$

Alla (14.6.6) può darsi la forma di un polinomio di grado $2n$ in x avente solo le potenze pari di x .

Moltiplicando, ora, la (14.6.6) per una costante opportuna é possibile rendere i coefficienti del polinomio in x uguali ai coefficienti dei corrispondenti polinomi di Chebychev di grado $2n$.

Poiché é $x = x_0 \cos \frac{\alpha}{2}$, si ha:

$$|A(\psi)| = |k| \left| T_{2n} \left(x_0 \cos \frac{\pi d \cos \phi}{\lambda} \right) \right| \quad \left(\text{per } \theta = \frac{\pi}{2} \right) \quad (14.8.2)$$

avendo posto tutte le antenne del sistema in fase cioè $\gamma = 0$.

Il fattore $|A(\psi)|$ é simmetrico rispetto alla retta dei centri delle antenne; basterá studiarlo nell'intervallo $0 < \phi < \pi$.

Supponiamo, ora, $\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2}$ ($kd = \pi$), se ϕ varia da 0 a π , la x cresce da 0 a x_0 , poi decresce da x_0 a 0. Se invece é $\frac{d}{\lambda} = 1$, la funzione $x_0 \cos \frac{\pi d \cos \phi}{\lambda}$, crescente da $-x_0$ a x_0 quando ϕ passa da 0 a $\frac{\pi}{2}$, decresce da x_0 a $-x_0$ per ϕ crescente da $\frac{\pi}{2}$ a π . Se, piú in generale, é $\frac{1}{2} < \frac{d}{\lambda} < 1$, il massimo di $x_0 \cos \frac{\pi d \cos \phi}{\lambda}$ é x_0 , il minimo $x_0 \cos \frac{\pi d}{\lambda}$; e, al variare di ϕ fra 0 e π , x varia nell'intervallo $\left(x_0 \cos \frac{\pi d}{\lambda}, x_0 \right)$. Ora, supposto, per fissare le idee $x_0 \cos \frac{\pi d}{\lambda} > -1$, **il massimo di $|A(\phi)|$ vale $|k|b$, gli altri massimi, corrispondenti a massimi relativi di $T_{2n}(x)$ valgono $|k|$.**

Dunque con la distribuzione **Dolph - Tchebyscheff**, si hanno per $\phi = \frac{\pi}{2}$ due lobi in verso opposto (lobi principali) la cui massima intensitá vale b volte l'intensitá massima degli altri lobi. In altre parole, col dispositivo in esame, si puó assegnare a priori il rapporto fra il massimo principale e i massimi secondari ed é possibile realizzare un notevole guadagno.

Esponiamo a titolo di esempio il calcolo di un sistema D.T. di 4 antenne.

Si ha, quindi, per $n = 2$:

$$|A(\phi)| = 2 \left| a_0 \cos \frac{\alpha}{2} + a_1 \cos \frac{3}{2}\alpha \right| \quad (14.8.3)$$

Sostituiamo al secondo termine del secondo membro il corrispondente polinomio di Chebychev, cioè:

$$\cos \frac{3}{2}\alpha = T_3 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right) = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3 \cos \frac{\alpha}{2} \quad (14.8.4)$$

Ne segue:

$$|A(\phi)| = 2 \left| a_0 \cos \frac{\alpha}{2} + 4a_1 \cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3a_1 \cos \frac{\alpha}{2} \right| \quad (14.8.5)$$

cioé:

$$|A(\phi)| = 2 \left| (a_0 - 3a_1) \cos \frac{\alpha}{2} + 4a_1 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \right| \quad (14.8.6)$$

Ricordiamo che a_1 rappresenta la corrente nella quarta e nella prima antenna, mentre a_0 é la corrente nella seconda e terza antenna.

Mettendo in evidenza nella (14.8.6) a_1 , si ha:

$$|A(\phi)| = 2a_1 \left| \left(\frac{a_0}{a_1} - 3 \right) \cos \frac{\alpha}{2} + 4 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \right| = k \left(4x_0^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3x_0 \cos \frac{\alpha}{2} \right) \quad (14.8.7)$$

Perché l'eguaglianza imposta dalla (14.8.7) sia soddisfatta, posto $\frac{k}{2a_1} = C$, deve essere:

$$\frac{a_0}{a_1} - 3 = -3Cx_0, \quad 4 = 4Cx_0^3 \text{ cioè } C = \frac{1}{x_0^3} \quad (14.8.8)$$

quindi:

$$\frac{a_0}{a_1} = 3 - \frac{3}{x_0^2} \quad (14.8.9)$$

Ora, supposto, per esempio, $b = 9$, si ha:

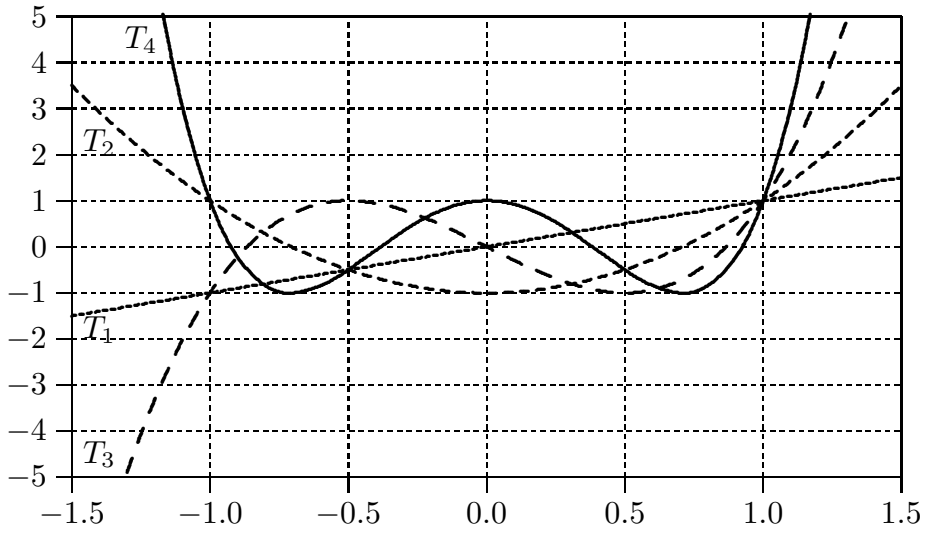
$$x_0 = \frac{1}{2} \left(9 + \sqrt{80} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \left(9 - \sqrt{80} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 1.5 \quad (14.8.10)$$

Ne segue:

$$\frac{a_0}{a_1} = 3 - \frac{3}{(1.5)^2} = 1.667 \quad (14.8.11)$$

La prima e la quarta antenna del sistema dovranno quindi essere alimentate con correnti eguali ad I_0 , la seconda e la terza con correnti eguali a $1.667I_0$.

Polinomi di Chebychev



Sistema di antenne D.T. a quattro elementi: $kd = \pi$, $b=9$

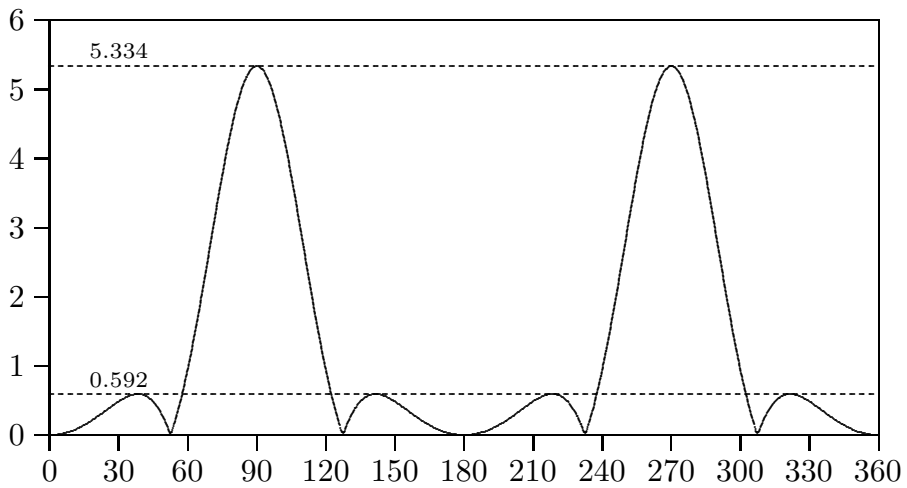


fig.14.8-1

14.9 - Considerazioni ulteriori e scanning elettronico

Abbiamo, quindi, considerato il caso di antenne equidistanziate percorse da correnti o eguali oppure diverse secondo certi criteri.

Quando le sorgenti non sono equidistanti si deve necessariamente utilizzare la espressione generale di $A(\psi)$ data dalla (14.2.2), la quale può essere calcolata con l'aiuto di computer specialmente se il numero di radiatori è elevato. In generale, comunque si può dire che un sistema di antenne non equidistanti presenta un diagramma di radiazione più allargato rispetto a quello relativo ad un sistema di antenne equidistanti.

Ritorniamo al caso di un sistema di antenne uniformemente eccitate il cui diagramma di radiazione è dato dalla (14.2.10).

Come abbiamo visto, se n e kd ($\leq \pi$) sono fissati e γ viene variato da 0 a kd , il lobo maggiore ruota dalla direzione broadside alla direzione endfire. Questo suggerisce che, variando con continuità la fase γ , il fascio può ruotare con continuità nell'intero settore. È su questo principio che opera l'antenna a scanning elettronico. Le fasi delle singole antenne sono controllate elettronicamente per mezzo di phase-shifters. Molti radars operano ancora sul principio dello scanning meccanico ma se si vuole una velocità di scanning elevata occorre ottenerla con scanning elettronico.

14.10 - Sistema di antenne ad alta direttività

Il sistema di antenne che finora abbiamo considerato consiste di n dipoli a mezz'onda eccitati nel centro ed orientati parallelamente all'asse z con i centri nei punti x_p ($p = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) sull'asse x . Un sistema di tale tipo viene chiamato **sistema di antenne parallele**.

Se facciamo ruotare i dipoli in modo che essi si orientano lungo l'asse x il sistema viene chiamato **sistema di antenne allineate (collinear array)**.

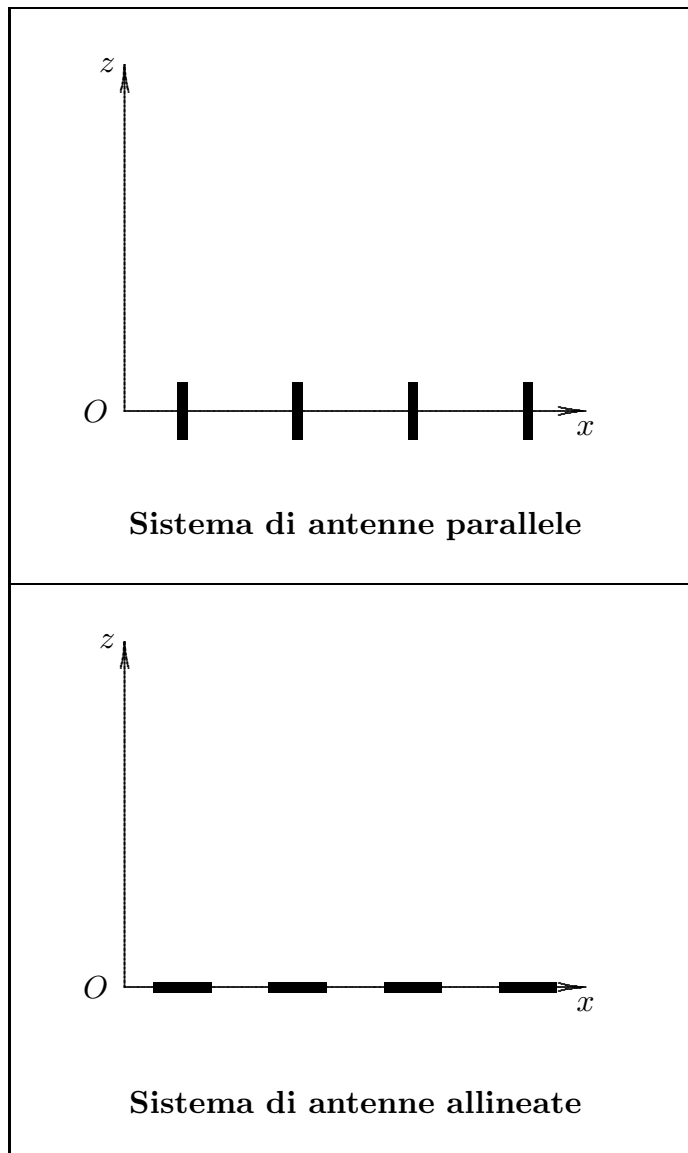


fig.14.10-1

É ovvio che in questo ultimo caso **il diagramma di radiazione di ciascun dipolo**

é dato da:

$$F(\psi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \psi\right)}{\sin \psi} \quad (14.10.1)$$

che differisce dalla prima della (14.1.9) per aver sostituito θ con ψ che rappresentano rispettivamente gli angoli che la direzione dell'osservatore forma con le direzioni dei dipoli.

Ovviamente l'array factor rimane lo stesso:

$$A(\psi) = \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikx_p \cos \psi} \quad (14.10.2)$$

Quindi il diagramma di radiazione di un **collinear array** disposto come in figura 14.10-1, é:

$$U(\psi) = |F(\psi)A(\psi)| = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \psi\right)}{\sin \psi} \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikx_p \cos \psi} \right| \quad (14.10.3)$$

Consideriamo, adesso, un insieme di dipoli allineati sull'asse z con i centri nei punti z_p .

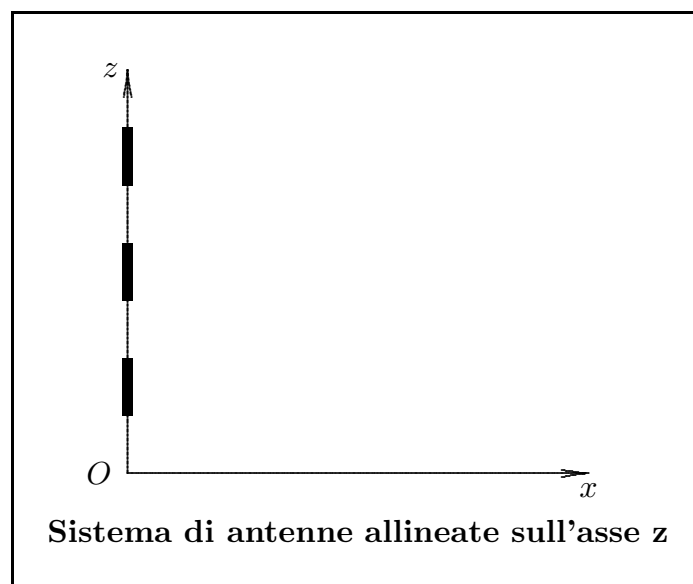


fig.14.10-2

Per tale sistema, il diagramma di radiazione si ottiene dalla (14.10.3) sostituendo ψ con θ e x_p con z_p , cioè:

$$U(\theta) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikz_p \cos \theta} \right| \quad (14.10.4)$$

14.11 - Rectangular array

Le considerazioni fatte ci servono per costruirci il diagramma di radiazione relativo ad una distribuzione bidimensionale di antenne a mezz'onda situate, in particolare nel piano xz . I radiatori sono orientati tutti secondo l'asse z ed hanno i centri nei punti $x = x_p$, $z = z_q$ ($p = 0, 1, \dots, n - 1$; $q = 0, 1, \dots, m - 1$).

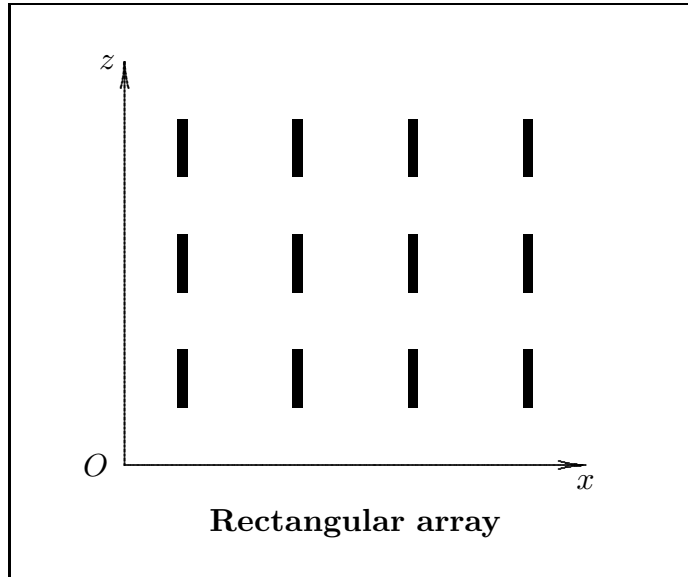


fig.14.11-1

Tale **rectangular array** può essere considerato come un sistema composto, costituito cioè di sistemi di antenne allineate parallele fra loro.

Poiché per la (14.1.8) e la (14.1.10), la funzione spaziale che descrive il diagramma di radiazione di un sistema di antenne è il prodotto della funzione spaziale competente alla singola antenna per l'array factor, nel nostro caso essa è data dal prodotto della (14.10.4) che descrive il diagramma di radiazione del sistema di antenne allineate per la seconda della (14.1.9) che è la solita espressione dell'array factor competente ad un sistema di antenne parallele.

Si ha, pertanto, per il **rectangular array**:

$$U(\theta, \phi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \left| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} A_{pq} e^{-ikx_p \sin \theta \cos \phi} e^{-ikz_q \cos \theta} \right| \quad (14.11.1)$$

dove A_{pq} denota la corrente complessa nel dipolo situato nel punto $x = x_p$, $z = z_q$.

Se le correnti nei dipoli hanno la stessa ampiezza e fase, A_{pq} sia cioè I_0 , e se il sistema è un reticolo periodico di passo d_x nella direzione dell'asse x e d_z nella direzione dell'asse

z ($x_p = pd_x$, $z_q = qd_z$), la (14.11.1) si riduce a:

$$U(\theta, \phi) = I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \left| \frac{\sin [n (kd_x \sin \theta \cos \phi) / 2]}{\sin [(kd_x \sin \theta \cos \phi) / 2]} \frac{\sin [m (kd_z \cos \theta) / 2]}{\sin [(kd_z \cos \theta) / 2]} \right| \quad (14.11.2)$$

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$ il valore della (14.11.2) é $I_0 nm$; é evidente quindi che il diagramma di radiazione rappresentato dalla (14.11.2) presenta un fascio molto **piccato** per $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Lungo l'asse di questo fascio, alla distanza $r = r_0$ dall'array, la componente radiale del vettore di Poynting é data da:

$$S_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r_0^2} U^2 \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2 n^2 m^2}{8\pi^2 r_0^2} \quad (14.11.3)$$

La (14.11.3) si puó scrivere:

$$S_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi^2 r_0^2} \frac{(L_x L_z)^2}{d_x^2 d_z^2} \quad (14.11.4)$$

dove $L_x = nd_x$ e $L_z = md_z$ rappresentano le effettive dimensioni dell'array.

Dall'espressione (14.11.4) si vede che S_r aumenta con legge quadratica con l'area $L_x L_z$ dell'array.