

Cap. 13

Teoria delle antenne: II

13.1 - Sintesi di un diagramma di radiazione per mezzo dei polinomi di Hermite

Illustriamo brevemente il metodo di Bouwkamp e De Bruijn che ci permette di calcolare approssimativamente una distribuzione di corrente che produrrá un prescritto diagramma di radiazione, o, in altre parole, ci permette di **sintetizzare un dato diagramma di radiazione**.

Consideriamo il caso di antenna rettilinea e partiamo dalla relazione integrale:

$$F(\theta) = \sin \theta \int_{-l}^{+l} e^{-ikz \cos \theta} f(z) dz \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (13.1.1)$$

che correla il fattore di forma spaziale $F(\theta)$ alla distribuzione di corrente $f(z)$. Per convenienza, tuttavia, esprimiamo questa relazione in termini delle variabili adimensionate $t = \cos \theta$, $\xi = kz$ e della costante adimensionata $a = kl$.

Cosí la (13.1.1) diventa:

$$F(t) = \sqrt{1-t^2} \int_{-a}^a e^{-i\xi t} f(\xi) d\xi \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (13.1.2)$$

dove si é assunto $k = 1$ per comoditá.

Posto:

$$G(t) = \frac{F(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (13.1.3)$$

la (13.1.2) si scrive:

$$G(t) = \int_{-a}^a e^{-i\xi t} f(\xi) d\xi \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (13.1.4)$$

In riferimento all'equazione integrale (13.1.4), vediamo che il problema della sintesi consiste nel trovare $f(\xi)$ quando $G(t)$ é dato nell'intervallo $-1 \leq t \leq 1$.

In virtú di un teorema dovuto a Weistrass, possiamo approssimare la funzione data $G(t)$ ad una funzione polinomiale $p(t)$ di grado elevato N .

$$G(t) = p(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_N t^N \quad (13.1.5)$$

Consideriamo, adesso, delle funzioni sconosciute $f_n(\xi)$ tali che:

$$f(\xi) = \gamma_0 f_0(\xi) + \gamma_1 f_1(\xi) + \dots + \gamma_N f_N(\xi) \quad (13.1.6)$$

Sostituiamo le espressioni (13.1.5) e (13.1.6) nell'equazione (13.1.4). Deduciamo che le funzioni $f_n(\xi)$ per $n = 0, 1, \dots, N$ devono soddisfare le relazioni:

$$t^n = \int_{-a}^{+a} e^{-it\xi} f_n(\xi) d\xi \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (13.1.7)$$

Per trovare le funzioni $f_n(\xi)$, introduciamo i polinomi di Hermite definiti da:

$$H_n(u) = (-1)^n e^{\frac{u^2}{2}} \left[\left(\frac{d}{du} \right)^n e^{-\frac{u^2}{2}} \right] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (13.1.8)$$

Da questa formula si può facilmente verificare, per mezzo di integrazioni successive per parti, che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} H_n(A\xi) e^{-it\xi} d\xi = \frac{(-i)^n \sqrt{2\pi}}{A^{n+1}} \left(e^{-\frac{t^2}{2A^2}} \right) t^n \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (13.1.9)$$

dove si sono utilizzate le seguenti formule:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad \int_0^\infty e^{-(at^2 + 2bt + c)} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2 - ac}{2a}} \operatorname{erfc} \frac{b}{\sqrt{a}}; \quad (13.1.10)$$

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(z); \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

Quando la costante positiva arbitraria è grande, il fattore $\exp\left(-\frac{A^2\xi^2}{2}\right) H_n(A\xi)$ diminuisce rapidamente a zero quando $|\xi| \rightarrow 0$. Quindi il contributo dell'integrale, oltre un certo range (diciamo $|\xi| > a$) è trascurabile. Anche, quando A è grande, il fattore $\exp\left(-\frac{t^2}{2A^2}\right)$ approssima all'unità. Conseguentemente se noi scegliamo A abbastanza grande, l'equazione (13.1.9) diventa:

$$\frac{A^{n+1}}{\sqrt{2\pi}(-i)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} H_n(A\xi) e^{-it\xi} d\xi = t^n \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (13.1.11)$$

Combinando l'equazione (13.1.11) e (13.1.7) vediamo che le funzioni $f_n(\xi)$ sono date da:

$$f_n(\xi) = \frac{A^{n+1}}{\sqrt{2\pi}(-i)^n} e^{-\frac{A^2\xi^2}{2}} H_n(A\xi) \quad (13.1.12)$$

Sostituendo questo risultato nella equazione (13.1.6) otteniamo la soluzione formale dell'equazione integrale (13.1.4):

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^N \frac{\gamma_n A^{n+1}}{(-i)^n} e^{-\frac{A^2 \xi^2}{2}} H_n(A\xi) \quad (13.1.13)$$

con A sufficientemente grande.

Come applicazione del metodo sopra accennato sintetizziamo il diagramma di radiazione espresso da:

$$F(\theta) = \sin^{2N+1} \theta \quad (13.1.14)$$

Il problema consiste nel trovare i coefficienti γ_N dello sviluppo della funzione F come nella (13.1.5).

Posto al solito $t = \cos \theta$ si ha $\sin^2 \theta = 1 - t^2$ e

$$F(t) = \sqrt{1-t^2} (1-t^2)^N \quad \text{quindi} \quad G(t) = (1-t^2)^N \quad (13.1.15)$$

Applicando il teorema binomiale:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + b^n \quad (13.1.16)$$

con n intero positivo e $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, la seconda formula della (13.1.15) si scrive:

$$G(t) = \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} (-i)^{2l} t^{2l} \quad (13.1.17)$$

dove i coefficienti binomiali sono:

$$\binom{N}{l} = \frac{N!}{(N-l)!l!} \quad (13.1.18)$$

Confrontando la (13.1.17) con la (13.1.5) osserviamo che:

$$\gamma_{2l} = \binom{N}{l} (-i)^{2l} \quad (13.1.19)$$

e sostituendo questi valori nell'equazione (13.1.13) si ha:

$$f(\xi) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2 \xi^2}{2}} \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} A^{2l} H_{2l}(A\xi) \quad (13.1.20)$$

La costante positiva arbitraria A é scelta in modo tale che: $A = \frac{\beta}{a}$ dove β é piú grande della piú grande radice di $H_{2l}(u) = 0$. In questo modo la distribuzione di corrente (13.1.20) é trasformata in:

$$f(a, \xi, \beta) = \frac{\beta}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2 \xi^2}{2a^2}} \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} \frac{\beta^{2l}}{a^{2l}} H_{2l} \left(\beta \frac{\xi}{a} \right) \quad (13.1.21)$$

Cosí, in corrispondenza ad $N = 0$, $N = 2$, $N = 4$, abbiamo i diagrammi di radiazione:

$$F = \sin \theta \quad F = \sin^5 \theta \quad F = \sin^9 \theta \quad (13.1.22)$$

e le rispettive distribuzioni di corrente che li producono sono:

$$f_0(a, \xi, \beta) = \frac{\beta}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2 \xi^2}{2a^2}} \quad (13.1.23)$$

$$f_2(a, \xi, \beta) = \frac{\beta}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2 \xi^2}{2a^2}} \left[1 + 2 \frac{\beta^2}{a^2} H_2 \left(\beta \frac{\xi}{a} \right) + \frac{\beta^4}{a^4} H_4 \left(\beta \frac{\xi}{a} \right) \right] \quad (13.1.24)$$

$$f_4(a, \xi, \beta) = \frac{\beta}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2 \xi^2}{2a^2}} \left[1 + 4 \frac{\beta^2}{a^2} H_2 \left(\beta \frac{\xi}{a} \right) + 6 \frac{\beta^4}{a^4} H_4 \left(\beta \frac{\xi}{a} \right) \right] + \frac{\beta}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2 \xi^2}{2a^2}} \left[4 \frac{\beta^6}{a^6} H_6 \left(\beta \frac{\xi}{a} \right) + \frac{\beta^8}{a^8} H_8 \left(\beta \frac{\xi}{a} \right) \right] \quad (13.1.25)$$

Secondo i calcoli di Bouwkamp e De Bruijn, queste distribuzioni sono esplicitamente date da:

$$f_0(0.8, \xi, 4) = 2.394 e^{-12.5 \xi^2} \quad (13.1.26)$$

$$f_2\left(\frac{3}{4}, \xi, 6\right) = 5.175 \cdot 10^4 e^{-32 \xi^2} (1 - 128.663 \xi^2 + 1379.59 \xi^4) \quad (13.1.27)$$

$$f_4\left(\frac{\pi}{4}, \xi, 9\right) = 1.4208 \cdot 10^{11} e^{-65 \xi^2} (1 - 526 \xi^2 + 34.559 \xi^4 - 605.706 \xi^6 + 2843.678 \xi^8) \quad (13.1.28)$$

Le figure mostrano le curve $f_0(\xi)/f_0(0)$, $f_2(\xi)/f_2(0)$ e $f_4(\xi)/f_4(0)$ in funzione di ξ . Queste oscillazioni spaziali causano l'interferenza distruttiva delle onde nella zona di radiazione in ogni direzione tranne quella equatoriale, dove si sommano costruttivamente e cosí producono un preciso fascio omnidirezionale centrato nel piano equatoriale.

13.2 - Distribuzione di corrente in un'antenna rettilinea

Nel capitolo precedente abbiamo studiato il campo irradiato da un'antenna filiforme nella ipotesi che la corrente fosse una funzione nota.

Restano, quindi, aperti due problemi:

- 1) cosa cambia se le dimensioni trasversali dell'antenna sono finite?
- 2) É stata valida l'ipotesi di aver assunto una distribuzione sinusoidale di corrente?

A queste domande si può dare risposta solo con un dettagliato modello dell'antenna in quanto con una precisa struttura fisica, la corrente sull'antenna può essere determinata dalle equazioni di Maxwell, **non assunta per ipotesi**.

É un rigoroso problema di condizioni al contorno che ha condotto ad almeno tre differenti modelli di antenna:

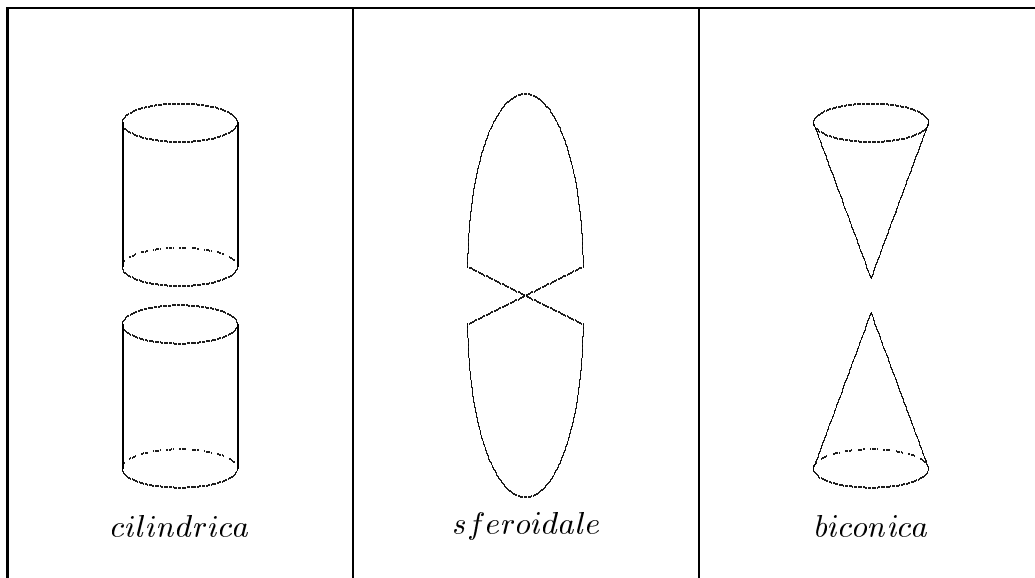


fig.13.2-1

Il modello di **Hallen e King** (a sinistra in figura) é un cilindro perfettamente conduttore di raggio finito a e lunghezza l con un gap in $z = 0$ dove l'intensità del campo elettrico é E_i . Il problema é formulato nella forma di equazioni integrali.

Il secondo modello é dovuto a **Stratton e Chu** (al centro in figura) che modellano l'antenna come un paio di ellissoidi o sferoidi prolate.

Il terzo modello é stato sviluppato da **Schelkunoff** e consiste di una struttura biconica.

13.3 - Modello di Hallen e King

Consideriamo un'antenna rettilinea di lunghezza $2h$ e di sezione cilindrica che ammetteremo, per semplicitá, circolare e di raggio a . L'antenna sia costituita da un conduttore

perfetto e la regione di alimentazione (cioé la regione dove il campo impresso é diverso da zero) sia un tratto molto piccolo dell'antenna stessa. Riferiamo i punti dello spazio a un sistema di coordinate cilindriche ρ, ϕ, z con asse z coincidente con l'asse dell'antenna e con origine nel punto medio.

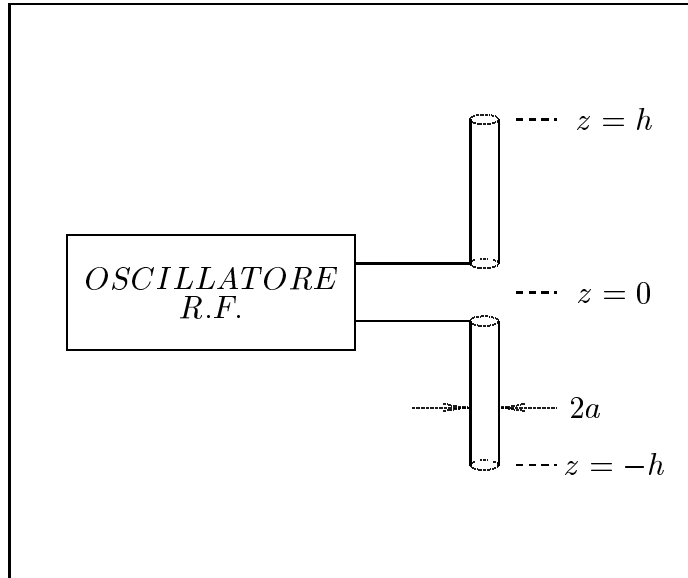


fig.13.3-1

La corrente scorre lungo la superficie dell'antenna simmetricamente distribuita rispetto all'asse del cilindro.

Il vettore densità di corrente ha, allora, soltanto la componente lungo z ed il vettore potenziale \vec{A} in ciascun punto, ha la direzione dell'asse z . Non viene considerata la corrente che scorre sulle basi dei cilindri costituenti l'antenna, ma questa può essere trascurata nel caso di antenne molto sottili o addirittura eliminata nel caso di antenne tubolari.

Nel caso di eccitazione monocromatica, il campo elettrico si può scrivere:

$$\vec{E} = i\omega \left(\vec{I} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \right) \cdot \vec{A} \quad (13.3.1)$$

e, poiché, $\vec{A} = A\hat{z}$ si ha per la componente di \vec{E} lungo z :

$$E_z = i\omega A + i\omega \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (13.3.2)$$

Ora, poiché sulla superficie dell'antenna (esclusa la regione di alimentazione) é nulla la componente tangenziale del campo elettrico e tale é, quindi, E_z , si ha:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2 A = 0 \quad (13.3.3)$$

sulla superficie dell'antenna esclusa la regione di alimentazione.

Poiché per simmetria A dipende solo da z e da ρ e sulla superficie dell'antenna $\rho = a$, si ha che A dipende solo da z e la (13.3.3) si scrive:

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + k^2 A = 0 \quad (13.3.4)$$

È utile osservare che, sulla superficie dell'antenna, esclusa la zona di alimentazione, anche il potenziale scalare ϕ soddisfa ad una analoga equazione, infatti:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (13.3.5)$$

Poiché sulla superficie dell'antenna $E_z = 0$, si ha:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} + i\omega A = 0 \quad (13.3.6)$$

sulla superficie dell'antenna esclusa la zona di alimentazione.

D'altra parte per la condizione di Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (13.3.7)$$

si ha nel nostro caso:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i\frac{\omega}{c^2}\phi = 0 \quad (13.3.8)$$

Poiché, per simmetria, ϕ ed A dipendono solo da z e da ρ e sulla superficie dell'antenna $\rho = a$, la (13.3.6) e la (13.3.8) sulla superficie dell'antenna esclusa la regione di alimentazione si scrivono:

$$\begin{aligned} -\frac{d\phi}{dz} + i\omega A &= 0 \\ \frac{dA}{dz} - i\frac{\omega}{c^2}\phi &= 0 \end{aligned} \quad (13.3.9)$$

Derivando la prima equazione rispetto a z e sostituendo $\frac{dA}{dz}$ nella seconda si ha:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + k^2 \phi = 0 \quad (13.3.10)$$

Analogamente derivando la seconda rispetto a z e sostituendo $\frac{d\phi}{dz}$ nella prima si ha:

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + k^2 A = 0 \quad (13.3.11)$$

che è identica alla (13.3.4).

Poiché l'integrale generale delle (13.3.10) e (13.3.11) é della forma:

$$C_1 \cos kz + C_2 \sin kz \quad \text{con } C_1 \text{ e } C_2 \text{ costanti arbitrarie,} \quad (13.3.12)$$

si conclude che tanto il potenziale vettore quanto il potenziale scalare sono distribuiti sull'antenna con legge sinusoidale. Scriviamo, in particolare:

$$A = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz \quad (13.3.13)$$

D'altra parte, il potenziale vettore si puó esprimere in funzione della densità di corrente. Calcoliamo, quindi, l'espressione di \vec{A} in un punto P sul conduttore, cioè nel punto P di coordinate a, z, ϕ . Detto ancora $P_0 \equiv (a, z_0, \phi_0)$ un altro generico punto sull'antenna, osserviamo che la distanza $r = \overline{PP_0}$ vale $r = \sqrt{\overline{PP'_0}^2 + \overline{P'_0P_0}^2}$ dove P'_0 é la proiezione di P_0 sul piano z .

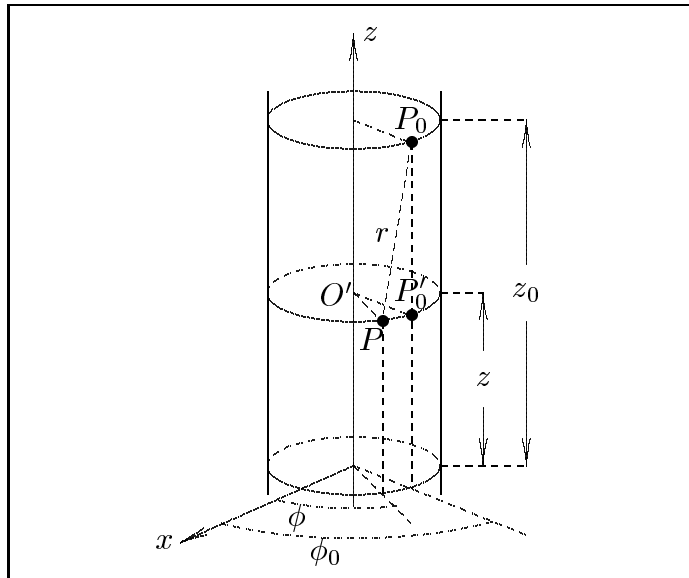


fig.13.3-2

Si ha:

$$\overline{P_0P'_0} = |z - z_0| \quad \overline{PP'_0} = 2a \left| \sin \frac{\phi_0 - \phi}{2} \right| \quad \text{quindi} \quad r = \sqrt{(z - z_0)^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\phi_0 - \phi}{2}} \quad (13.3.14)$$

Si ha inoltre che l'elemento di area sulla superficie dell'antenna vale $a d\phi_0 dz_0$ e che $\frac{I(z_0)}{2\pi a}$ é il valore della densità di corrente superficiale.

Ricordiamo che l'espressione del potenziale vettore é:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \quad (13.3.15)$$

Nel nostro caso il vettore posizione \vec{r} individua il punto P ed il vettore posizione \vec{r}' individua il punto P_0 e $|\vec{r}-\vec{r}'|$ individua la distanza $r = \overline{PP_0}$.

Per cui si ha:

$$A(z) = \frac{\mu}{8\pi^2} \int_{-h}^{+h} I(z_0) dz_0 \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} d\phi_0 \quad (13.3.16)$$

Analizzando la (13.3.16) nasce una considerazione immediata nel caso in cui **il raggio a del cilindro che costituisce l'antenna sia molto piccolo**.

In questo caso, infatti, dalla (13.3.14) si ha che per z prossimo a z_0 r é piccolissimo e quindi $\frac{1}{r}$ diventa grandissimo, mentre se z é sufficientemente diverso da z_0 esso ha valori non troppo elevati. Ne segue quindi che, sempre nel caso **a molto piccolo**, il maggior contributo all'integrale (13.3.16) si avrá nelle vicinanze di $z = z_0$, quindi si potrà porre $I(z)$ invece di $I(z_0)$ e l'unitá in luogo di e^{ikr} essendo r assai prossimo allo zero.

Si ha cosí:

$$A(z) = \frac{\mu}{8\pi^2} I(z) \int_{-h}^{+h} dz_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0}{r} \quad (13.3.17)$$

Ora, come vedremo, l'integrale che compare in questa formula é reale e indipendente da z . Quindi la $I(z)$ é proporzionale ad $A(z)$ cioé **la corrente sull'antenna sottile é sinusoidale**.

Ritornando alla teoria generale, indichiamo un metodo rigoroso per il calcolo della corrente in antenna; supponiamo per semplicitá che l'antenna sia alimentata nel suo punto medio. Piú precisamente, \vec{E}_i sia diverso da zero per valori compresi fra $-\epsilon$ e $+\epsilon$ con ϵ molto piccolo. In questo tratto il campo elettrico é il campo impresso \vec{E}_i il quale essendo ϵ molto piccolo puó ritenersi diretto lungo l'asse z . Pertanto nella zona di alimentazione la (13.3.5) diventa:

$$E_{iz} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} + i\omega A \quad (13.3.18)$$

Integriamo la (13.3.18) fra $-\epsilon$ e $+\epsilon$, si ha:

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} E_{iz} dz = -\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial\phi}{\partial z} dz + i\omega \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} A dz$$

Il primo termine é la circuitazione di E_{iz} lungo il tratto di alimentazione dell'antenna e vale perció la forza elettromotrice impressa.

Il secondo integrale vale $-V(\epsilon) + V(-\epsilon)$; il terzo essendo A finito ed ϵ molto piccolo risulta dell'ordine di ϵ e si puó trascurare.

Posto $-V(\epsilon) + V(-\epsilon) = -V_0$ si ha che: se V_0 é la differenza di potenziale ai capi del generatore, se ϵ é piccolo, essa si manifesta con un salto di potenziale.

Poiché possiamo considerare ϵ infinitesimo, cioè la regione di alimentazione ridotta ad un punto possiamo scrivere:

$$V(0+) - V(0-) = V_0 \quad (13.3.19)$$

Dalla (13.3.8), cioè dalla:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i\frac{\omega}{c^2}\phi = 0 \quad (13.3.20)$$

si ha, allora, che attraversando il punto di alimentazione, la $\frac{\partial A}{\partial z}$ subisce una discontinuità uguale a $i\frac{\omega}{c^2}V_0$.

D'altra parte $A(z)$ è simmetrica rispetto al punto di alimentazione cioè rispetto al piano $z = 0$; in altri termini è $A(z) = A(-z)$ e si può quindi scrivere:

$$A(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin k|z| \quad (13.3.21)$$

Ne segue:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -kC_1 \sin kz + kC_2 \cos kz \quad \text{per } z > 0 \quad (13.3.22)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -kC_1 \sin kz - kC_2 \cos kz \quad \text{per } z < 0 \quad (13.3.23)$$

per cui:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{z=0+} = kC_2 \quad (13.3.24)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{z=0-} = -kC_2 \quad (13.3.25)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{z=0+} - \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{z=0-} = 2kC_2 = i\frac{\omega}{c^2}V_0 \quad (13.3.26)$$

da cui:

$$C_2 = i\frac{\omega}{2c^2k}V_0 = \frac{i}{2c}V_0 \quad (13.3.27)$$

Calcolata così la costante C_2 , si eguaglia la (13.3.21) con la (13.3.16) dopo aver posto $C_1 = C$.

Si ha, quindi:

$$C \cos kz + i\frac{V_0}{2c} \sin k|z| = \frac{\mu}{8\pi^2} \int_{-h}^{+h} I(z_0) dz_0 \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} d\phi_0 \quad (13.3.28)$$

dove r è l'espressione (13.3.14).

La costante C viene determinata con le condizioni:

$$I(h) = I(-h) = 0 \quad (13.3.29)$$

che esprimono l'annullarsi della corrente agli estremi dell'antenna.

L'equazione (13.3.28) é un'equazione integrale dovuta ad Hallen. La sua risoluzione completa permette di conoscere $I(z)$. La soluzione rigorosa dell'equazione (13.3.28) si conosce, ma per i problemi pratici conviene apportare una approssimazione.

Quando il raggio dell'antenna é piccolo rispetto alla lunghezza dell'antenna e alla lunghezza d'onda é vantaggioso usare una piú semplice equazione integrale linearizzata.

Questo é possibile sostituendo $\overline{PP_0}$ con la quantità $\overline{O'P_0}$; é evidente che tale approssimazione é tanto piú lecita quanto minore é il raggio della sezione dell'antenna. É bene notare che il valore di $A(z)$ che cosí si ottiene é il valore del potenziale vettore sull'asse z , quindi, si considera invece del potenziale in $\rho = a$, lo stesso potenziale per $\rho = 0$.

Si ha cosí:

$$r = \overline{PP_0} \simeq \overline{O'P_0} = \sqrt{(z - z_0)^2 + a^2} = R \quad (13.3.30)$$

L'equazione (13.3.28), pertanto, diventa:

$$C \cos kz + i \frac{V_0}{2c} \sin k|z| = \frac{\mu}{8\pi^2} \int_{-h}^{+h} I(z_0) dz_0 \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} d\phi_0$$

che si può scrivere:

$$C \cos kz + i \frac{V_0}{2c} \sin k|z| = \frac{\mu}{8\pi^2} 2\pi \int_{-h}^{+h} I(z_0) \frac{e^{ikR}}{R} dz_0 \quad (13.3.31)$$

La (13.3.31) costituisce una forma semplificata dell'equazione di Hallen. Un primo metodo indicato da Hallen per risolvere la (13.3.31) é il seguente.

Aggiungiamo e sottraiamo al secondo membro dell'equazione (13.3.31) la quantità $\frac{\mu}{4\pi} \int_{-h}^{+h} \frac{I(z)}{R} dz_0$.

La (13.3.31), allora, diventa:

$$C \cos kz + i \frac{V_0}{2c} \sin k|z| = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h}^{+h} \left[I(z_0) \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{I(z)}{R} \right] dz_0 + \frac{\mu}{4\pi} I(z) \int_{-h}^{+h} \frac{dz_0}{R} \quad (13.3.32)$$

Ora, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{+h} \frac{dz_0}{R} &= \int_{-h}^{+h} \frac{dz_0}{\sqrt{(z - z_0)^2 + a^2}} = \ln \frac{z + h + \sqrt{a^2 + (z + h)^2}}{z - h + \sqrt{a^2 + (z - h)^2}} = \\ &= \ln \frac{\left[\sqrt{a^2 + (z + h)^2} + (z + h) \right] \left[\sqrt{a^2 + (z - h)^2} - (z - h) \right]}{a^2} = \\ &= \ln \frac{4h^2}{a^2} + \ln \frac{\left[\sqrt{a^2 + (z + h)^2} + (z + h) \right] \left[\sqrt{a^2 + (z - h)^2} - (z - h) \right]}{4h^2} \end{aligned} \quad (13.3.33)$$

Se il punto P é sufficientemente lontano dagli estremi, onde si possa trascurare a^2 rispetto a $(h+z)^2$ e $(h-z)^2$, si ha che l'ultimo termine della (13.3.33) vale:

$$\ln \frac{h^2 - z^2}{h^2} \simeq 0 \quad (13.3.34)$$

Sostituendo questa approssimazione nella (13.3.32) si ottiene **una equazione integrale linearizzata per una sottile e rettilinea antenna trasmittente**.

$$I(z) \left(\ln \frac{4h^2}{a^2} \right) + \int_{-h}^{+h} \left[\frac{I(z_0)e^{ikR} - I(z)}{R} \right] dz_0 = \frac{4\pi}{\mu} C \cos kz + i2\pi \frac{V_0}{Z} \sin k|z| \quad (13.3.35)$$

Posto:

$$\Omega = \ln \frac{4h^2}{a^2} \quad (13.3.36)$$

che prende il nome di **parametro di snellezza dell'antenna**, la (13.3.35), ritenendo valide le approssimazioni (13.3.34) in tutto l'intervallo delle z , si può scrivere:

$$I(z) = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{4\pi C}{\mu} \cos kz + 2\pi i \frac{V_0}{Z} \sin k|z| \right) - \frac{1}{\Omega} \int_{-h}^{+h} \left[\frac{I(z_0)e^{ikR} - I(z)}{R} \right] dz_0 \quad (13.3.37)$$

Questa é una equazione integrale non omogenea (funzione nota al secondo membro) di seconda specie (la funzione incognita appare sia fuori sia dentro il segno di integrale).

Essa é risolvibile per iterazioni successive; come prima iterazione si può prendere:

$$I(z) \simeq \frac{1}{\Omega} \left(\frac{4\pi C}{\mu} \cos kz + 2\pi i \frac{V_0}{Z} \sin k|z| \right) \quad (13.3.38)$$

che é di ordine $\frac{1}{\Omega}$. Sostituendo nell'integrale si avrebbe la seconda iterazione, contenente anche un termine di ordine $\frac{1}{\Omega^2}$ e cosí via.

Fermiamoci alla prima iterazione, imponendo $\Omega \gg 1$ e calcoliamo la costante C imponendo la condizione $I(h) = 0$.

Si ha:

$$C = -\frac{\mu}{2} i \frac{V_0}{Z} \frac{\sin kh}{\cos kh} \quad (13.3.39)$$

Di conseguenza:

$$I(z) \simeq -i \frac{2\pi}{\Omega} \frac{V_0}{Z} \left(\frac{\sin kh \cos kz}{\cos kh} - \sin k|z| \right) \quad (13.3.40)$$

che si può scrivere:

$$I(z) \simeq -i \frac{2\pi}{\Omega} \frac{V_0}{Z} \frac{1}{\cos kh} \sin k(h - |z|) \quad (13.3.41)$$

La conclusione é che, in prima approssimazione, la distribuzione della corrente su antenne filiformi sottili é di tipo sinusoidale.

Fine del Cap.13