

Teoria delle antenne: I

12.1 - Parametri di un'antenna

Un'antenna é caratterizzata da un insieme di parametri, alcuni dei quali si sono messi in evidenza nello studio del dipolo hertziano; i piú importanti sono:

12.2 - Diagramma di radiazione

Il diagramma di radiazione é una rappresentazione grafica tridimensionale della densità di potenza della radiazione emessa da un'antenna in funzione della direzione di emissione. In pratica il diagramma di radiazione viene graficato su due diagrammi bidimensionali.

Spesso il diagramma di radiazione é descritto in termini di piani principali. Il diagramma **nel piano E** misura la radiazione in funzione della direzione in un piano contenente un raggio vettore che va dal centro dell'antenna al punto di radiazione massima e l'intensità del vettore campo \vec{E} . Il diagramma **nel piano H** é una rappresentazione grafica della radiazione di un'antenna in funzione della direzione nel piano contenente il raggio vettore nella direzione di massima radiazione e l'intensità del vettore campo magnetico.

Il diagramma di radiazione fornisce informazioni sulla larghezza del fascio irradiato, sull'esistenza di lobi laterali, e sulla risoluzione dell'antenna.

La **larghezza del fascio irradiato** é la larghezza angolare del diagramma di radiazione dell'antenna considerata fra punti in cui l'intensità é metà del valore massimo; essa si misura in gradi.

Altre larghezze di frequente interesse sono: la larghezza a -10 db e la larghezza a -20 db , che rappresentano le larghezze angolari fra i punti in cui la potenza é $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$ del valore massimo rispettivamente. Ricordiamo che una attenuazione di potenza, in decibel é definita da $\alpha = 10 \log_{10} \frac{P_u}{P_i}$.

I diagrammi di radiazione sono spesso classificati a seconda della loro forma. Un diagramma isotropo é uno in cui la potenza per unità di angolo solido é uguale in tutte le direzioni. Questo diagramma é spesso usato **come riferimento** sebbene esso non é realizzabile in pratica.

I diagrammi sono espressi per mezzo di una potenza normalizzata definita da:

$$P_{norm} = \frac{S(\theta, \phi)}{S(\theta, \phi)_{max}} \quad (12.2.1)$$

che é una grandezza adimensionata.

$S(\theta, \phi)$ é il modulo del vettore di Poynting espresso in W/m^2 .

$S(\theta, \phi)_{max}$ é il massimo valore di $S(\theta, \phi)$ espresso in W/m^2 .

Spesso, per mostrare i lobi minori con maggior dettaglio si utilizza, come abbiamo già detto, la scala in decibel riportando cioè il valore $10 \log_{10} P_{norm}(\theta, \phi)$.

Un diagramma **omnidirezionale** é uno che ha eguale ampiezza in ogni direzione in un piano passante attraverso l'antenna. Un diagramma **a pennello** é uno che ha il lobo principale molto stretto e con sezione trasversale circolare. Un diagramma **a ventaglio** é uno che ha una sezione trasversale fortemente ellittica, produttore cioé un fascio che é stretto in una direzione e largo nell'altra.

12.3 - Guadagno e direttività di un'antenna

Il confronto fra due antenne si effettua introducendo una grandezza denominata guadagno.

Il guadagno di un'antenna a rispetto ad un'altra antenna b si definisce come il rapporto (a parità di potenze immesse nelle due antenne) fra le rispettive densità di potenza $S_{a(b)}(r, \theta, \phi)$ nel punto di osservazione definito dalle coordinate (r, θ, ϕ) .

In generale, si considera, come antenna di riferimento b , un'antenna isotropa senza perdite; in tal caso la densità di potenza irradiata da tale antenna é identica in tutte le direzioni e se P_t é la potenza fornita alle antenne, essa vale $P_t/4\pi r^2$. Il guadagno di un'antenna riferito ad un'antenna isotropa ora definita, si dice semplicemente **guadagno G dell'antenna** e ad una distanza fissata, risulta funzione soltanto di θ e di ϕ :

$$G(\theta, \phi) = \frac{S(r, \theta, \phi)}{P_t/4\pi r^2} \quad (12.3.1)$$

La direttività D di un'antenna é definita come il guadagno calcolato negli angoli dove esso risulta massimo:

$$D = G(\theta, \phi)_{max} \quad (12.3.2)$$

Talvolta il guadagno e la direttività di un'antenna si esprimono in **decibel**, cioé si assumono come guadagno o come direttività le quantità:

$$G_{db} = 10 \log_{10} G \quad e \quad D_{db} = 10 \log_{10} D \quad (12.3.3)$$

12.4 - Resistenza di radiazione ed efficienza di un'antenna

La resistenza di radiazione R_a é quella resistenza equivalente che dissiperebbe la stessa quantità di potenza irradiata dall'antenna se venisse percorsa da una intensità di corrente di valore massimo I_0 . Si ha cioé:

$$R_a = \frac{2P_r}{|I_0|^2} \quad (12.4.1)$$

In molti casi é importante considerare il rapporto fra la potenza irradiata P_r e la potenza P_i immessa in antenna. Questo rapporto, detto **efficienza dell'antenna**, si

indica con k ed é minore di uno perché non tutta la potenza immessa in antenna viene irradiata, ma in parte si dissipa nell'antenna e nei corpi che la circondano. Ossia:

$$k = \frac{P_r}{P_r + P_L} \quad (12.4.2)$$

essendo P_r la potenza totale irradiata dall'antenna e P_L la potenza dissipata per effetto Joule.

Risulta:

$$P_L = \frac{1}{2}R_0 \int_{-l}^{+l} |I(z')|^2 dz' \quad e \quad P_r = \frac{1}{2}R_a |I_0|^2 \quad (12.4.3)$$

essendo R_0 la resistenza ohmica dell'antenna per unità di lunghezza.

Ne segue, in caso di corrente uniforme ($I(z') = I_0$):

$$k = \frac{R_a}{R_a + R_L} \quad (12.4.4)$$

essendo R_a la resistenza di radiazione dell'antenna e R_L la sua resistenza ohmica.

12.5 - Applicazione al caso del dipolo hertziano

Nel caso del dipolo hertziano, la figura (12.5-1):

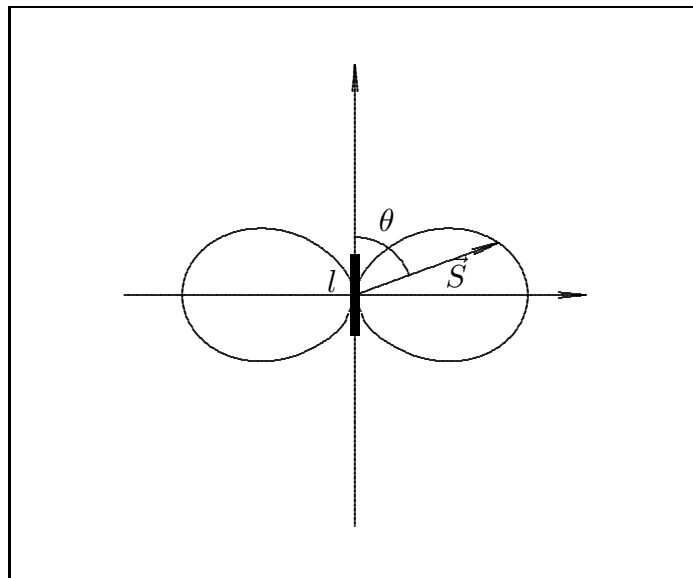


fig.12.5-1

mostra il diagramma di radiazione costruito secondo la formula (11.2.3). Esso in un piano contenente l'asse del dipolo ha la classica forma di una figura a otto.

Calcoliamo, adesso, **la funzione guadagno del dipolo hertziano**; esso é dato dalla (11.2.3) diviso la (11.2.6) e poi moltiplicato per $4\pi r^2$.

Si ottiene:

$$G_{dip} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad (12.5.1)$$

La direttività é:

$$D_{dip} = \frac{3}{2} \quad (12.5.2)$$

É importante confrontare questi valori con quelli competenti ad un'antenna isotropa. É facile verificare che **nel caso di antenna isotropa il guadagno non dipende da θ e la direttività risulta $D = 1$** . Questo é il piú piccolo valore di direttività che un'antenna puó avere. Tanto piú grande é D tanto piú direttiva é l'antenna, cioè **la direttività é una misura della capacità di un'antenna a concentrare la potenza irradiata in una data direzione**.

Nel caso del dipolo hertziano, la resistenza di radiazione é data dalla formula (12.4.1) dopo aver sostituito la (11.2.6) al posto di P_r . Si ha:

$$R_a = \frac{Z(kl)^2}{6\pi} \quad (12.5.3)$$

Per esempio ponendo $Z = 377 \Omega$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda = 300 m$ corrispondente a $1 MHz$ e $l = 1 m$ (misura fittizia) si ha:

$$R_{adip} = 0.0088 \quad Ohm \quad (12.5.4)$$

che é molto piccola; cioè per avere una grande potenza irradiata si avrebbe bisogno di una corrente enorme.

Sebbene il dipolo non é un'antenna praticamente usata, l'esempio illustra il risultato generale che la resistenza di radiazione di un'antenna che é una piccola frazione della lunghezza d'onda é molto piccola.

12.6 - Antenne rettilinee con corrente stazionaria

Ci proponiamo di calcolare i campi di radiazione ed i relativi diagrammi nel caso di antenna filiforme di lunghezza finita. Supponiamo che il filo giaccia sull'asse z di un sistema di riferimento cartesiano e gli estremi di esso coincidano con le coordinate $z = -l$ e $z = l$ come mostrato in figura (12.6-1).

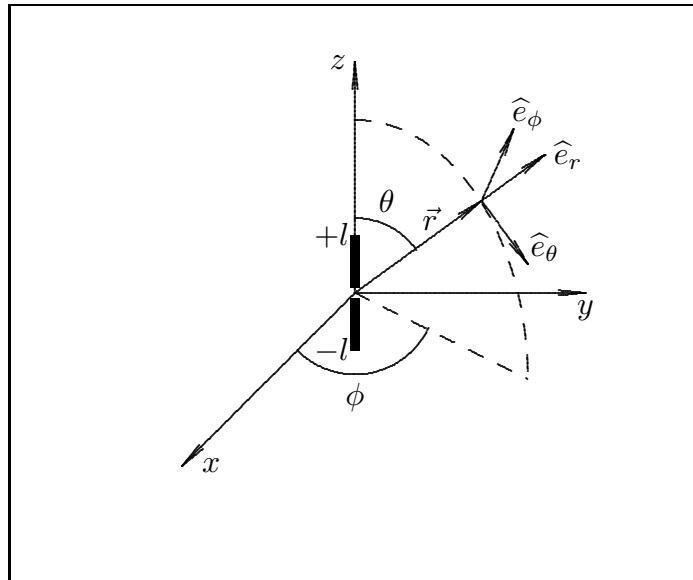


fig.12.6-1

Poiché il filo è sottile e noi desideriamo calcolare i campi di radiazione, idealizziamo matematicamente la distribuzione di corrente assumendo che sia:

$$\vec{J} = \hat{z}\delta(x)\delta(y)I(z) \quad (12.6.1)$$

Supponiamo che il filo è tagliato lungo la sezione $z = \eta$ ed una forza elettromotrice monocromatica $e^{-i\omega t}$ è applicata fra gli estremi tagliati.

La corrente è necessariamente una funzione continua di z , ma la derivata lungo z può essere discontinua nella zona del taglio.

L'antenna è detta **alimentata simmetricamente** se $\eta = 0$ e **alimentata asimmetricamente** se $\eta \neq 0$. Uno dei problemi più importanti nella teoria delle antenne è quello di calcolare, data la forza elettromotrice impressa, la distribuzione $I(z)$ della corrente che è un problema di condizioni al contorno. Aspettando di occuparcene in seguito, per adesso osserviamo che se un'antenna è alimentata simmetricamente e se essa è sottile (intendendo per sottile che il diametro del conduttore sia più piccolo di $\lambda/100$) la distribuzione della corrente, come deriva d'altra parte da evidenze sperimentali, è con buona approssimazione sinusoidale; essa infatti è data dall'onda stazionaria sul filo:

$$I(z) = I_0 \sin k(l - |z|) \quad (12.6.2)$$

dove $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Una approssimazione piú vicina alla vera corrente puó essere ottenuta euristicamente aggiungendo alla corrente sinusoidale una corrente di quadratura che tiene conto della reazione di radiazione e delle perdite ohmiche nel conduttore.

Vediamo adesso alcuni esempi di distribuzione di corrente:

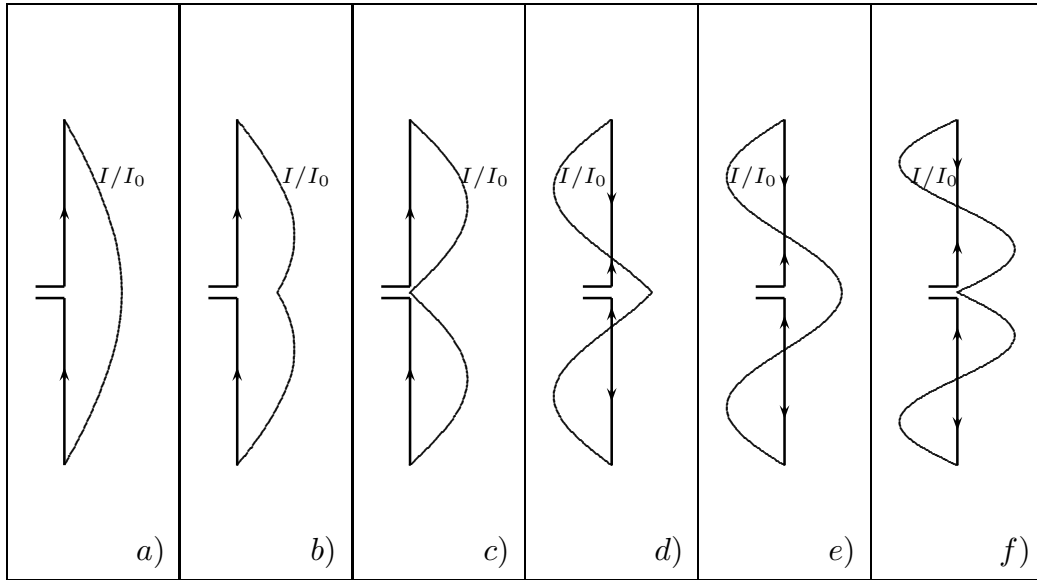


fig.12.6-2

Figura 12.6-2 a: $2l = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = 4l$

In questo caso la (12.6.2) diventa:

$$I(z) = I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{4l} (l - z) \right] \quad \text{per } z > 0 \quad (12.6.3)$$

$$I(z) = I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{4l} (l + z) \right] \quad \text{per } z < 0 \quad (12.6.4)$$

che si possono sintetizzare in:

$$I(z) = I_0 \cos \left(\frac{\pi z}{2l} \right) \quad \text{per } 0 \leq |z| \leq l \quad (12.6.5)$$

Si osservi che la corrente ha due nodi (zeri) agli estremi (come é giusto per continuitá) e un massimo al centro.

Figura 12.6-2 b: $2l = \frac{3\lambda}{4} \rightarrow \lambda = \frac{8}{3}l$

In questo caso la (12.6.2) diventa:

$$I(z) = I_0 \sin \left[\frac{3\pi}{4l} (l - |z|) \right] \quad (12.6.6)$$

ed alcuni valori riportati nel grafico sono:

$$(z = 0; \frac{I}{I_0} = .7), (z = \frac{l}{4}; \frac{I}{I_0} = .98), (z = \frac{l}{2}; \frac{I}{I_0} = .92), (z = \frac{3l}{4}; \frac{I}{I_0} = .55), (z = l; \frac{I}{I_0} = 0) \quad (12.6.7)$$

Figura 12.6-2 c: $2l = \lambda$

In questo caso la (12.6.2) diventa:

$$I(z) = I_0 \sin \left[\frac{\pi}{l} (l - |z|) \right] \quad (12.6.8)$$

ed alcuni valori riportati nel grafico sono:

$$(z = 0; \frac{I}{I_0} = 0), (z = \frac{l}{4}; \frac{I}{I_0} = .7), (z = \frac{l}{2}; \frac{I}{I_0} = 1), (z = \frac{3l}{4}; \frac{I}{I_0} = .7), (z = l; \frac{I}{I_0} = 0) \quad (12.6.9)$$

Figura 12.6-2 d: $2l = \frac{5\lambda}{4} \rightarrow \lambda = \frac{8}{5}l$

In questo caso la (12.6.2) diventa:

$$I(z) = I_0 \sin \left[\frac{5\pi}{4l} (l - |z|) \right] \quad (12.6.10)$$

ed alcuni valori riportati nel grafico sono:

$$(z = 0; \frac{I}{I_0} = -.7), (z = \frac{l}{6}; \frac{I}{I_0} = -.13), (z = \frac{l}{5}; \frac{I}{I_0} = 0), (z = \frac{l}{4}; \frac{I}{I_0} = .19),$$

$$(z = \frac{l}{2}; \frac{I}{I_0} = .92), (z = \frac{3l}{4}; \frac{I}{I_0} = .83), (z = l; \frac{I}{I_0} = 0) \quad (12.6.11)$$

Figura 12.6-2 e: $2l = \frac{3\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \frac{4}{3}l$

In questo caso la (12.6.2) diventa:

$$I(z) = I_0 \sin \left[\frac{3\pi}{2l} (l - |z|) \right] \quad (12.6.12)$$

ed alcuni valori riportati nel grafico sono:

$$(z = 0; \frac{I}{I_0} = -1), (z = \frac{l}{4}; \frac{I}{I_0} = -.38), (z = \frac{l}{2}; \frac{I}{I_0} = .7), (z = \frac{3l}{4}; \frac{I}{I_0} = .92), (z = l; \frac{I}{I_0} = 0) \quad (12.6.13)$$

Figura 12.6-2 f: $2l = 2\lambda$

In questo caso la (12.6.2) diventa:

$$I(z) = I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{l} (l - |z|) \right] \quad (12.6.14)$$

ed alcuni valori riportati nel grafico sono:

$$(z = 0; \frac{I}{I_0} = 0), (z = \frac{l}{4}; \frac{I}{I_0} = -1), (z = \frac{l}{2}; \frac{I}{I_0} = 0), (z = \frac{3l}{4}; \frac{I}{I_0} = 1), (z = l; \frac{I}{I_0} = 0) \quad (12.6.15)$$

I grafici ci aiutano a fare alcune considerazioni importanti sulle distribuzioni di corrente.

Se la lunghezza $2l$ dell'antenna é un multiplo dispari di semilunghezze d'onda si ha:

$$2l = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \text{ con } n=0,1,2,\dots \text{ e } I(z) = I_0 \sin \left(\frac{2n + 1}{2} \pi - k|z| \right) = \pm I_0 \cos k|z| \quad (12.6.16)$$

dove il segno positivo corrisponde a n pari e il segno negativo a n dispari.

La distribuzione (12.6.16) é, in questo caso, funzione continua, insieme alle sue derivate, della variabile z nell'intervallo $(-l, +l)$. Se $n = 0$, risulta $2l = \frac{\lambda}{2}$ e si dice che **l'antenna oscilla in mezz'onda**; per $n = 1$, si ha $2l = \frac{3}{2}\lambda$, cioè l'antenna comprende tre semilunghezze d'onda e cosí via.

Se é, invece, $2l = n\lambda$, cioè l'antenna comprende un multiplo intero di lunghezze d'onda, ($n = 1, 2, 3, \dots$), risulta:

$$I(z) = I_0 \sin (n\pi - k|z|) = \pm I_0 \sin k|z| \quad (12.6.17)$$

dove il segno positivo corrisponde a n dispari, il segno negativo a n pari.

Per quanto riguarda la (12.6.17) osserviamo che:

$$\left(\frac{dI}{dz} \right)_{z=0+} = +kI_0 \quad \left(\frac{dI}{dz} \right)_{z=0-} = -kI_0 \quad (12.6.18)$$

avendo assunto nella (12.6.17), per comoditá, il segno +, cioè che $\frac{dI}{dz}$ ha in $z = 0$ una discontinuitá di prima specie (vedi grafici per $2l = \lambda$ e $2l = 2\lambda$).

In generale, per l qualunque, dalla (12.6.2) si ha:

$$\left(\frac{dI}{dz}\right)_{z=0+} = -kI_0 \cos kl, \quad \left(\frac{dI}{dz}\right)_{z=0-} = +kI_0 \cos kl \quad (12.6.19)$$

cioé $\frac{dI}{dz}$ ha nel punto $z = 0$ la discontinuitá $-2kI_0 \cos kl$ che si annulla soltanto, come si é visto prima, per $kl = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$.

É bene notare che, salvo nei casi $2l = \frac{2n + 1}{2}\lambda$ con $(n = 0, 1, 2, \dots)$ e $2l < \frac{\lambda}{2}$ il valore massimo della corrente non si ha nel punto O , centro dell'antenna.

12.7 - Campo di radiazione emesso dall'antenna rettilinea con corrente stazionaria

Vediamo, adesso, di calcolare i campi di radiazione emessi da un'antenna rettilinea **alimentata simmetricamente** in approssimazione **far field**.

Come abbiamo visto nel capitolo precedente il problema del calcolo dei campi di radiazione si traduce nella valutazione del vettore \vec{N} dato dalla:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \int_V d^3r' \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} \quad (12.7.1)$$

Per la (12.6.1) e (12.6.2) si ha:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \hat{z}I_0 \int_{-l}^{+l} e^{-ikz' \cos \theta} \sin k(l - |z'|) dz' \quad (12.7.2)$$

Calcoliamo l'integrale (12.7.2).

Ricordando che $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, possiamo scrivere:

$$\sin k(l - |z'|) = \frac{e^{ik(l - |z'|)}}{2i} - \frac{e^{-ik(l - |z'|)}}{2i} \quad (12.7.3)$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{+l} e^{-ikz' \cos \theta} \sin k(l - |z'|) dz' &= \frac{1}{2i} \int_{-l}^{+l} e^{-ik(z' \cos \theta + |z'| - l)} dz' - \\ &- \frac{1}{2i} \int_{-l}^{+l} e^{-ik(z' \cos \theta + l - |z'|)} dz' = \frac{1}{2i} e^{ikl} \int_{-l}^0 e^{-ikz' (\cos \theta - 1)} dz' + \\ &+ \frac{1}{2i} e^{ikl} \int_0^{+l} e^{-ikz' (\cos \theta + 1)} dz' - \frac{1}{2i} e^{-ikl} \int_{-l}^0 e^{-ikz' (\cos \theta + 1)} dz' - \\ &- \frac{1}{2i} e^{-ikl} \int_0^l e^{-ikz' (\cos \theta - 1)} dz' \end{aligned} \quad (12.7.4)$$

Ancora:

$$\begin{aligned}
 \int_{-l}^{+l} e^{-ikz'} \cos \theta \sin k(l - |z'|) dz' &= \frac{e^{ikl}}{2i} \frac{i}{k(\cos \theta - 1)} \left[1 - e^{ikl(\cos \theta - 1)} \right] + \\
 + \frac{e^{ikl}}{2i} \frac{i}{k(\cos \theta + 1)} \left[e^{-ikl(\cos \theta + 1)} - 1 \right] - \frac{e^{-ikl}}{2i} \frac{i}{k(\cos \theta + 1)} \left[1 - e^{ikl(\cos \theta + 1)} \right] - \\
 - \frac{e^{-ikl}}{2i} \frac{i}{k(\cos \theta - 1)} \left[e^{-ikl(\cos \theta - 1)} - 1 \right] &= \\
 = \frac{1}{2k(\cos \theta - 1)} \left[e^{ikl} - e^{ikl \cos \theta} - e^{-ikl \cos \theta} + e^{-ikl} \right] + \\
 + \frac{1}{2k(\cos \theta + 1)} \left[e^{-ikl \cos \theta} - e^{ikl} - e^{-ikl} + e^{ikl \cos \theta} \right] &= \\
 = \frac{1}{2k(\cos \theta - 1)} [2 \cos kl - 2 \cos(kl \cos \theta)] + \frac{1}{2k(\cos \theta + 1)} [-2 \cos kl + 2 \cos(kl \cos \theta)] &= \\
 = [\cos(kl \cos \theta) - \cos kl] \left[\frac{1}{k(\cos \theta + 1)} - \frac{1}{k(\cos \theta - 1)} \right] &= \\
 = [\cos(kl \cos \theta) - \cos kl] \frac{k \cos \theta - k - k \cos \theta - k}{k^2(\cos^2 \theta - 1)} = \frac{2}{k \sin^2 \theta} [\cos(kl \cos \theta) - \cos kl] &
 \end{aligned} \tag{12.7.5}$$

Quindi per il vettore $\vec{N}(\theta, \phi)$ si ha:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \hat{\mathbf{z}} 2 \mathbf{I}_0 \frac{\cos(\mathbf{k}l \cos \theta) - \cos \mathbf{k}l}{k \sin^2 \theta} \tag{12.7.6}$$

Tenendo conto che $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta \sin \theta$ risulta:

$$N_\phi = 0 \tag{12.7.7}$$

Il campo elettrico di radiazione ed il campo magnetico di radiazione sono dati rispettivamente dalla (11.7.14) e dalla (11.7.18):

$$\mathbf{E}_\theta = -i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\mathbf{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{2\pi\mathbf{r}} \mathbf{I}_0 \frac{\cos(\mathbf{k}l \cos \theta) - \cos \mathbf{k}l}{\sin \theta} \tag{12.7.8}$$

$$\mathbf{H}_\phi = -i \frac{\mathbf{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{2\pi\mathbf{r}} \mathbf{I}_0 \frac{\cos(\mathbf{k}l \cos \theta) - \cos \mathbf{k}l}{\sin \theta} \tag{12.7.9}$$

La (11.7.22) fornisce la densità di potenza cioè la componente radiale del vettore di Poynting:

$$\mathbf{S}_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\mathbf{I}_0^2}{8\pi^2 \mathbf{r}^2} \left[\frac{\cos(\mathbf{k}l \cos \theta) - \cos \mathbf{k}l}{\sin \theta} \right]^2 \tag{12.7.10}$$

Le espressioni (12.7.8), (12.7.9) e (12.7.10) hanno in comune il fattore:

$$F(\theta) = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{\sin \theta} \tag{12.7.11}$$

che prende il nome di **fattore di forma dell'antenna**, il cui modulo quadro ci fornisce in funzione di θ il **diagramma di radiazione dell'antenna**.

Poiché $F(\theta)$ é indipendente da ϕ , in base alla definizione già data, l'antenna rettilinea é **omnidirezionale**.

Un fatto importante viene dedotto dalla formula (12.7.11): **un'antenna rettilinea non irradia nella direzione della corrente**. Infatti per $\theta = 0^0$ (direzione della corrente), la (12.7.11) risulta una forma indeterminata $\frac{0}{0}$; applicando il teorema di L'Hôpital si ottiene facilmente:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^0} F(\theta) = 0$$

Tale risultato si può, come vedremo, generalizzare per qualsiasi tipo di sistema radiante.

Prima di procedere alla descrizione sistematica della (12.7.11), calcoliamo $[F(\theta)]^2$ in funzione di θ assumendo come parametro $2l$.

Valori della funzione $[F(\theta)]^2$

θ	$2l = \frac{\lambda}{2}$ $kl = \frac{\pi}{2}$	$2l = \lambda$ $kl = \pi$	$2l = \frac{3\lambda}{2}$ $kl = \frac{3\pi}{2}$	$2l = 2\lambda$ $kl = 2\pi$	$2l = \frac{5\lambda}{2}$ $kl = \frac{5\pi}{2}$	$2l = 3\lambda$ $kl = 3\pi$
0^0	0	0	0	0	0	0
5^0	$4 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-7}$	0.04233	$1.07 \cdot 10^{-5}$	0.11	$5.4 \cdot 10^{-5}$
10^0	0.018	$4.3 \cdot 10^{-5}$	0.17	$6.8 \cdot 10^{-4}$	0.47	$3.47 \cdot 10^{-3}$
15^0	0.043	$4.89 \cdot 10^{-4}$	0.38	0.0078	1.04	0.04
20^0	0.076	$2.7 \cdot 10^{-3}$	0.67	0.04	1.78	0.21
25^0	0.12	0.01	1.02	0.16	2.52	0.75
30^0	0.17	0.03	1.39	0.45	3.01	1.94
35^0	0.24	0.075	1.72	1.02	2.97	3.9
40^0	0.31	0.16	1.927	1.95	2.25	6.13
45^0	0.39	0.31	1.928	3.2	1.11	7.44
50^0	0.48	0.54	1.682	4.49	0.18	6.64
55^0	0.57	0.88	1.22	5.35	0.06	4
60^0	0.67	1.33	0.67	5.33	0.66	1.33
65^0	0.75	1.87	0.20	4.32	1.18	0.13
70^0	0.84	2.46	$1.9 \cdot 10^{-3}$	2.7	0.91	$1.2 \cdot 10^{-5}$
75^0	0.90	3.05	0.126	1.19	0.21	0.06
80^0	0.95	3.54	0.48	0.30	0.04	0.9
85^0	0.99	3.88	0.85	0.021	0.6	2.84
90^0	1	4	1	0	1	4

Come si vede dalla tabella il diagramma di radiazione presenta dei massimi e degli zeri il cui numero dipende dal numero di semilunghezze d'onda contenuto nell'antenna.

Distinguiamo due casi:

1) la lunghezza dell'antenna é uguale ad un **numero intero dispari di semilunghezze d'onda**: $2l = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$; cioè trattiamo i casi in cui: $2l = \frac{\lambda}{2}$, $2l = \frac{3\lambda}{2}$, $2l = \frac{5\lambda}{2}$, ecc.

In questo caso il modulo del fattore di forma si scrive:

$$|F(\theta)| = \left| \frac{\cos \left[(2n + 1) \frac{\pi}{2} \cos \theta \right]}{\sin \theta} \right| \quad (12.7.12)$$

Come prima cosa notiamo che esso resta invariato cambiando θ in $\pi - \theta$, quindi il diagramma di radiazione é simmetrico rispetto al piano $\theta = \frac{\pi}{2}$, sicché lo stesso diagramma che é di rotazione é **simmetrico rispetto al centro dell'antenna**.

Ciò premesso, per studiare la funzione $|F(\theta)|$ cerchiamo anzitutto i suoi zeri. É ovvio che $|F(0)| = |F(\pi)| = 0$; gli altri zeri sono gli zeri del numeratore ossia le radici

dell'equazione:

$$(2n + 1) \frac{\pi}{2} \cos \theta = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (12.7.13)$$

essendo k un numero intero.

La soluzione della (12.7.13) é:

$$\cos \theta = \frac{2k + 1}{2n + 1} \quad (12.7.14)$$

Poiché $-1 < \cos \theta < 1$, la (12.7.14) é verificata per k variabile da $-n$ a $n-1$ (compresi) in quanto escludiamo a priori le soluzioni $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ corrispondenti a $k = n$ e $k = -n-1$.

Ci sono quindi altre $2n$ direzioni secondo le quali il campo si annulla. Specifichiamo alcuni esempi:

$$2l = \frac{\lambda}{2} \text{ cioè } n = 0:$$

Il campo non si annulla mai dentro l'intervallo $]0, \pi[$ e quindi il diagramma di radiazione presenta **un solo lobo**.

$$2l = \frac{3\lambda}{2} \text{ cioè } n = 1:$$

Il campo si annulla secondo due direzioni corrispondenti a $k = -1$ e $k = 0$ per le quali dalla (12.7.14) si ha $\cos \theta = \pm \frac{1}{3}$ da cui $\theta_1 = 70^0.5$ e $\theta_2 = 109^0.5$; il diagramma di radiazione presenta, pertanto, tre lobi.

$$2l = \frac{5\lambda}{2} \text{ cioè } n = 2:$$

Il campo nell'intervallo aperto $]0, \pi[$ si annulla secondo quattro direzioni corrispondenti a valori di $k = -2$, $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$ per le quali dalla (12.7.14) si ha $\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$ e $\cos \theta = \pm \frac{1}{5}$ da cui seguono: $\theta_1 = 53^0.13$, $\theta_2 = 78^0.46$, $\theta_3 = 101^0.54$ e $\theta_4 = 126^0.87$; il diagramma di radiazione presenta, pertanto, cinque lobi.

I punti interni nell'intervallo $]0, \pi[$ e nei quali il fattore di forma si annulla dividono cosí l'intervallo stesso in $2n + 1$ parti cioè tante quante sono le semilunghezze d'onda contenute nell'antenna.

Siano θ_1 e θ_2 ($\theta_1 < \theta_2$) gli estremi di uno di questi intervalli. Per noti teoremi, quando θ varia da θ_1 a θ_2 , la funzione $|F(\theta)|$ (o il suo quadrato), nulla per θ_1 , cresce fino a raggiungere un massimo, per poi annullarsi quando θ assume il valore θ_2 .

Cioé, ad ognuno di questi intervalli corrisponde, come si suol dire, **un lobo** nel diagramma di radiazione ed il numero di lobi coincide con quello delle semilunghezze d'onda contenute nell'antenna.

L'angolo $\theta_2 - \theta_1$ si chiama **apertura del lobo**.

2) la lunghezza dell'antenna é uguale ad un **multiplo intero di lunghezze d'onda**: $2l = n\lambda$ ossia $kl = n\pi$ con $n = 1, 2, 3, \dots$; cioè i casi in cui: $kl = \pi$, $kl = 2\pi$, $kl = 3\pi$, ecc.

In questo caso il fattore di forma dell'antenna $F(\theta)$ diventa:

$$|F(\theta)| = \left| \frac{\cos(n\pi \cos \theta) - \cos n\pi}{\sin \theta} \right| \quad (12.7.15)$$

Anche in questo caso si ha ovviamente $F(0) = F(\pi) = 0$.

Per trovare gli altri punti in cui il fattore di forma si annulla, supponiamo per fissare le idee n pari ed uguale a $2r$. In tale ipotesi la (12.7.15) si scrive:

$$|F(\theta)| = \left| \frac{\cos(2r\pi \cos \theta) - 1}{\sin \theta} \right| \quad n \text{ pari e } r=1,2,3\dots \quad (12.7.16)$$

da cui segue subito che gli zeri (distinti da 0 e π) sono le radici dell'equazione $2r\pi \cos \theta = 2k\pi$ cioè:

$$\cos \theta = \frac{k}{r} \quad (12.7.17)$$

Poiché $-1 < \cos \theta < 1$ segue che il numero intero k è compreso nell'intervallo $[-r + 1, r - 1]$ estremi inclusi.

Il numero complessivo delle direzioni secondo cui $|F(\theta)|$ è nullo è pertanto $2r + 1$, sicché il numero dei lobi risulta essere $2r$ eguale al numero di lunghezze d'onda contenute nell'antenna.

Lo stesso risultato si ha per n dispari; infatti, supponiamo che $n = 2r + 1$ ($r = 0, 1, 2, 3, \dots$), la (12.7.15) diventa:

$$|F(\theta)| = \left| \frac{\cos[(2r + 1)\pi \cos \theta] + 1}{\sin \theta} \right| \quad n \text{ dispari e } r=0,1,2,3\dots \quad (12.7.18)$$

da cui segue subito che gli zeri (distinti da 0 e π) sono le radici dell'equazione $(2r + 1)\pi \cos \theta = (2k + 1)\pi$ cioè:

$$\cos \theta = \frac{2k + 1}{2r + 1} \quad (12.7.19)$$

Poiché $-1 < \cos \theta < 1$ segue $-2r - 1 < 2k + 1 < 2r + 1$ ossia l'intero k è compreso nell'intervallo $[-r, r - 1]$ estremi inclusi.

Il numero complessivo delle direzioni secondo cui $|F(\theta)|$ è nullo è pertanto $2r + 2$, sicché il numero dei lobi risulta essere $2r + 1$.

Specifichiamo alcuni esempi:

$2l = \lambda$ cioè $n = 1$:

In questo caso $r = 0$ e il campo si annulla secondo due direzioni corrispondenti a $k = 0$ e $k = -1$ per le quali dalla (12.7.19) si ha $\cos \theta_1 = 1$ e $\cos \theta_2 = -1$ cioè $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$; il diagramma di radiazione presenta, pertanto, un solo lobo.

$2l = 2\lambda$ cioè $n = 2$:

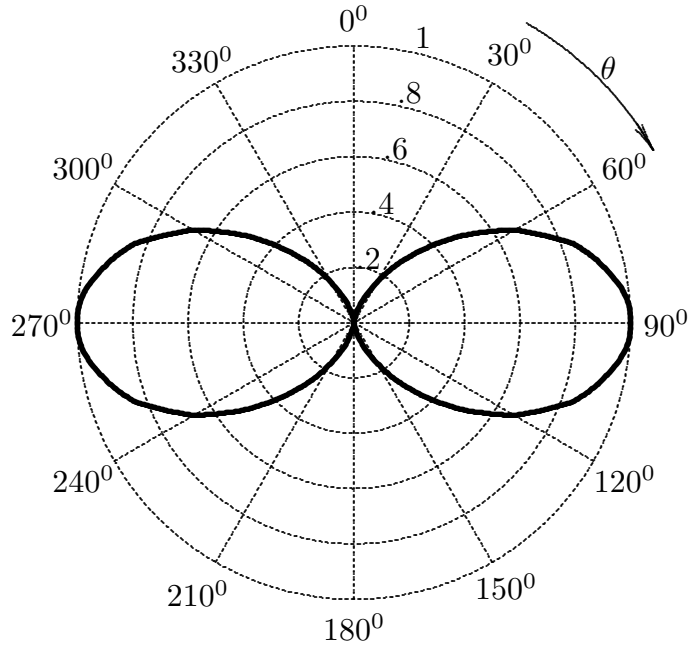
In questo caso $r = 1$ e il campo si annulla secondo la sola direzione corrispondente a $k = 0$ per la quale dalla (12.7.17) si ha $\cos \theta_1 = 0$ cioè $\theta_1 = 90^\circ$; il diagramma di radiazione, tenendo conto dell'esistenza degli altri due zeri a 0° e π presenta due lobi.

$2l = 3\lambda$ cioè $n = 3$:

In questo caso $r = 1$ il campo si annulla secondo due direzioni corrispondenti a $k = -1$ e $k = 0$ per le quali dalla (12.7.19) si ha $\cos \theta_1 = -\frac{1}{3}$ e $\cos \theta_2 = \frac{1}{3}$ cioè $\theta_1 = 109^{\circ}.47$ e $\theta_2 = 70^{\circ}.5$; il diagramma di radiazione, tenendo conto dell'esistenza degli altri due zeri a 0° e π presenta tre lobi.

DIAGRAMMI DI RADIAZIONE

Antenna rettilinea: $kl = \pi/2$



Antenna rettilinea: $kl = \pi$

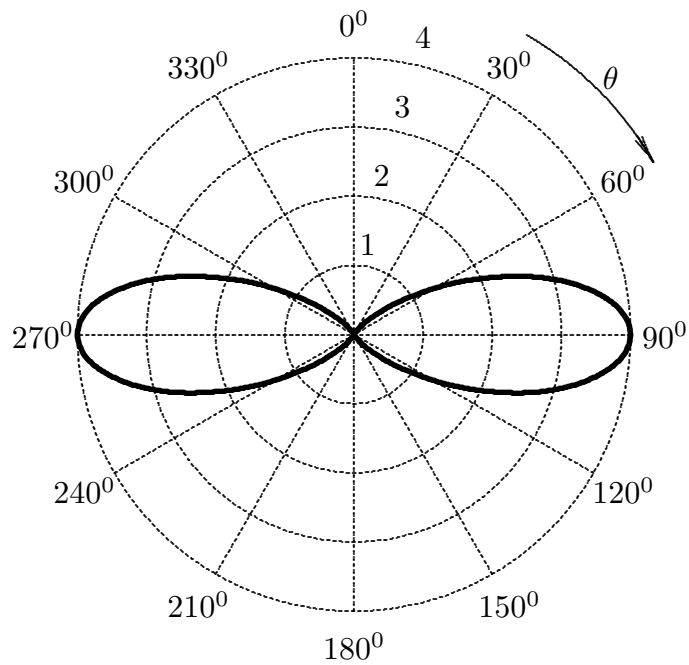
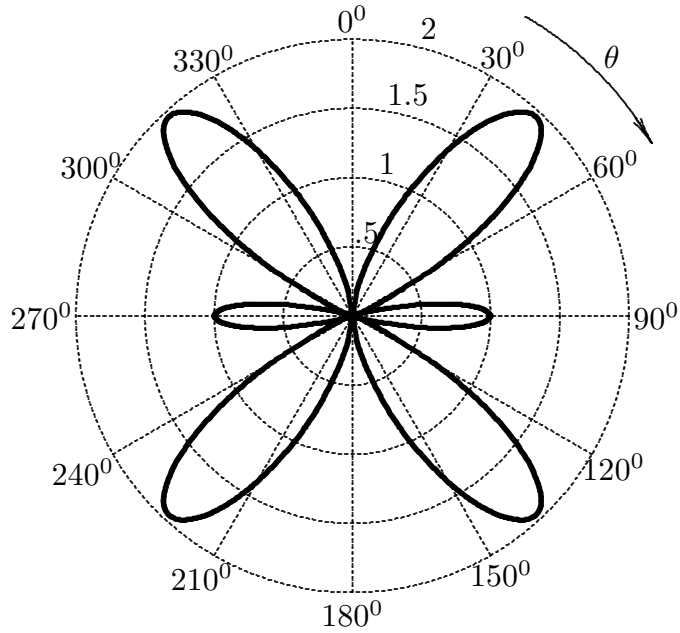


fig.12.7-1

DIAGRAMMI DI RADIAZIONE

Antenna rettilinea: $kl = \frac{3}{2}\pi$



Antenna rettilinea: $kl = 2\pi$

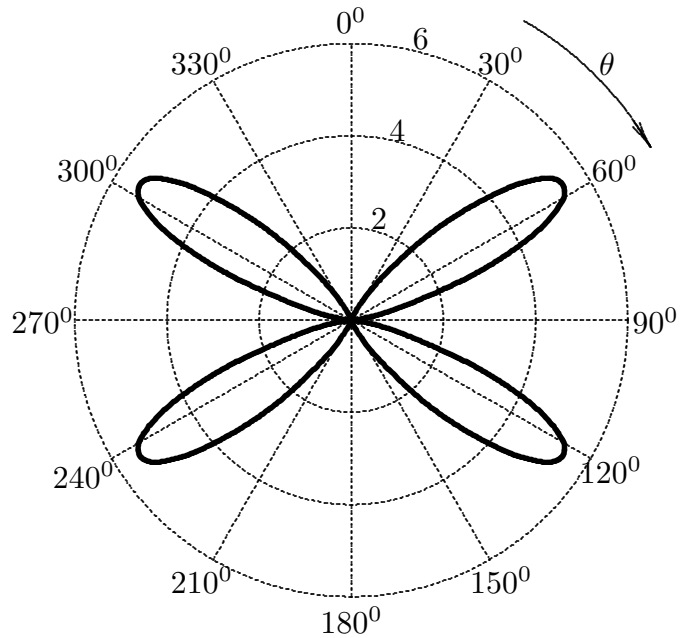
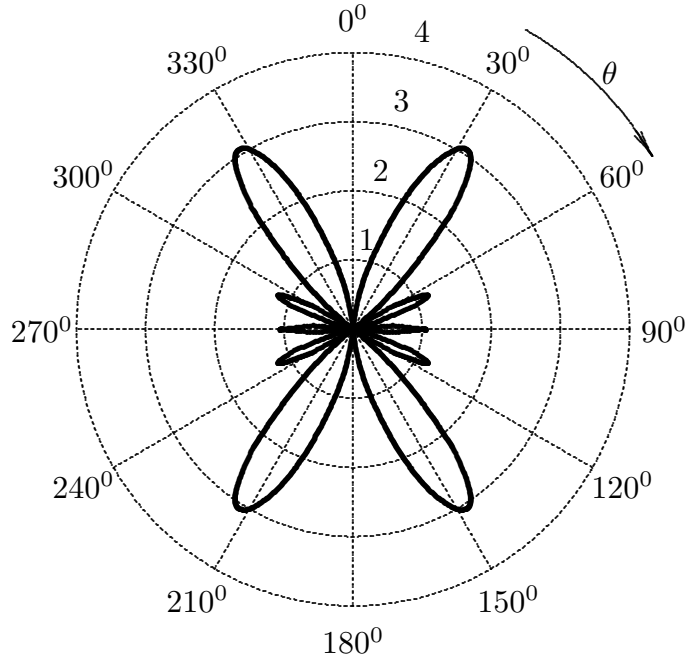


fig.12.7-2

DIAGRAMMI DI RADIAZIONE

Antenna rettilinea: $kl = \frac{5}{2}\pi$



Antenna rettilinea: $kl = 3\pi$

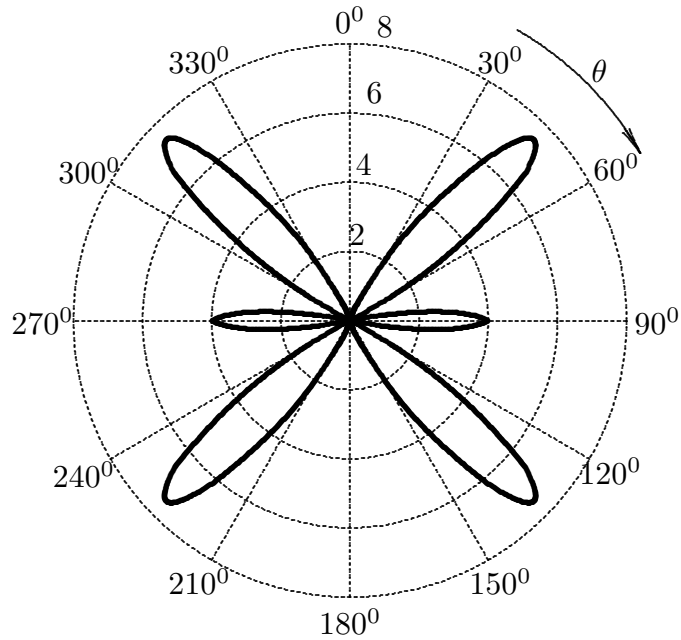
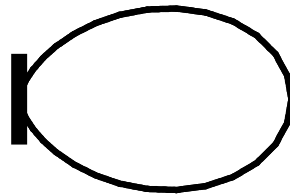


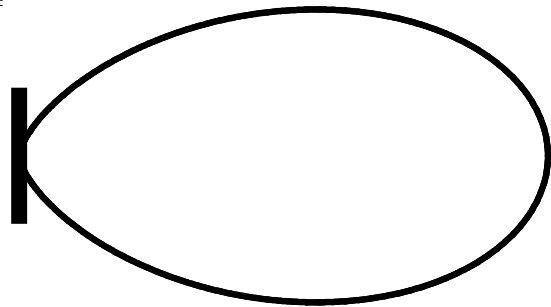
fig.12.7-3

**Grafici sistematici della densità di potenza irradiata
da un'antenna rettilinea al variare della lunghezza
(viene riportata solo la parte destra dei grafici)**

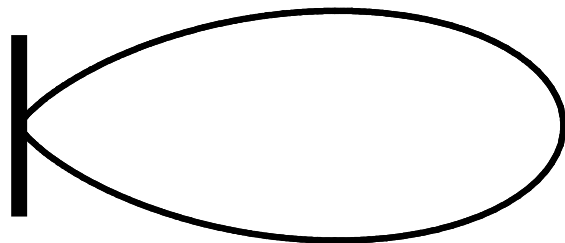
$$2l = \frac{\lambda}{2}, kl = \frac{\pi}{2}, [F^2(\theta)]_{max} = 1$$



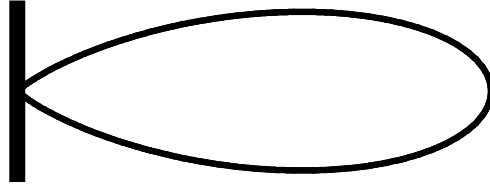
$$2l = \frac{3}{4}\lambda, kl = \frac{3}{4}\pi, [F^2(\theta)]_{max} = 3$$



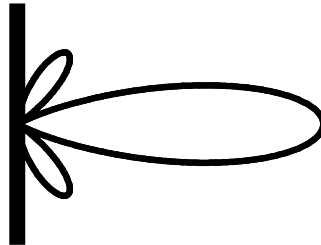
$$2l = \lambda, kl = \pi, [F^2(\theta)]_{max} = 4$$



$2l = \frac{7}{6}\lambda, kl = \frac{7}{6}\pi, [F^2(\theta)]_{max} = 3.482$
(lobi secondari appena accennati non visibili in figura)



$2l = \frac{8}{6}\lambda, kl = \frac{8}{6}\pi, [F^2(\theta)]_{max} = 2.25$



$2l = \frac{3}{2}\lambda, kl = \frac{3}{2}\pi, [F^2(\theta)]_{max} = 1.956$

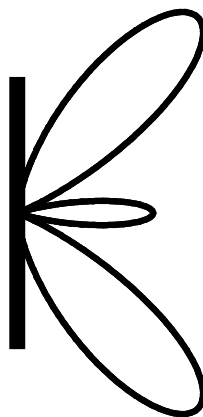


fig.12.7-4

12.8 - Deduzione dei campi di radiazione nell'approssimazione di antenna corta rispetto alla lunghezza d'onda

Quando l'antenna é corta rispetto alla lunghezza d'onda cioè risulta $kl \ll 1$ nella formula (12.7.11), possiamo introdurre lo sviluppo in serie dei coseni che ivi vi figurano applicando la formula: $\cos x \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2$; si ha, allora:

$$F(\theta) \simeq \frac{1 - \frac{1}{2}k^2l^2 \cos^2 \theta - 1 + \frac{1}{2}k^2l^2}{\sin \theta} = \frac{1}{2}k^2l^2 \sin \theta \quad (kl \ll 1) \quad (12.8.1)$$

Da questo noi vediamo che il diagramma di radiazione di **un'antenna filiforme corta** consiste di un singolo lobo che ha un massimo per $\theta = \frac{\pi}{2}$ come del resto nel caso di dipolo hertziano.

Un altro modo molto elegante per arrivare ad un risultato applicabile ad antenne corte é il seguente.

Poiché $|F(\theta)|$ é una funzione pari di $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ che si annulla per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, essa si può sviluppare in serie di Fourier nella forma:

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin[(2n+1)\theta] \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (12.8.2)$$

dove:

$$b_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\theta) \sin[(2n+1)\theta] d\theta \quad (12.8.3)$$

Per piccoli valori di kl tutti i coefficienti di ordine piú alto sono, in buona approssimazione, trascurabili rispetto al primo coefficiente e quindi si ha, per $n=0$:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(kl \cos \theta) - \cos kl] d\theta = 2J_0(kl) - 2 \cos kl \quad (12.8.4)$$

essendo $J_0(kl)$ la funzione di Bessel di ordine zero.

Sostituendo la (12.8.4) nella (12.8.2), si ottiene:

$$F(\theta) \simeq [2J_0(kl) - 2 \cos kl] \sin \theta \quad (12.8.5)$$

12.9 - Antenne rettilinee con distribuzione di corrente progressiva; radiazione Čerenkov

La discussione del paragrafo precedente si riferiva al caso di antenne con distribuzione di corrente sinusoidale. Questa distribuzione di corrente può essere considerata come un'onda stazionaria prodotta da due onde viaggianti senza attenuazione di eguale ampiezza ed in opposti versi lungo l'antenna. Se, tuttavia, una soltanto di tali onde è presente nell'antenna, la distribuzione di corrente è uniforme nel senso che l'ampiezza è una costante lungo l'antenna e la fase varia linearmente con la distanza.

Un'antenna ad onda viaggiante ha un'importanza considerevole in quanto la condizione di onda progressiva approssima un notevole numero di antenne. Per esempio, un'antenna filiforme chiusa nella sua impedenza caratteristica è percorsa da un'onda di corrente viaggiante, in quanto è ridotta notevolmente la riflessione; è bene, tuttavia osservare che poiché i campi di un'antenna non sono confinati nell'immediata vicinanza di un'antenna non è possibile realizzare l'adattamento con una impedenza concentrata, questa però, può fortemente ridurre la riflessione. Questo tipo di antenna è spesso chiamata antenna Beverage o antenna d'onda.

Un esempio di tale antenna è un'antenna a filo orizzontale distante dal suolo e con una estremità chiusa su una resistenza R come in figura (12.9-1).

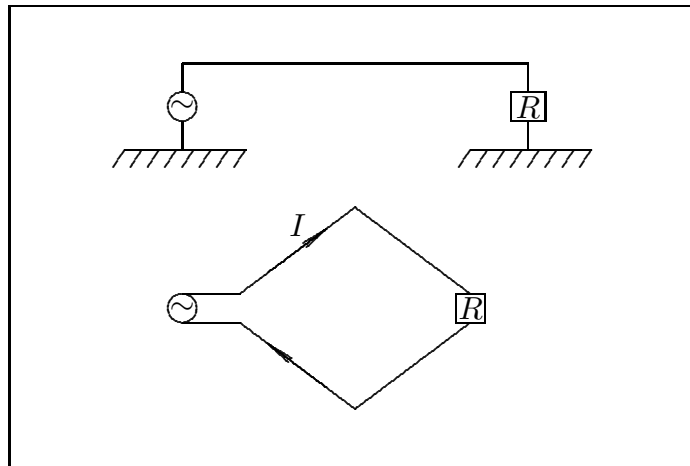


fig.12.9-1

Anche un'antenna rombica come quella della stessa figura (12.9-1) è un'antenna ad onda progressiva. Un altro tipo di antenna ad onda progressiva è l'antenna ad elica.

12.10 - Campi di radiazione di un'antenna ad onda progressiva

Ci occuperemo, quindi, di antenne rettilinee eccitate con onde di corrente viaggianti

o progressive.

Assumiamo che la distribuzione di corrente lungo un'antenna filiforme sia data da:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{z} I_0 \delta(x') \delta(y') e^{ipkz'} \quad (-l \leq z' \leq +l) \quad (12.10.1)$$

dove $k = \frac{\omega}{c}$.

Qui l'indice p é il rapporto fra la velocità della luce e la velocità dell'onda di corrente lungo l'antenna. Questo indice che é uguale o piú grande dell'unitá, dipende dal carico cui é collegata l'antenna. Se l'antenna non é collegata ad un carico, p é approssimativamente uguale all'unitá. All'aumentare del carico vi é un corrispondente aumento di p . Sostituendo l'espressione (12.10.1) nella formula (12.7.1) che fornisce l'espressione del vettore radiazione \vec{N} , si ha:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta, \phi) &= \hat{z} I_0 \int_{-l}^{+l} e^{-ikz' \cos \theta} e^{ipkz'} dz' = \hat{z} I_0 \int_{-l}^{+l} e^{-ik(\cos \theta - p)z'} dz' = \\ &= \hat{z} I_0 \frac{i}{k(\cos \theta - p)} \left[e^{-ik(\cos \theta - p)l} - e^{+ik(\cos \theta - p)l} \right] = \\ &= \hat{z} 2I_0 \frac{\sin [kl(p - \cos \theta)]}{k(p - \cos \theta)} \end{aligned} \quad (12.10.2)$$

Applicando la (11.7.14), la (11.7.18) e la (11.7.22), calcoliamo il campo elettrico, il campo magnetico ed il vettore di Poynting.

Ricordando che $\hat{z} = \hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta$ si evince che $N_\phi = 0$; quindi si ha:

$$E_\theta = -i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{ikr}}{2\pi r} I_0 \sin \theta \frac{\sin [kl(p - \cos \theta)]}{(p - \cos \theta)} \quad (12.10.3)$$

$$H_\phi = -i \frac{e^{ikr}}{2\pi r} I_0 \sin \theta \frac{\sin [kl(p - \cos \theta)]}{(p - \cos \theta)} \quad (12.10.4)$$

cioé:

$$E_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\phi \quad (12.10.5)$$

La densitá di potenza cioé la componente radiale del vettore di Poynting é:

$$S_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r^2} I_0^2 \sin^2 \theta \frac{\sin^2 [kl(p - \cos \theta)]}{(p - \cos \theta)^2} \quad (12.10.6)$$

Il fattore di forma spaziale é, quindi:

$$F(\theta) = \sin \theta \frac{\sin [kl(p - \cos \theta)]}{(p - \cos \theta)} \quad (12.10.7)$$

Se l'antenna é corta rispetto alla lunghezza d'onda cioè $kl \ll 1$ la (12.10.7) si riduce a:

$$F(\theta) = kl \sin \theta \quad (kl \ll 1) \quad (12.10.8)$$

Confrontando la (12.10.8) con la (12.8.1) notiamo che per antenne corte ($kl \ll 1$) il diagramma di radiazione di un'antenna eccitata da un'onda stazionaria di corrente ha la stessa forma del diagramma di radiazione di un'antenna eccitata da un'onda di corrente viaggiante. Tuttavia, per antenne piú lunghe i due diagrammi differiscono in maniera considerevole; la principale differenza é che il diagramma di quella eccitata con onda stazionaria é simmetrico rispetto al piano equatoriale $\theta = \frac{\pi}{2}$ mentre **il diagramma di quella eccitata con onda progressiva é asimmetrico.**

La massima radiazione di un'antenna ad onda viaggiante é confinata in un cono avente l'asse nella direzione della corrente. La semiapertura angolare del cono diminuisce all'aumentare di p o di kl .

Per $p = 1$ la (12.10.7) assume una forma relativamente piú semplice, infatti:

$$[F(\theta)]_{p=1} = \sin \theta \frac{\sin [kl(1 - \cos \theta)]}{(1 - \cos \theta)} \quad (12.10.9)$$

e ricordando che: $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ e che $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$, la (12.10.9) si scrive:

$$[F(\theta)]_{p=1} = \frac{\sin [kl(1 - \cos \theta)]}{\tan \frac{\theta}{2}} \quad (12.10.10)$$

Calcoliamo gli zeri del valore assoluto della (12.10.10).

Se la lunghezza dell'antenna $2l$ é un numero intero di semilunghezze d'onda si ha:

$$|F(\theta)| = \left| \frac{\sin (n\pi \cos \theta)}{\tan \frac{\theta}{2}} \right| \quad (12.10.11)$$

$$|F(\theta)| = \left| \frac{\cos \left(\frac{2n+1}{2} \pi \cos \theta \right)}{\tan \frac{\theta}{2}} \right| \quad (12.10.12)$$

a seconda che detto numero intero sia pari o dispari rispettivamente, cioè sia $2l = n\lambda$ ($kl = n\pi$) $n = 1, 2, 3, \dots$ per la (12.10.11) o $2l = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ [$kl = (2n+1)\frac{\pi}{2}$] $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ per la (12.10.12).

Gli zeri di $F(\theta)$ si ricavano allora dalle equazioni

$$n\pi \cos \theta = r\pi \quad e \quad (2n+1)\frac{\pi}{2} \cos \theta = (2r+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{rispettivamente} \quad (12.10.13)$$

con r numero intero; essi sono:

$$\cos \theta = \frac{r}{n} \quad e \quad \cos \theta = \frac{2r + 1}{2n + 1} \quad \text{rispettivamente} \quad (12.10.14)$$

che sono state studiate nel caso di antenne ad onda stazionaria.

Oltre alle direzioni $\theta = 0^0$ e $\theta = \pi$ si hanno nel primo caso $2n - 1$ e, nel secondo caso $2n$ altre direzioni secondo le quali il campo si annulla.

Specifichiamo alcuni esempi:

$2l = \lambda$ ($kl = \pi$) **cioé** $n = 1$:

In questo caso $r = 0$ e quindi il campo si annulla per $\theta = \frac{\pi}{2}$. Il diagramma di radiazione presenta due lobi.

$2l = 2\lambda$ ($kl = 2\pi$) **cioé** $n = 2$:

In questo caso r assume i valori $-1, 0, +1$ e quindi il campo si annulla per $\theta_1 = 120^0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_3 = 60^0$. Pertanto il diagramma di radiazione presenta 4 lobi.

$2l = 3\lambda$ ($kl = 3\pi$) **cioé** $n = 3$:

In questo caso r assume i valori $-2, -1, 0, +1, +2$ e quindi il campo si annulla per $\theta_1 = 131^0.8$, $\theta_2 = 109^0.5$, $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_4 = 70^0.5$ e $\theta_5 = 48^0.1$. Pertanto il diagramma di radiazione presenta 6 lobi.

Valutiamo, ora, la funzione $[F(\theta)]^2$ per $p = 1$ per $2l = 3\lambda$ al variare di θ .

Valori della funzione $[F(\theta)]^2$ per $2l = 3\lambda(kl = 3\pi)$

θ	$ F(\theta) ^2$	θ	$ F(\theta) ^2$	θ	$ F(\theta) ^2$
0^0	0	60^0	3	120^0	0.3333
5^0	0.675	65^0	1.3698	125^0	0.16
10^0	2.66	70^0	0.0136	130^0	0.01
15^0	5.75	75^0	0.7078	135^0	0.0237
20^0	9.3179	80^0	1.4141	140^0	0.0859
25^0	12.147	85^0	0.6383	145^0	0.0976
30^0	12.647	90^0	0	150^0	0.0652
35^0	9.88	95^0	0.45	155^0	0.0293
40^0	4.8984	100^0	0.7	160^0	0.00901
45^0	0.806	105^0	0.245	165^0	0.00172
50^0	0.2290	110^0	0.0032	170^0	0.000155
55^0	2.1825	115^0	0.225	175^0	$2.45 \cdot 10^{-6}$
				180^0	0

I diagrammi di radiazione per $2l = \lambda$ ($kl = \pi$) e $2l = 3\lambda$ ($kl = 3\pi$) sono riportati in figura (12.10-1).

Confrontando questi dati con quelli ricavabili dalla formula approssimata (12.10.8) viene confermato quanto detto precedentemente cioè che l'angolo di apertura del cono si restringe all'aumentare della lunghezza dell'antenna.

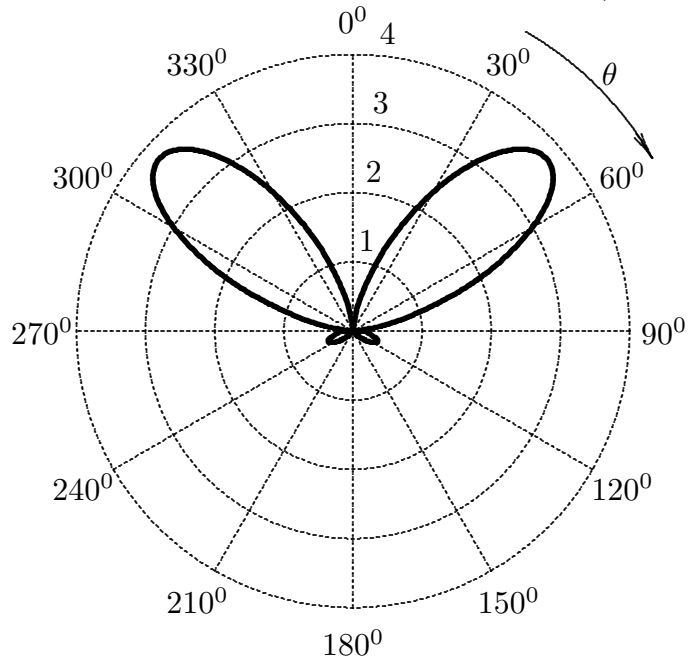
Questo tipo di radiazione somiglia alla radiazione Čerenkov che viene emessa quando elettroni veloci si muovono in un mezzo materiale.

É utile osservare che, anche in questo caso, abbiamo trovato l'importante risultato che lungo la direzione della corrente l'antenna non irradia; infatti, come risulta dalla tabella:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^0} F(\theta) = 0.$$

DIAGRAMMI DI RADIAZIONE

Antenna ad onda progressiva: $kl = \pi$ ($2l = \lambda$)



Antenna ad onda progressiva: $kl = 3\pi$ ($2l = 3\lambda$)

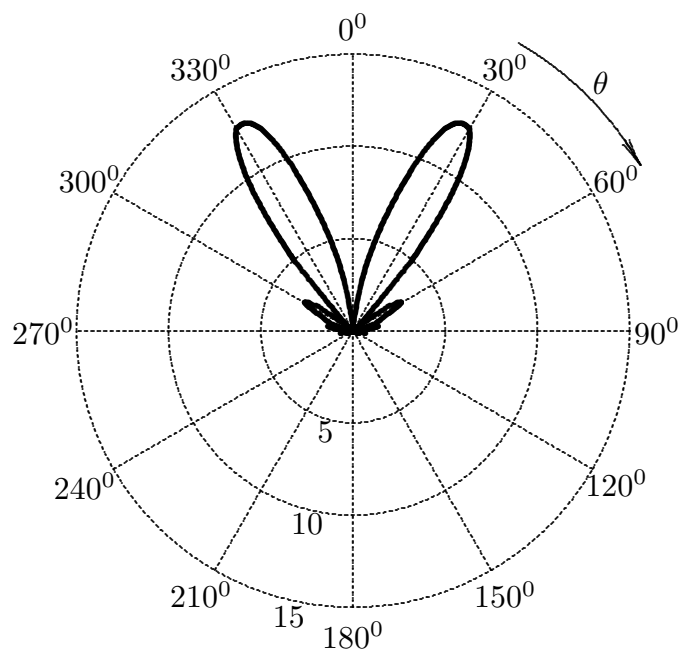


fig.12.10-1

12.11 - Campi elettromagnetici generati da cariche in moto

Supponiamo di conoscere la traiettoria di una carica puntiforme q in moto. Sia essa rappresentata dal vettore posizione $\vec{r}_0(t')$ rispetto ad un'origine assegnata. La densità di carica può essere, allora, rappresentata dalla funzione:

$$\rho(\vec{r}', t') = q\delta[\vec{r}' - \vec{r}_0(t')] \quad (12.11.1)$$

La densità di corrente associata alla carica in moto si scrive:

$$\vec{J}(\vec{r}', t') = q\vec{v}(t')\delta[\vec{r}' - \vec{r}_0(t')] \quad (12.11.2)$$

essendo:

$$\vec{v}(t') = \frac{d\vec{r}_0(t')}{dt'} \quad (12.11.3)$$

Ci proponiamo di valutare i campi elettromagnetici generati da tale carica puntiforme in moto.

Cominciamo a scrivere le formule dei potenziali ritardati:

$$\Phi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (12.11.4)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (12.11.5)$$

Sostituendo la (12.11.1) e la (12.11.2) nella (12.11.4) e nella (12.11.5) rispettivamente, si ha:

$$\Phi(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\delta\left[\vec{r}' - \vec{r}_0\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (12.11.6)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \int d^3r' \frac{\vec{v}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \delta\left[\vec{r}' - \vec{r}_0\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (12.11.7)$$

L'integrale che compare nella (12.11.6) è della forma:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \vec{r}) &= \int f(\vec{r}')\delta[\vec{g}(\vec{r}')]d^3r' = \\ &= \int f(x', y', z')\delta[g_x(x', y', z')]\delta[g_y(x', y', z')]\delta[g_z(x', y', z')]dx'dy'dz' \end{aligned} \quad (12.11.8)$$

Introdotta il determinante jacobiano:

$$\frac{\partial(g_x, g_y, g_z)}{\partial(x', y', z')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x'} & \frac{\partial g_x}{\partial y'} & \frac{\partial g_x}{\partial z'} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x'} & \frac{\partial g_y}{\partial y'} & \frac{\partial g_y}{\partial z'} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x'} & \frac{\partial g_z}{\partial y'} & \frac{\partial g_z}{\partial z'} \end{vmatrix} \quad (12.11.9)$$

l'integrale (12.11.8) si può trasformare e risolvere:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \vec{r}) &= \int f(x', y', z') \delta(g_x) \delta(g_y) \delta(g_z) \left| \frac{\partial(g_x, g_y, g_z)}{\partial(x', y', z')} \right|^{-1} dg_x dg_y dg_z = \\ &= \left[f(x', y', z') \left| \frac{\partial(g_x, g_y, g_z)}{\partial(x', y', z')} \right|^{-1} \right] \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (12.11.10)$$

Applichiamo il risultato (12.11.10) all'integrale (12.11.6) laddove la funzione $\vec{g}(\vec{r}')$ corrisponde a:

$$\vec{g}(\vec{r}') = \vec{r}' - \vec{r}_0 \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \quad (12.11.11)$$

ossia:

$$\begin{cases} g_x(\vec{r}') = x' - x_0 \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \\ g_y(\vec{r}') = y' - y_0 \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \\ g_z(\vec{r}') = z' - z_0 \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \end{cases} \quad (12.11.12)$$

Si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_x}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x'} = 1 - \frac{v_x}{c} \frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 1 - \beta_x n_x \\ \frac{\partial g_x}{\partial y'} = -\frac{\partial x_0}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y'} = -\frac{v_x}{c} \frac{y - y'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\beta_x n_y \\ \frac{\partial g_x}{\partial z'} = -\frac{\partial x_0}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z'} = -\frac{v_x}{c} \frac{z - z'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\beta_x n_z \end{cases} \quad (12.11.13)$$

Il determinante jacobiano é allora:

$$\begin{vmatrix} 1 - \beta_x n_x & -\beta_x n_y & -\beta_x n_z \\ -\beta_y n_x & 1 - \beta_y n_y & -\beta_y n_z \\ -\beta_z n_x & -\beta_z n_y & 1 - \beta_z n_z \end{vmatrix} = 1 - \beta_x n_x - \beta_y n_y - \beta_z n_z = 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n} > 0 \quad (12.11.14)$$

essendo \hat{n} il vettore unitario nella direzione dell'osservatore.

Pertanto i potenziali si scrivono:

$$V(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)_{t_{ritardato}} \quad (12.11.15)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \left(\frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}} \frac{\vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)_{t_{ritardato}} \quad (12.11.16)$$

I potenziali (12.11.15) e (12.11.16) sono i cosiddetti potenziali di **Lenard - Wiechert**†

12.12 - Campo elettromagnetico emesso da una carica puntiforme in moto

Riscriviamo il campo elettrico ed il campo di induzione magnetica emessi da una carica puntiforme in moto:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\hat{n} - \vec{\beta} \right) \frac{1 - \beta^2}{\left(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n} \right)^3 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \frac{\hat{n} \times \left[\left(\hat{n} - \vec{\beta} \right) \times \dot{\vec{\beta}} \right]}{c \left(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n} \right)^3 |\vec{r} - \vec{r}_0|} \right]_{ritardato} \quad (12.12.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\vec{v} \times \hat{n} \frac{1 - \beta^2}{\left(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n} \right)^3 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \frac{\left(\dot{\vec{\beta}} \cdot \hat{n} \right) \beta \times \hat{n} + \left(1 - \beta \cdot \hat{n} \right) \dot{\vec{\beta}} \times \hat{n}}{\left(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n} \right)^3 |\vec{r} - \vec{r}_0|} \right]_{ritardato} \quad (12.12.2)$$

É facile verificare che la (12.12.2) soddisfa alla:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \left(\hat{n} \times \vec{E} \right) \quad (12.12.3)$$

che é tipico di una radiazione elettromagnetica.

Il primo termine della (12.12.1) é funzione della distanza come $\frac{1}{r^2}$ esattamente come un campo elettrostatico.

Esso é indipendente dall'accelerazione e non é un campo che si propaga, rimane "legato" alla particella in moto. Il secondo termine della (12.12.1), designato con il simbolo \vec{E}_a , dipende dall'accelerazione $\dot{\vec{\beta}}$, ed é funzione della distanza come $\frac{1}{r}$.

Esso trasporta energia all'infinito e rappresenta il campo di radiazione. Notiamo, inoltre, che E_a é sempre ortogonale a \hat{n} .

Il vettore di Poynting competente ai campi di radiazione é:

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_a \times \vec{B}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}_a \times \left(\hat{n} \times \vec{E}_a \right) = \frac{1}{\mu_0 c} \left[\hat{n} \left(\vec{E}_a \cdot \vec{E}_a \right) - \vec{E}_a \left(\vec{E}_a \cdot \hat{n} \right) \right] = \frac{1}{\mu_0 c} E_a^2 \hat{n} \quad (12.12.4)$$

† Lenard, Philipp Eduard von (1862-1947): fisico tedesco, allievo di H.R. Hertz, insignito, nel 1905, del premio Nobel per la fisica per lo studio delle proprietà dei raggi catodici.

essendo $\vec{E}_a \cdot \hat{n} = 0$.

12.13 - Campo elettromagnetico emesso da una carica puntiforme in moto accelerato a bassa velocità ($\beta \ll 1$)

Osserviamo subito che se $\beta \ll 1$ il campo elettrico \vec{E}_a di radiazione si può scrivere:

$$\vec{E}_{a(\beta \ll 1)} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{cR} \Big|_{\text{ritardato}} \quad (12.13.1)$$

avendo posto $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$

Ne segue:

$$\vec{S}_{a(\beta \ll 1)} = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta}{c^2 R^2} \hat{n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4\pi c^3 R^2} |a|^2 \sin^2 \theta \hat{n} \quad (12.13.2)$$

essendo $|a|$ l'accelerazione della particella all'istante t ritardato e θ l'angolo formato fra la direzione dell'accelerazione e \hat{n} . Osserviamo, subito, che la densità di potenza della radiazione emessa è massima nella direzione ortogonale alla direzione della velocità e dell'accelerazione $\theta = 90^\circ$; **è nulla nella stessa direzione**. Essa è identica a quella emessa da un dipolo hertziano. La potenza totale irradiata attraverso una superficie di raggio R è:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi S_a 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4\pi c^3 R^2} 2\pi R^2 |a|^2 \sin^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2c^3} |a|^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} |a|^2 \end{aligned} \quad (12.13.3)$$

che è la formula di Larmor per la potenza irradiata da una particella carica accelerata a bassa velocità. Essa fu derivata nel 1897.

12.14 - Campo elettromagnetico emesso da una carica puntiforme in moto accelerato con velocità comparabile alla velocità della luce

Consideriamo il campo elettrico di radiazione dato dalla (12.14.1)

$$\vec{E}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{c(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3 |\vec{r} - \vec{r}_0|} \right]_{\text{ritardato}} \quad (12.14.1)$$

Il vettore di Poynting è:

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{c(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3 |\vec{r} - \vec{r}_0|} \right]_{\text{ritardato}}^2 \hat{n} \quad (12.14.2)$$

che si può scrivere:

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{(\hat{n} - \vec{\beta})(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})}{c(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3 |\vec{r} - \vec{r}_0|} \right]^2 \hat{n} \quad (12.14.3)$$

ritardato

avendo applicato l'identità vettoriale: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Segue:

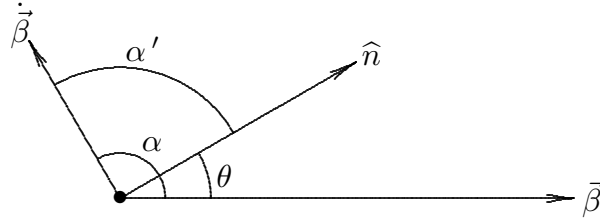
$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{(\hat{n} - \vec{\beta}) \cdot (\hat{n} - \vec{\beta})(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 + \dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\beta}}(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 - 2(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})(\hat{n} - \vec{\beta}) \cdot \dot{\vec{\beta}}(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})}{c^2(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right] \hat{n} \quad (12.14.4)$$

ritardato

Il numeratore della (12.14.4) si può scrivere:

$$\begin{aligned} & (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2(1 + \beta^2 - 2\hat{n} \cdot \vec{\beta}) + \dot{\beta}^2(1 - \hat{n} \cdot \beta)^2 - 2(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})(1 - \hat{n} \cdot \beta) + \\ & + 2(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})\dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\beta}}(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) = \\ & = (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2(1 + \beta^2 - 2\hat{n} \cdot \vec{\beta} - 2 + 2\hat{n} \cdot \vec{\beta}) + \dot{\beta}^2(1 - \hat{n} \cdot \beta)^2 + 2(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})\dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\beta}}(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) = \\ & = (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2(\beta^2 - 1) + \dot{\beta}^2(1 - \hat{n} \cdot \beta)^2 + 2(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})\dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\beta}}(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \end{aligned} \quad (12.14.5)$$

Consideriamo un sistema di riferimento polare con l'asse polare orientato lungo la direzione della velocità $\vec{\beta}$ e sia \hat{n} il versore indicante la direzione dell'osservatore. Sia θ l'angolo fra $\vec{\beta}$ e \hat{n} ; sia α l'angolo fra β e $\dot{\vec{\beta}}$ e α' l'angolo fra \hat{n} e $\dot{\vec{\beta}}$.



Il numeratore della (12.14.4) si può, allora, scrivere:

$$(\beta^2 - 1)\dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha' + \dot{\beta}^2(1 - \beta \cos \theta)^2 + 2\beta\dot{\beta}^2 \cos \alpha \cos \alpha'(1 - \beta \cos \theta) \quad (12.14.6)$$

e, quindi:

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{(\beta^2 - 1)\dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha' + \dot{\beta}^2(1 - \beta \cos \theta)^2 + 2\beta\dot{\beta}^2 \cos \alpha \cos \alpha'(1 - \beta \cos \theta)}{c^2(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right] \hat{n} \quad (12.14.7)$$

ritardato

12.15 - Campo elettromagnetico emesso da una carica puntiforme in moto accelerato con velocità comparabile alla velocità della luce - Caso $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$

In questo caso $\alpha = 0$ e $\cos \alpha' = \cos \theta$, ne segue:

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{(\beta^2 - 1)\dot{\beta}^2 \cos^2 \theta + \dot{\beta}^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 + 2\beta \dot{\beta}^2 \cos \theta (1 - \beta \cos \theta)}{c^2 (1 - \beta \cos \theta)^6 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right] \hat{n} \quad (12.15.1)$$

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{\dot{\beta}^2 (\beta^2 \cos^2 \theta - \cos^2 \theta + 1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2 \cos^2 \theta + 2\beta \cos \theta - 2\beta^2 \cos^2 \theta)}{c^2 (1 - \beta \cos \theta)^6 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right] \hat{n} \quad (12.15.2)$$

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta}{c^2 (1 - \beta \cos \theta)^6 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right] \hat{n} \quad (12.15.3)$$

Consideriamo il fattore di forma:

$$F(\theta) = \frac{\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \quad (12.15.4)$$

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta} = \dot{\beta}^2 \frac{2(1 - \beta \cos \theta)^6 \sin \theta \cos \theta - 6\beta (1 - \beta \cos \theta)^5 \sin^3 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^{12}} \quad (12.15.5)$$

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta} = \dot{\beta}^2 \frac{2(1 - \beta \cos \theta) \sin \theta \cos \theta - 6\beta \sin^3 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^7} \quad (12.15.6)$$

che si annulla quando:

$$\begin{cases} \sin \theta = 0 \\ 4\beta \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 6\beta = 0 \end{cases} \quad (12.15.7)$$

Escludendo la soluzione $\theta = 0^0$, in quanto in tale direzione la particella non irradia come si deduce dalla (12.15.3), la direzione di massima irradiazione si ottiene risolvendo la seconda delle (12.15.7):

$$\cos \theta_{max} = \frac{1}{4\beta} \left(\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1 \right) \quad (12.15.8)$$

avendo, ovviamente, escluso la soluzione con il segno meno davanti alla radice quadrata.

Osserviamo che certamente la soluzione (12.15.8) é un massimo in quanto il vettore di Poynting presenta un minimo (di valore zero) soltanto nella direzione $\theta = 0^0$.

Segue, quindi:

$$\theta_{max} = \arccos \left[\frac{1}{4\beta} \left(\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1 \right) \right] \quad (12.15.9)$$

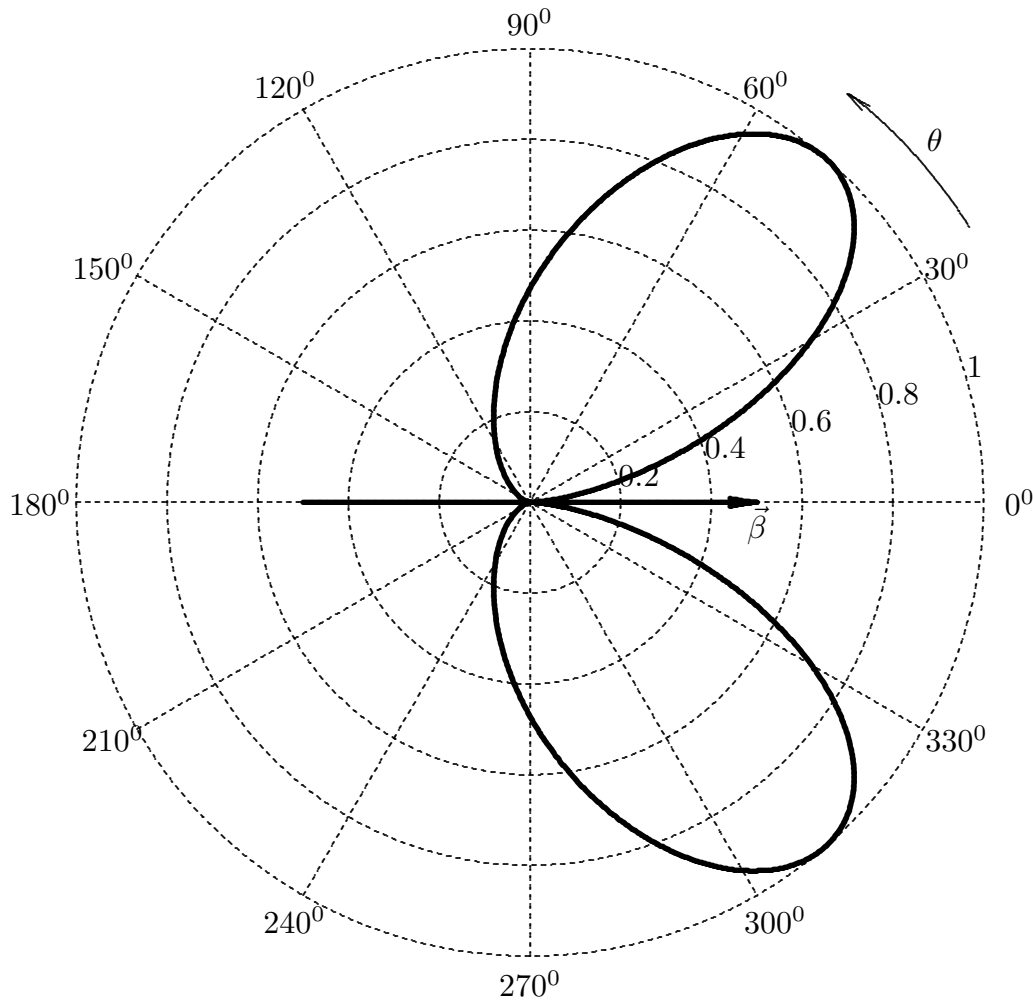
Risulta:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \theta_{max} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \arccos \left[\frac{1}{4\beta} \left(\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1 \right) \right] \right\} = \frac{\pi}{2} \quad (12.15.10)$$

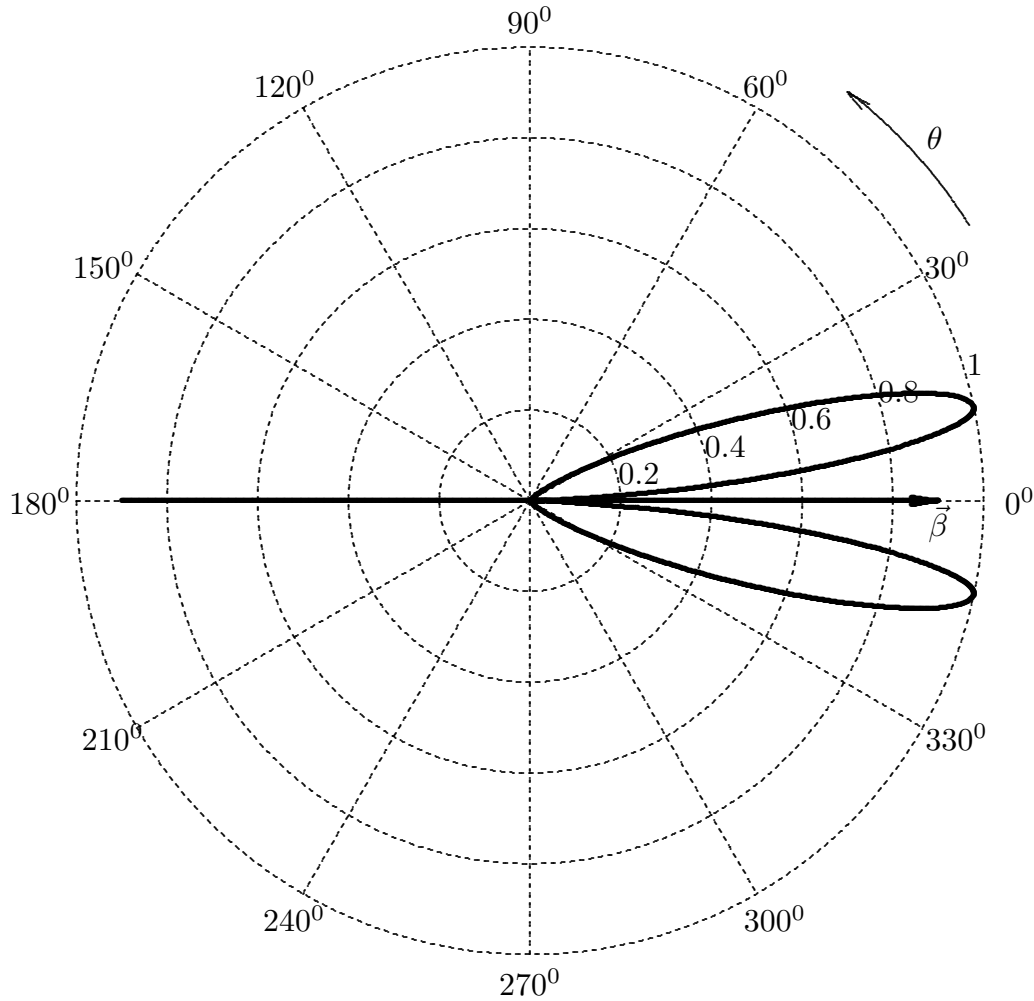
$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \theta_{max} = \lim_{\beta \rightarrow 1} \left\{ \arccos \left[\frac{1}{4\beta} \left(\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1 \right) \right] \right\} = 0^\circ \quad (12.15.11)$$

β	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
θ_{max}	90°	$73^\circ.5$	60°	$49^\circ.6$	$41^\circ.4$	$34^\circ.6$
β	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	1
θ_{max}	$28^\circ.71$	$23^\circ.27$	$17^\circ.92$	$12^\circ.2$	$8^\circ.29$	0°

Si deduce che all'aumentare di β la distribuzione angolare diviene sempre piú piccata in avanti.



Distribuzione angolare normalizzata : $\beta=0.3$



Distribuzione angolare normalizzata : $\beta=0.9$

É utile ricordare che l'intensità di radiazione graficata corrisponde ad un istante t associato al comportamento della particella $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$

12.16 - Campo elettromagnetico emesso da una carica puntiforme in moto circolare: radiazione di sincrotrone

Desideriamo applicare i risultati ottenuti al caso di una particella carica descrivente un'orbita circolare. In tal caso la radiazione emessa prende il nome di **radiazione di sincrotrone**.

Sia un sistema

Consideriamo la (12.15.7):

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{(\beta^2 - 1)\dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha' + \dot{\beta}^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 + 2\beta\dot{\beta}^2 \cos \alpha \cos \alpha' (1 - \beta \cos \theta)}{c^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right] \hat{n} \quad (12.15.7)_{\text{ritardato}}$$

Posto $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\cos \alpha' = \sin \theta$ si ha:

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{(\beta^2 - 1)\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta + \dot{\beta}^2 (1 - \beta \cos \theta)^2}{c^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right] \hat{n} \quad (12.16.1)$$

ritardato

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{\dot{\beta}^2 (\beta^2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta + 1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2 \cos^2 \theta)}{c^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right] \hat{n} \quad (12.16.2)$$

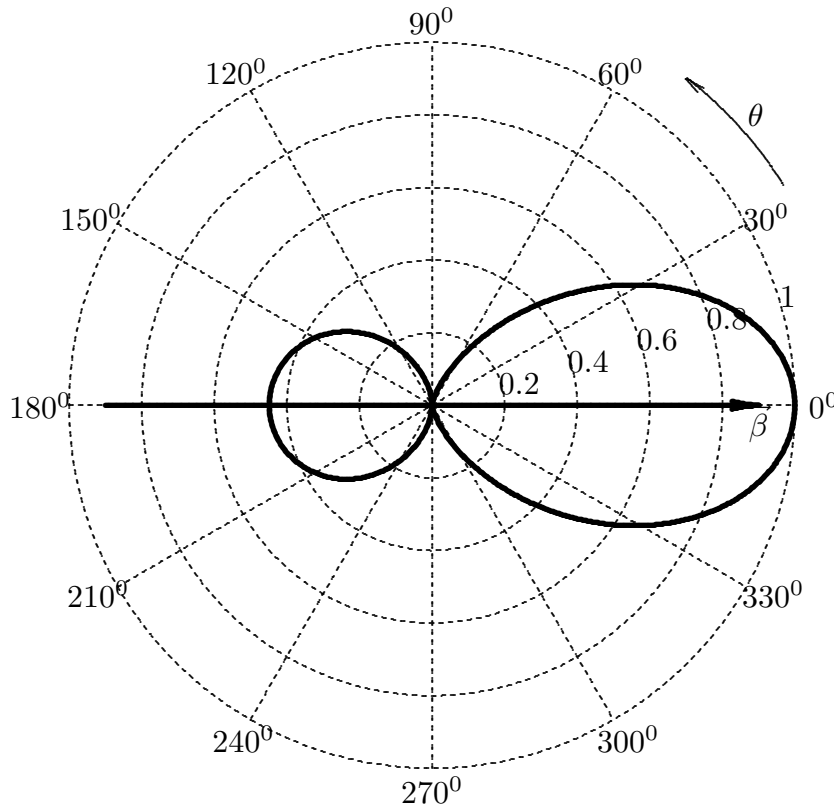
ritardato

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{\dot{\beta}^2 (\beta^2 + \cos^2 \theta - 2\beta \cos \theta)}{c^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right] \hat{n} \quad (12.16.3)$$

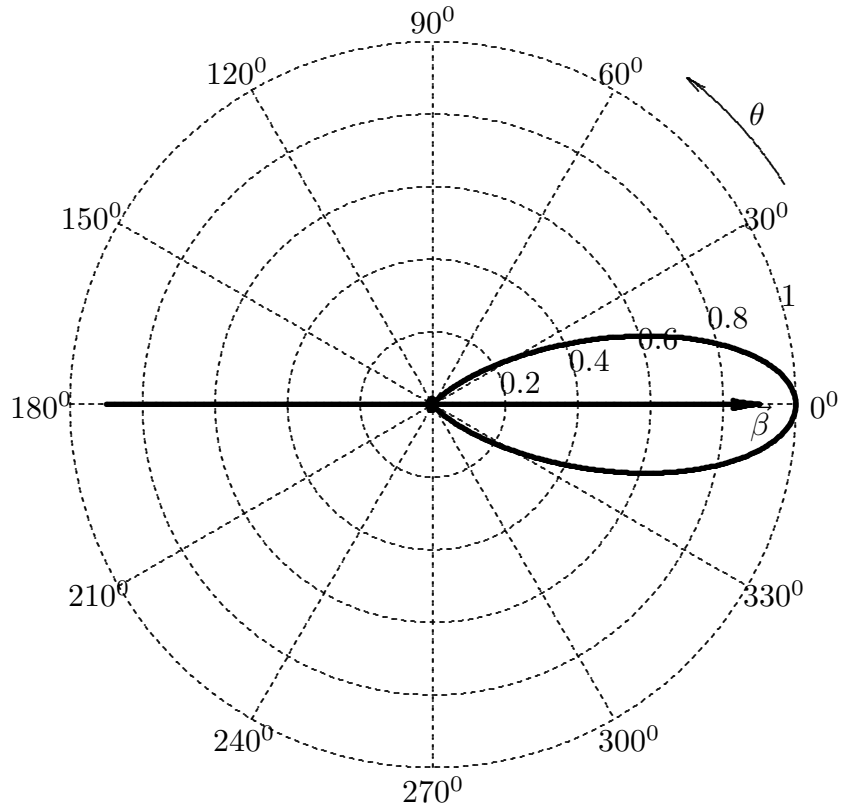
ritardato

$$\vec{S}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{\dot{\beta}^2 (\cos \theta - \beta)^2}{c^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right] \hat{n} \quad (12.16.4)$$

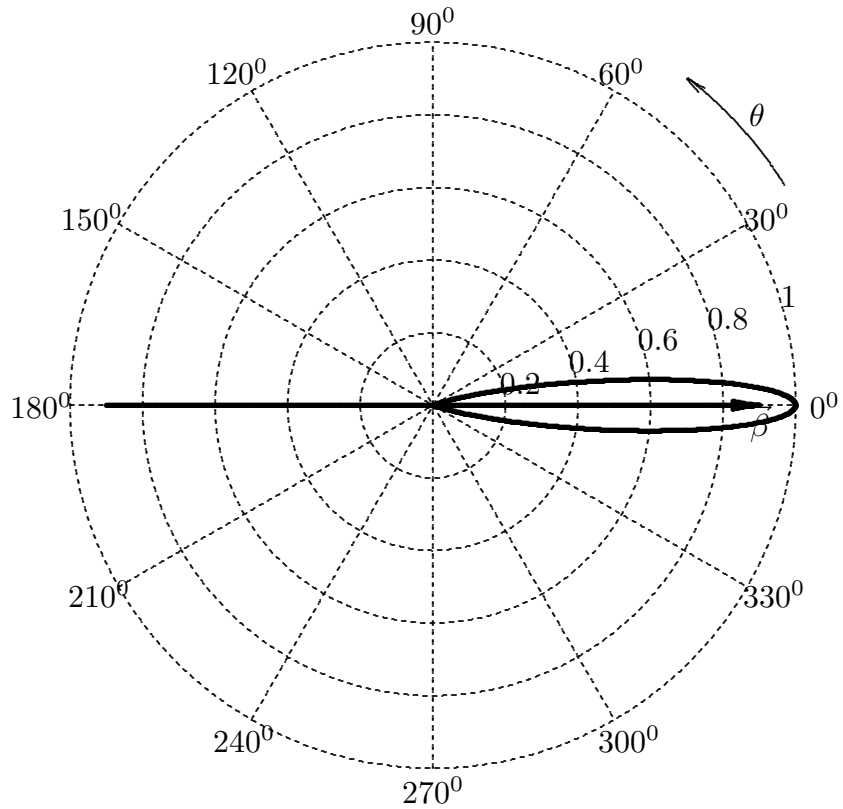
ritardato



Distribuzione angolare normalizzata : $\beta=0.1$



Distribuzione angolare normalizzata : $\beta=0.5$



Distribuzione angolare normalizzata : $\beta=0.9$

Nei diagrammi precedenti sono illustrati alcuni diagrammi di radiazione competenti a diversi valori di β . Si deduce che, per particelle relativistiche e ultrarelativistiche, il diagramma di radiazione é molto piccato in avanti. Ciò é possibile ottenerlo nei sincrotroni dove si possono accelerare elettroni fino ad energie elevatissime. Il moto degli elettroni in tali acceleratori é circolare. É questo il motivo per cui tale radiazione prende il nome di radiazione di sincrotrone.