

Cap. 11

Campo elettromagnetico irradiato da sorgenti elementari - Campi di radiazione

I - Introduzione storica

Consideriamo un circuito RLC in serie:

L'equazione del circuito é:

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} + Ri(t) = 0 \quad (11.I.1)$$

ossia:

$$L \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (11.I.2)$$

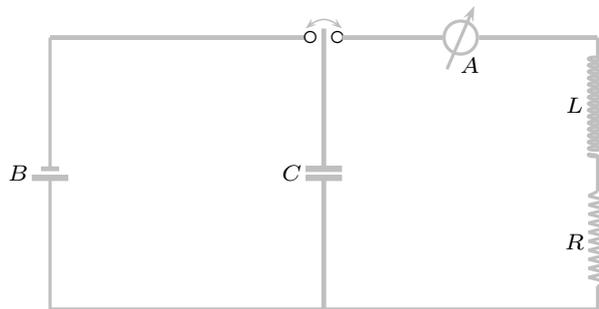


fig.11.I.1

L'equazione (11.I.2) si puó scrivere:

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{LC} = 0 \quad (11.I.3)$$

L'equazione algebrica caratteristica di tale equazione é:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0 \quad (11.I.4)$$

le cui soluzioni sono:

$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (11.I.5)$$

$$\alpha_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (11.I.6)$$

Se risulta $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ ossia $R^2 > 4\frac{L}{C}$, le due radici α_1 e α_2 sono reali e distinte e la soluzione della (11.I.3) é:

$$Q(t) = c_1 e^{\left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} \quad (11.I.7)$$

Se risulta $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ ossia $R^2 = 4\frac{L}{C}$, le due radici α_1 e α_2 sono reali e coincidenti e la soluzione della (11.I.3) é:

$$Q(t) = c_1 e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} + c_2 t e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} \quad (11.I.8)$$

Se risulta $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ ossia $R^2 < 4\frac{L}{C}$, le due radici α_1 e α_2 sono complesse e coniugate e la soluzione della (11.I.3) é:

$$Q(t) = c_1 e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t\right) + c_2 e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t\right) \quad (11.I.9)$$

Posto:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{4L - R^2C}{4L^2C}} \quad (11.I.10)$$

l'equazione (11.I.9) si può scrivere:

$$Q(t) = c_1 e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} \cos \omega t + c_2 e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} \sin \omega t \quad (11.I.11)$$

Le costanti c_1 e c_2 si determinano con le condizioni al contorno. Sia per $t = 0$, $Q(0) = Q_0$.

$$Q(0) = c_1 = Q_0 \quad (11.I.12)$$

Quindi:

$$Q(t) = e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} (Q_0 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \left(-\frac{R}{2L}\right) e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} [Q_0 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t] + e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} [-Q_0 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t] \quad (11.I.13)$$

Per $t = 0$, $\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{t=0} = 0$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{t=0} = \left(-\frac{R}{2L}\right) Q_0 + c_2 \omega = 0 \quad (11.I.14)$$

da cui:

$$c_2 = \frac{R}{2L\omega} Q_0 \quad (11.I.15)$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = & \left(-\frac{R}{2L}\right) e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} \left[Q_0 \cos \omega t + \frac{R}{2L\omega} Q_0 \sin \omega t \right] + \\ & + e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} \left[-Q_0 \omega \sin \omega t + \frac{R}{2L\omega} Q_0 \omega \cos \omega t \right] \end{aligned} \quad (11.I.16)$$

ossia:

$$\frac{dQ}{dt} = \left(-\frac{R}{2L}\right) e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} \left[\frac{R}{2L\omega} Q_0 \sin \omega t \right] + e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} [-Q_0 \omega \sin \omega t] \quad (11.I.17)$$

$$\frac{dQ}{dt} = e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} Q_0 \sin \omega t \left[\left(-\frac{R}{2L}\right) \frac{R}{2L\omega} - \omega \right] \quad (11.I.18)$$

$$\frac{dQ}{dt} = e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} Q_0 \sin \omega t \left[\frac{-R^2 - 4L^2\omega^2}{4L^2\omega} \right] \quad (11.I.19)$$

$$\left[\frac{-R^2 - 4L^2\omega^2}{4L^2\omega} \right] = \left[\frac{-R^2 - 4L^2 \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)}{4L^2\omega} \right] = \left[\frac{-\frac{4L}{C}}{4L^2\omega} \right] = -\frac{1}{\omega LC} \quad (11.I.20)$$

Quindi:

$$i = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\omega LC} e^{\left(-\frac{R}{2L}\right)t} \sin \omega t \quad (11.I.21)$$

L'equazione (11.I.21) é quello di una corrente sinusoidale smorzata, rappresentata dalla figura 11.I-2.

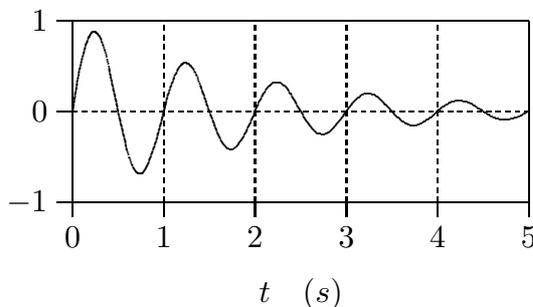


fig.11.I-2

Se la resistenza é trascurabile la corrente é monocromatica di frequenza:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (11.I.22)$$

e di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (11.I.23)$$

Per ottenere dei periodi estremamente corti, bisogna diminuire la capacità del condensatore, e ridurre al minimo il coefficiente di autoinduzione del circuito. Per questo Heinrich Hertz scelse per il suo eccitatore il seguente schema:

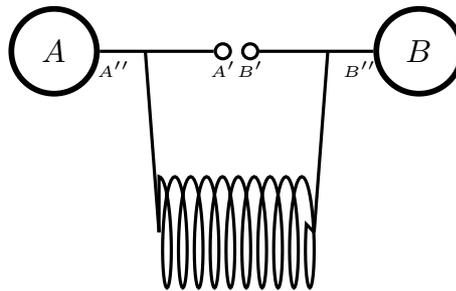


fig.11.I-3

L'eccitatore di Hertz (fig.11.I-3) é composto da due corpi metallici A e B collegati da due asticelle a due biglie A' e B' fra le quali si fa scoccare una scintilla. L'esistenza di questo tipo di oscillazioni é stato mostrato nel 1858 da Feddersen esaminando per mezzo di uno specchio ruotante la scintilla nella scarica di un condensatore.

11.1 - Elemento di corrente filiforme: dipolo elettrico hertziano

Si consideri un elemento di corrente filiforme, di lunghezza l . Esso é orientato secondo l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano con il suo centro coincidente con l'origine. Il filo lo supponiamo sufficientemente corto (al limite infinitesimo) in modo tale da considerare la corrente **spazialmente uniforme** sulla intera lunghezza. Sia $e^{-i\omega t}$ la variazione temporale della corrente che quindi supponiamo monocromatica e sia I l'intensità massima. Poiché la corrente non può annullarsi bruscamente agli estremi dell'elemento, si può immaginare che il tratto l sia solo una piccola parte di un filo percorso da corrente, oppure che agli estremi di questo vi siano due serbatoi di carica elettrica (sulla cui realizzazione pratica ne discuteremo in seguito) che assicurano la continuità della corrente.

Questo modello rispecchia **l'esperimento mediante il quale Hertz nel 1887 generó per la prima volta radiazione elettromagnetica**; per questo prende il nome di **dipolo elettrico Hertziano**.

L'espressione per la densità di corrente é:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{z}\delta(x')\delta(y')J_0 \quad (11.1.1)$$

dove $J_0 = 0$ per $|z| > \frac{l}{2}$.

D'altra parte, poiché:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} d^2r = \int_S \delta(x')\delta(y')J_0 dx' dy' = J_0 \quad (11.1.2)$$

si ha:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{z}I\delta(x')\delta(y') \quad (11.1.3)$$

Ci proponiamo di calcolare il campo irradiato da una tale distribuzione utilizzando le formule (10.4.12) e (10.4.13) dopo aver sostituito in esse la (10.2.36).

Cominciamo con il campo elettrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu \left[\vec{I} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \right] \cdot \int_V \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \hat{z}I\delta(x')\delta(y') d^3r' \quad (11.1.4)$$

Sfruttando la proprietà integrale della funzione delta, si ha:

$$\int_V \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \hat{z}I\delta(x')\delta(y') dx' dy' dz' = \hat{z}I \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{z}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{z}'|} dz' \quad (11.1.5)$$

Poiché, per ipotesi, il filo è molto corto, possiamo trascurare z' rispetto a r e scrivere:

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{z}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{z}'|} dz' = l \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (11.1.6)$$

Il potenziale vettore dell'elemento è perciò:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{z}\mu Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (11.1.7)$$

Ne segue, quindi:

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu \left[\vec{I} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \right] \cdot \hat{z}Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (11.1.8)$$

Poiché per la (10.4.10) $\vec{I} \cdot \hat{z} = \hat{z}$ e per la (10.4.11) $(\vec{\nabla} \vec{\nabla}) \cdot \hat{z}f = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \hat{z}f) = \vec{\nabla} \frac{\partial f}{\partial z}$, la (11.1.8) si scrive:

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu Il \left(\hat{z} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (11.1.9)$$

A questo punto conviene considerare un sistema di coordinate sferiche (r, θ, ϕ) .

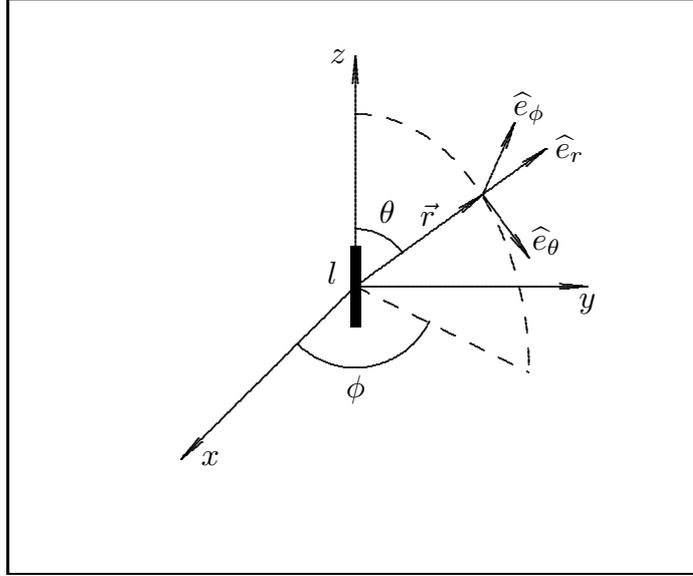


fig.11.1-1

Le trasformazioni sono:

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \phi & \hat{x} &= \hat{e}_r \sin \theta \cos \phi + \hat{e}_\theta \cos \theta \cos \phi - \hat{e}_\phi \sin \phi \\
 y &= r \sin \theta \sin \phi & \hat{y} &= \hat{e}_r \sin \theta \sin \phi + \hat{e}_\theta \cos \theta \sin \phi + \hat{e}_\phi \cos \phi \\
 z &= r \cos \theta & \hat{z} &= \hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{11.1.10}$$

$$\vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi
 \tag{11.1.11}$$

Calcoliamo a parte la quantità $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right)$ dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) &= \frac{1}{4\pi} \frac{ike^{ikr} \left(\frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) r - \left(\frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) e^{ikr}}{r^2} = \\
 &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(ik \frac{z}{r} - \frac{z}{r^2} \right) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{11.1.12}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}) &= \\
 = i\omega\mu I l &\left[(\hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta) + \frac{1}{k^2} \left(\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos \theta \right] \frac{e^{ikr}}{4\pi r}
 \end{aligned}
 \tag{11.1.13}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu Il\hat{e}_r \left[\cos\theta \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \frac{1}{k^2} ik \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) - \frac{1}{k^2} \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} \right) \right] + \\ + i\omega\mu Il\hat{e}_\theta \left[-\sin\theta \frac{e^{ikr}}{4\pi r} - \frac{1}{k^2 r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin\theta \right] \end{aligned} \quad (11.1.14)$$

Poiché:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} \right) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(\frac{ik}{r} - \frac{2}{r^2} \right) \quad (11.1.15)$$

risulta:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu Il\hat{e}_r \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(\cos\theta - \cos\theta - \frac{i}{kr} \cos\theta - \frac{i}{kr} \cos\theta + \frac{2}{k^2 r^2} \cos\theta \right) + \\ + i\omega\mu Il\hat{e}_\theta \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(-\sin\theta - \frac{i}{kr} \sin\theta + \frac{1}{k^2 r^2} \sin\theta \right) \end{aligned} \quad (11.1.16)$$

In definitiva:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left\{ \hat{e}_r \left[\frac{i}{kr} + \left(\frac{i}{kr} \right)^2 \right] 2 \cos\theta + \hat{e}_\theta \left[1 + \frac{i}{kr} + \left(\frac{i}{kr} \right)^2 \right] \sin\theta \right\} \quad (11.1.17)$$

Per la (10.4.13):

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (11.1.18)$$

che per la (11.1.7) si scrive:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \hat{z} \mu Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (11.1.19)$$

Applichiamo l'identitá vettoriale:

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{F}) = \vec{\nabla} \phi \times \vec{F} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (11.1.20)$$

dove ϕ e \vec{F} sono due arbitrarie funzioni scalare e vettoriale rispettivamente.

La (11.1.19), tenendo conto che $\vec{\nabla} \times \hat{z} = 0$, diventa:

$$\vec{H}(\vec{r}) = Il \vec{\nabla} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) \times \hat{z} \quad (11.1.21)$$

che in coordinate sferiche si scrive:

$$\vec{H}(\vec{r}) = Il \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) \times (\hat{e}_r \cos\theta - \hat{e}_\theta \sin\theta) = -Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \hat{e}_\phi \left(ik - \frac{1}{r} \right) \sin\theta \quad (11.1.22)$$

in quanto $\hat{e}_r \times \hat{e}_r = 0$ e $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi$.

In definitiva il campo elettromagnetico irradiato da un filamento di corrente é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left\{ \hat{e}_r \left[\frac{i}{kr} + \left(\frac{i}{kr} \right)^2 \right] 2 \cos \theta + \hat{e}_\theta \left[1 + \frac{i}{kr} + \left(\frac{i}{kr} \right)^2 \right] \sin \theta \right\} \quad (11.1.23)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\hat{e}_\phi ikIl \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \sin \theta \quad (11.1.24)$$

11.2 - Potenza irradiata dal dipolo hertziano

Calcoliamo, ora, la densità di potenza irradiata dal nostro sistema; per questo valutiamo il vettore di Poynting complesso $\vec{S}_c = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*)$ la cui parte reale rappresenta, come sappiamo, la densità di potenza mediata in un periodo.

Tenendo presente che:

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi = -\hat{e}_\theta \quad \text{e che} \quad \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_r \quad (11.2.1)$$

dalle (11.1.23) e (11.1.24), si ha:

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2} Z \left(\frac{kIl}{4\pi r} \right)^2 \left\{ \hat{e}_r \left[1 - \left(\frac{i}{kr} \right)^3 \right] \sin^2 \theta - \hat{e}_\theta \left[\left(\frac{i}{kr} \right) - \left(\frac{i}{kr} \right)^3 \right] \sin 2\theta \right\} \quad (11.2.2)$$

dove: $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ e $\omega = \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

La parte reale rappresenta la densità superficiale di potenza mediata in un periodo:

$$\langle \vec{S} \rangle = \Re\{\vec{S}_c\} = \hat{e}_r \frac{Z}{2} \left(\frac{kIl}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (11.2.3)$$

Calcoliamo, adesso, la potenza totale irradiata attraverso una superficie chiusa che racchiude il dipolo hertziano; per questo scegliamo una sfera di raggio r , tenendo conto, dalla (11.2.3), che la parte reale del vettore di Poynting è diretta radialmente.

$$P = \int_{sfera} \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} d^2r = \int_{sfera} |\langle \vec{S} \rangle| r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{Z}{2} \left(\frac{kIl}{4\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (11.2.4)$$

in quanto l'elemento di superficie di una sfera è $(r \sin \theta d\phi)(rd\theta) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$

Poiché

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_1^{-1} -\sin^2 \theta d \cos \theta = - \int_1^{-1} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{4}{3} \quad (11.2.5)$$

risulta:

$$P = \frac{4}{3} \pi Z \left(\frac{kIl}{4\pi} \right)^2 \quad (11.2.6)$$

La parte reale della potenza (potenza attiva) risulta indipendente da r , come conseguenza della ipotizzata assenza di perdite del mezzo.

La potenza attiva mediata in un periodo che fluisce attraverso una superficie sferica di raggio r_1 è pari dunque a quella che fluisce attraverso una superficie sferica di raggio r_2 . È questa la potenza che dal dipolo si diparte, per r via via crescenti, verso l'infinito; essa coincide con quella irradiata dal dipolo. È importante osservare che la densità di

potenza data dalla (11.2.3) decresce come $\frac{1}{r^2}$, essa cioè é data dai contributi **dei campi che decrescono come $\frac{1}{r}$** ; questi ultimi, come vedremo, prendono, per questo, il nome di termini radiativi in quanto soltanto essi contribuiscono alla potenza irradiata. Nel caso del dipolo hertziano soltanto la componente del campo elettrico lungo θ é radiativa.

É istruttivo, ora, esaminare la parte immaginaria del vettore di Poynting complesso:

$$\Im \left\{ \vec{S}_c \right\} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{kIl}{4\pi r} \right)^2 \frac{1}{k^3 r^3} \sin^2 \theta \hat{e}_r - \frac{1}{2} Z \left(\frac{kIl}{4\pi r} \right)^2 \left(\frac{1}{kr} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) \sin 2\theta \hat{e}_\theta \quad (11.2.7)$$

e calcoliamo l'integrale di essa su una sfera di raggio r (potenza reattiva).

$$P_{\text{reattiva}} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{kIl}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{k^3} \int_{\text{sfera}} \frac{1}{r^5} r^2 \sin^3 \theta d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi Z \left(\frac{kIl}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{k^3 r^3} \quad (11.2.8)$$

La potenza reattiva dipende da r e rappresenta lo squilibrio fra l'energia media magnetica e quella elettrica. Questo squilibrio tende a zero per $r \rightarrow \infty$ confermando il fatto che per un'onda piana le densità di energia elettrica e magnetica sono eguali.

11.3 - Campi di radiazione o far fields

Da quanto abbiamo visto, per il dipolo hertziano hanno importanza soltanto i campi lontano dalla sorgente (**far zone**) cioè quelli che si ottengono dalle (11.1.23) e (11.1.24) quando $kr \gg 1$ in modo da poter trascurare i termini di ordine piú alto di $\frac{1}{kr}$.

I campi elettrici e magnetici nella far zone o **zona di radiazione** sono:

$$\vec{E} = -\hat{e}_\theta i\omega\mu Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta = \hat{e}_\theta E_\theta \quad (11.3.1)$$

$$\vec{H} = -\hat{e}_\phi ikIl \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta = \hat{e}_\phi \frac{1}{Z} E_\theta \quad (11.3.2)$$

Viceversa, nella zona vicino all'antenna, essi si ottengono dalle (11.1.23) e (11.1.24) quando $kr < 1$ cioè fino ad una distanza dall'antenna di circa $\frac{1}{6}$ di lunghezza d'onda.

$$\vec{E} = i\omega\mu Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r^3} \frac{2}{k^2} \cos \theta \hat{e}_r + i\omega\mu Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r^3} \frac{1}{k^2} \sin \theta \hat{e}_\theta \quad (11.3.3)$$

$$\vec{H} = Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} \sin \theta \hat{e}_\phi \quad (11.3.4)$$

Infine, é da notare che i campi dati dalle formule (11.1.23) e (11.1.24) dipendono dal prodotto Il e non separatamente da I e da l ; tali formule sono esatte se $l \rightarrow 0$ che formalmente si puó fare purché si mantenga costante il prodotto Il .

11.4 - Linee di forza del campo elettrico irradiato da un dipolo hertziano

Lo studio delle linee di forza del campo elettrico di un dipolo richiede considerazioni non del tutto immediate che cercheremo qui di esporre.

Anzitutto osserviamo che essendo $E_\phi = 0$ ed E_r, E_θ indipendenti da ϕ , il campo elettrico é identico in ogni semipiano $\phi = costante$; basterá perciò descriverne le linee di forza in uno di questi semipiani. É da notare che le linee di forza sono in ogni loro punto P tangenti al vettore campo elettrico (reale) $Re\{\vec{E}(P)\}$, le cui componenti sono le parti reali $Re\{E_r(P)\}, Re\{E_\theta(P)\}$ di E_r, E_θ rispettivamente. Dalle formule del campo elettromagnetico del dipolo hertziano, ponendo $I = I_0 e^{-i\omega t}$ con I_0 reale (il che é sempre lecito, con opportuna scelta dell'origine dei tempi) e $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$, si ha:

$$\Re\{E_r\} = \frac{I_0 l}{2\pi\omega\epsilon r^2} \left[\frac{\sin(\omega t - kr)}{r} + k \cos(\omega t - kr) \right] \cos \theta \quad (11.4.1)$$

$$\Re\{E_\theta\} = \frac{I_0 l}{4\pi\omega\epsilon r} \left[\frac{\sin(\omega t - kr)}{r^2} + \frac{k \cos(\omega t - kr)}{r} - k^2 \sin(\omega t - kr) \right] \sin \theta \quad (11.4.2)$$

Sia P_0 la posizione del dipolo e P un generico punto campo; siano \hat{e}_r e \hat{e}_θ i versori ortogonali individuanti la direzione di $Re\{E_r\}$ e di $Re\{E_\theta\}$. Sia, ora, $d\vec{s}$ un vettore infinitesimo, tangente in P alla linea di forza elettrica; esso appartiene al piano $P, \vec{r}, \hat{e}_\theta$ in quanto la componente E_ϕ é nulla.

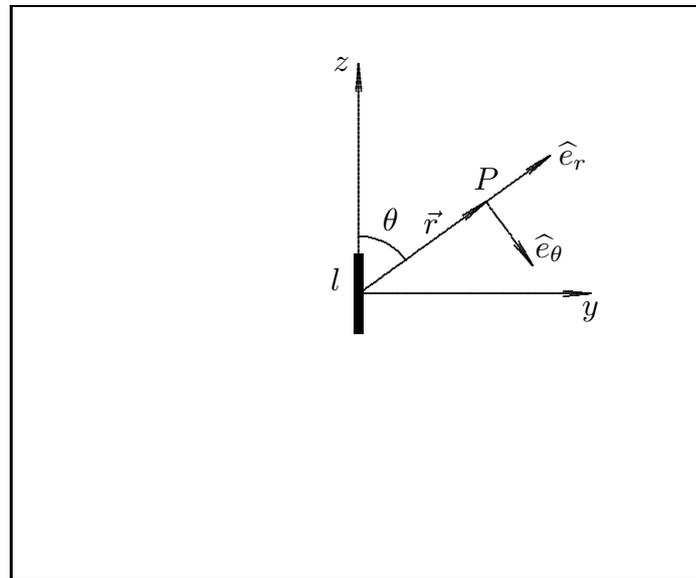


fig.11.4-1

L'equazione della linea di forza passante per P é, come sappiamo:

$$\Re\{\vec{E}\} \times d\vec{s} = 0 \quad (11.4.3)$$

In componenti la (11.4.3) si scrive:

$$\Re \{E_r\} r d\theta - \Re \{E_\theta\} dr = 0 \quad (11.4.4)$$

Sostituendo nella (11.4.4) le (11.4.1) e (11.4.2) dopo aver eliminato il fattore $\frac{I_0 l}{4\pi\omega\epsilon r}$ e moltiplicato per $\sin\theta$, si ha:

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{\sin(\omega t - kr)}{r} + k \cos(\omega t - kr) \right) \cos\theta \sin\theta d\theta - \\ & - \left(\frac{\sin(\omega t - kr)}{r^2} + k \frac{\cos(\omega t - kr)}{r} - k^2 \sin(\omega t - kr) \right) \sin^2\theta dr = 0 \end{aligned} \quad (11.4.5)$$

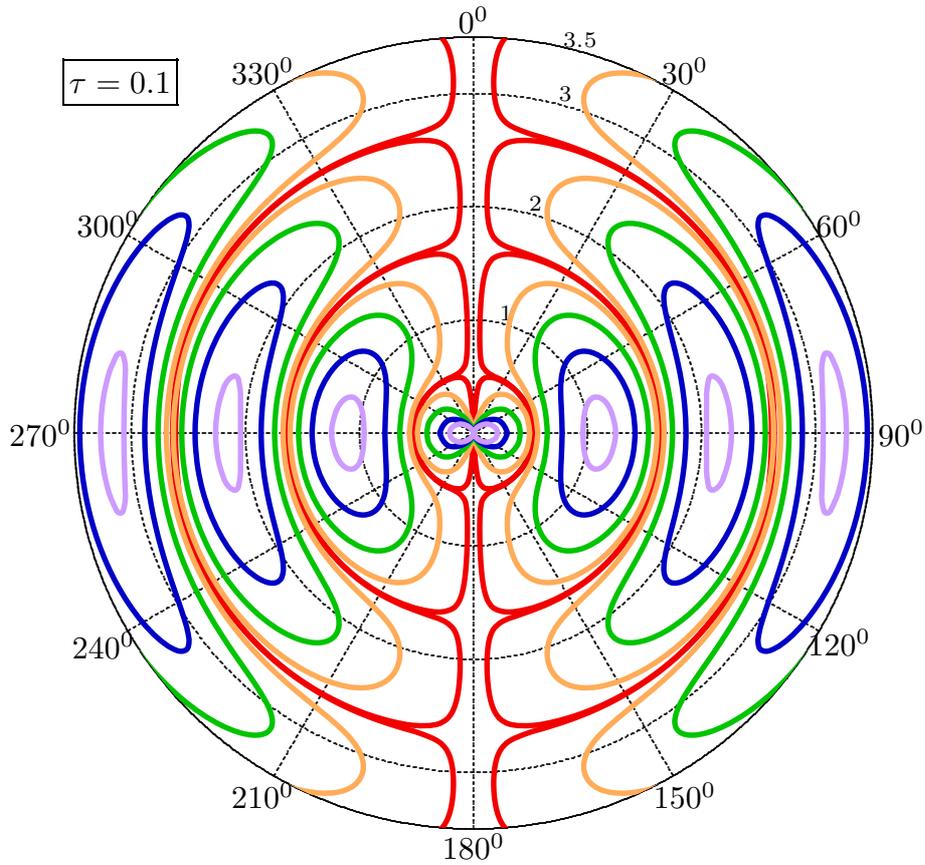
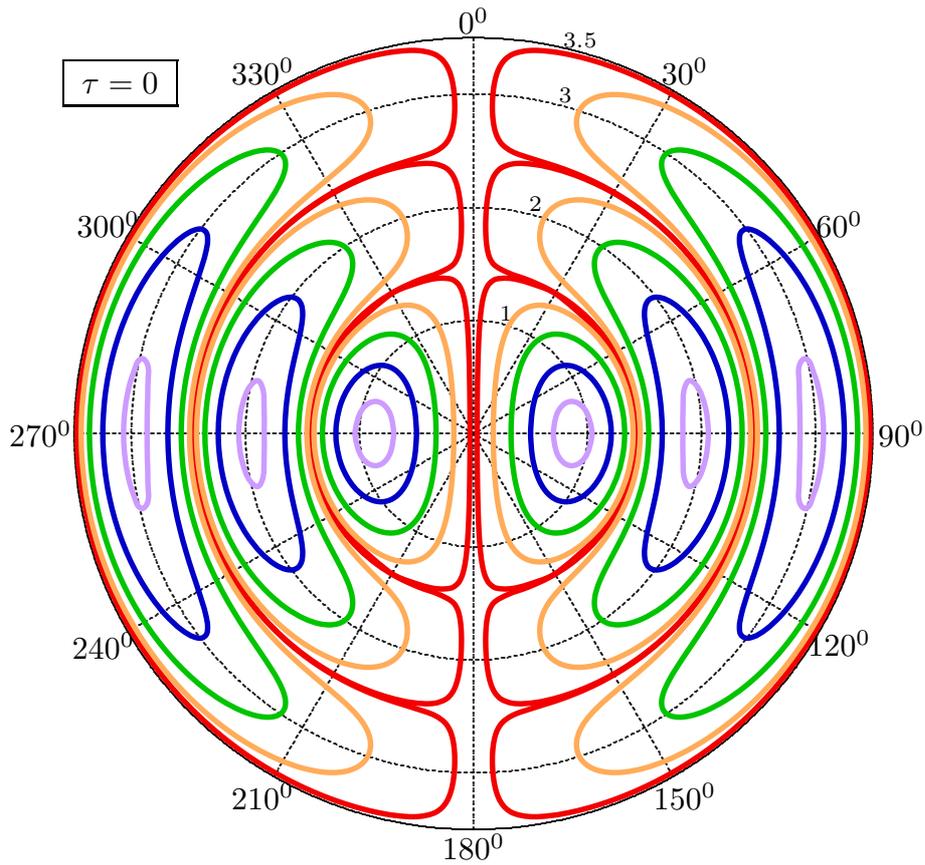
É facile verificare che la (11.4.5) si puó scrivere:

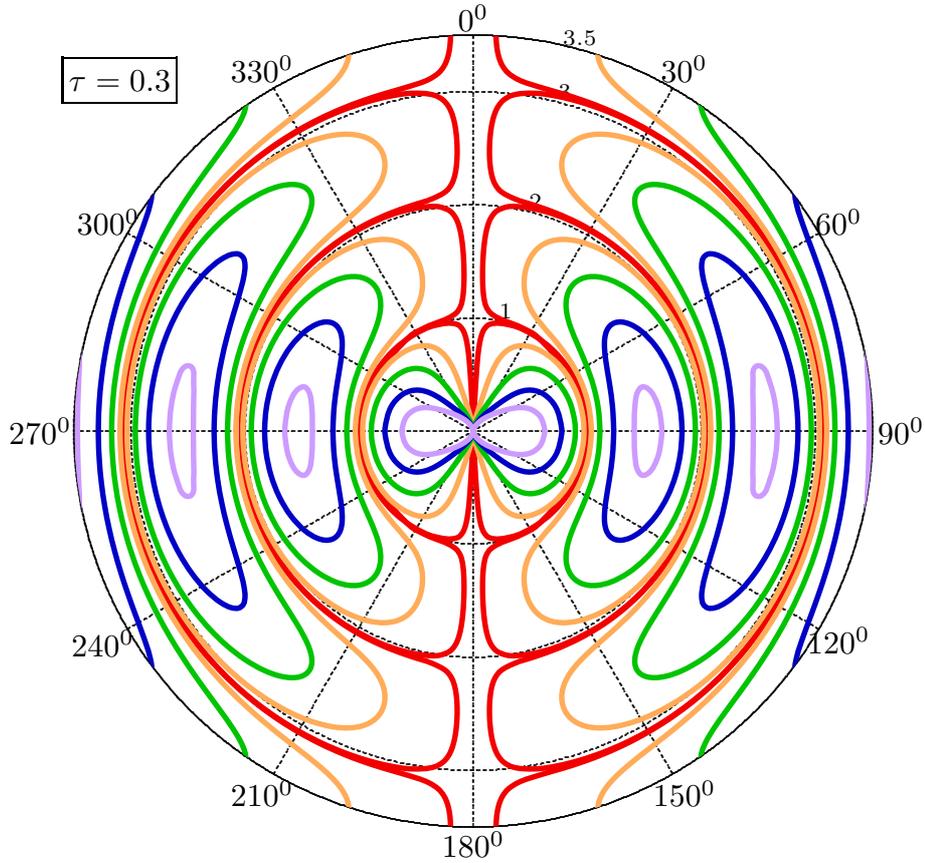
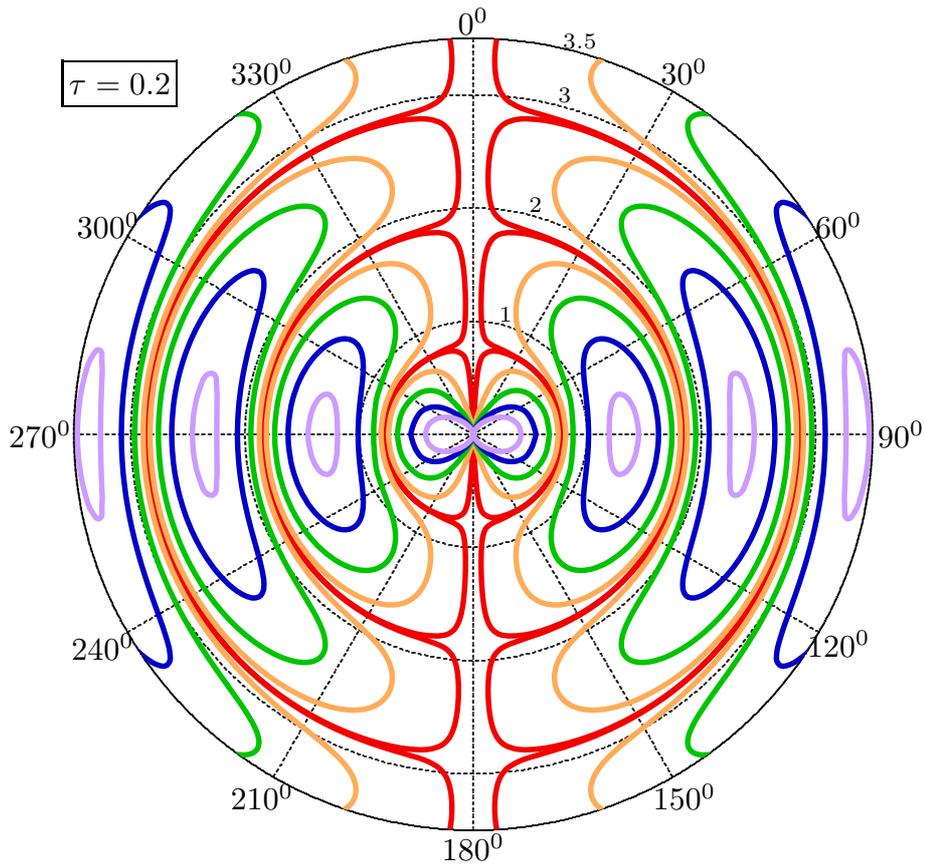
$$d \left\{ \left[\frac{\sin(\omega t - kr)}{r} + k \cos(\omega t - kr) \right] \sin^2\theta \right\} = 0 \quad (11.4.6)$$

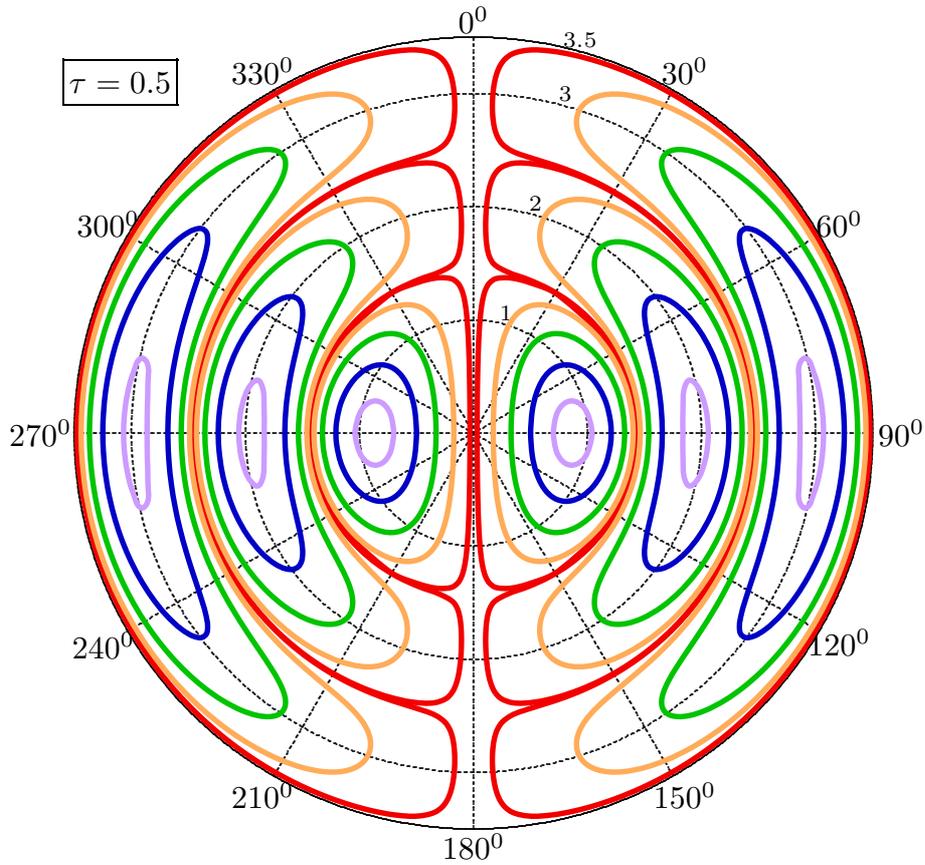
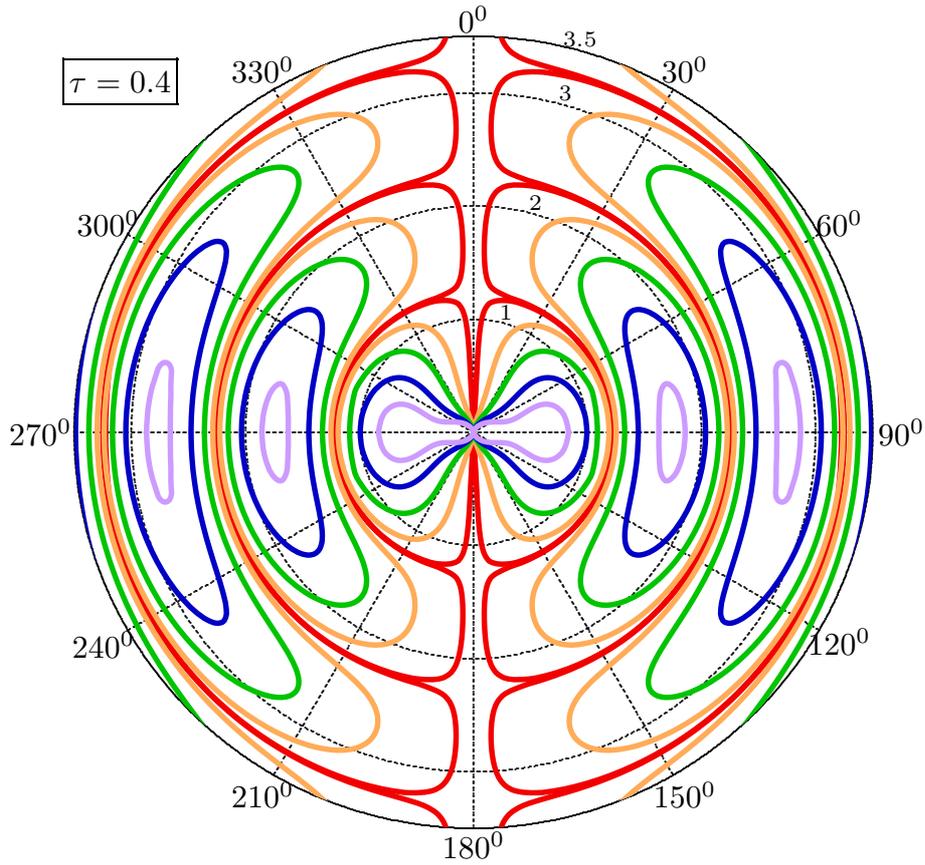
Notiamo per inciso che il differenziale della (11.4.6) si riferisce alle variabili θ ed r , pertanto ne deduciamo che la funzione dentro le parentesi graffe deve essere costante rispetto a dette variabili ma puó essere una funzione del tempo, cioé:

$$\left\{ \left[\frac{\sin(\omega t - kr)}{r} + k \cos(\omega t - kr) \right] \sin^2\theta \right\} = C(t) \quad (11.4.7)$$

dove $C(t)$ é una funzione arbitraria della sola t . La (11.4.7) é l'equazione all'istante t delle linee di forza del campo elettrico; alcune di queste sono rappresentate nelle figure seguenti. I valori usati per la costante C sono, dall'interno verso l'esterno di ogni raggruppamento di linee, -3, -2, -1, -0.3, -0.01.







Presentiamo un programma, in ambiente Matlab, che ci permette il grafico delle linee di forza del campo elettrico relativo al dipolo elettrico hertziano.

PROGRAMMA 'HERTZ'

```
clf;
grid off;
clear all;
for K=-3:.5:-.5;
L=2;
t=-.01;
R=.01:.0001:2;
y=K./((1./R).*sin(2.*pi.*t-(2.*pi./L).*R)+(2.*pi./L).*cos(2.*pi.*t-(2.*pi./L).*R));
h1=sqrt(abs(y));
x1=real(asin(h1));
x2=-real(asin(h1));
polar(x1,R);
hold on;
polar(x2,R);
hold on;
polar(x1,-R);
hold on;
polar(x2,-R);
clear;
end
L=2;
t=-.01;
R=.1:.0001:2;
K=-0.01;
y=K./((1./R).*sin(2.*pi.*t-(2.*pi./L).*R)+(2.*pi./L).*cos(2.*pi.*t-(2.*pi./L).*R));
h1=sqrt(abs(y));
x1=real(asin(h1));
x2=-real(asin(h1));
polar(x1,R);
hold on;
polar(x2,R);
hold on;
polar(x1,-R);
hold on;
polar(x2,-R);
title('Linee di forza di un dipolo hertziano')
```

11.5 - Radiazione emessa da una piccola spira percorsa da corrente monocromatica

Consideriamo una piccola spira percorsa da una corrente che varia nel tempo con legge $e^{-i\omega t}$, che quindi supponiamo monocromatica, e sia I l'intensità massima.

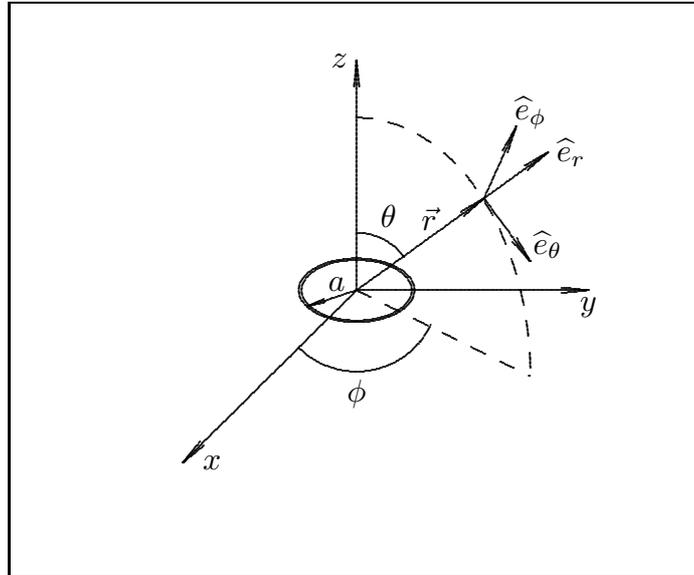


fig.11.5-1

La spira giace nel piano $z = 0$ come indicato in figura (11.5-1). Ci proponiamo di calcolare il campo elettromagnetico generato da tale sistema utilizzando, come al solito, la (10.4.12), la (10.4.13) e la (10.2.36).

Per il campo elettrico, si ha:

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu \left(\vec{I} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \right) \cdot \int_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (11.5.1)$$

Come volume di integrazione è conveniente scegliere un cilindro infinitamente lungo che ha per sezione la spira; ovviamente questa scelta è corretta in quanto il contributo all'integrale è dato dalla regione dove $\vec{J}(\vec{r}')$ è $\neq 0$ cioè dalla spira.

Introduciamo una coordinata ausiliaria ρ' con $0 \leq \rho' \leq a$ definita come la distanza fra un generico punto nel piano della spira, interno ad essa, e l'origine delle coordinate. Così, l'elemento infinitesimo di volume del cilindro sopra definito è:

$$d^3r' = \rho' d\phi' d\rho' dz'$$

Con l'aiuto di questa nuova variabile la densità di corrente si scrive:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{e}'_\phi I \delta(\rho' - a) \delta(z') \quad (11.5.2)$$

e la (11.5.1) diventa:

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu \left(\vec{I} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \right) \cdot \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a d\rho' \int_{-\infty}^{+\infty} \rho' dz' \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (11.5.3)$$

Sostituendo la (11.5.2) nella (11.5.3), si ha:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a d\rho' \int_{-\infty}^{+\infty} \rho' dz' \hat{e}'_{\phi} I \frac{\delta(\rho' - a)\delta(z') e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = \\ & = \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a d\rho' \hat{e}'_{\phi} \rho' I \delta(\rho' - a) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_0^{2\pi} d\phi' \hat{e}'_{\phi} a I \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned} \quad (11.5.4)$$

L'integrale (11.5.4) é difficile da valutare a meno che non si facciano delle approssimazioni.

Cerchiamo di valutare l'integrale (11.5.4). Si ha:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \hat{x}r \sin \theta \cos \phi + \hat{y}r \sin \theta \sin \phi + \hat{z}r \cos \theta \\ \vec{r}' &= \hat{x}a \cos \phi' + \hat{y}a \sin \phi' \\ \hat{e}'_{\phi} &= -\hat{x} \sin \phi' + \hat{y} \cos \phi' \end{aligned} \quad (11.5.5)$$

Nella penultima equazione si é posto $\theta' = \frac{\pi}{2}$ perché la spira giace sul piano xy .

Ne segue che:

$$\begin{aligned} |\vec{r}-\vec{r}'|^2 &= |\hat{x}(r \sin \theta \cos \phi - a \cos \phi') + \hat{y}(r \sin \theta \sin \phi - a \sin \phi') + \hat{z}r \cos \theta|^2 = \\ &= (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi' - 2ar \sin \theta \cos \phi \cos \phi') + \\ &+ (r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi' - 2ar \sin \theta \sin \phi \sin \phi') + r^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (11.5.6)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + a^2 - 2ar \sin \theta (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi')} + r^2 \cos^2 \theta \quad (11.5.7)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos(\phi - \phi')} = r \sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \quad (11.5.8)$$

In conseguenza della (11.5.8), possiamo sviluppare la funzione scalare di Green in serie di potenze $\frac{a}{r}$ attorno ad $\frac{a}{r} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} &\simeq \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \frac{a}{r} \left\{ \frac{d}{d\frac{a}{r}} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \right\}_{\frac{a}{r} \rightarrow 0} = \\ &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \frac{a}{r} (-ikr + 1) \sin \theta \cos(\phi - \phi') \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \end{aligned} \quad (11.5.9)$$

L'integrale all'ultimo membro della (11.5.4), pertanto si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} d\phi' (-\hat{x} \sin \phi' + \hat{y} \cos \phi') aI \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \\
 & + \int_0^{2\pi} d\phi' \left[(-\hat{x} \sin \phi' + \hat{y} \cos \phi') aI \frac{a}{r} (-ikr + 1) \sin \theta \cos(\phi - \phi') \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right]
 \end{aligned} \tag{11.5.10}$$

Il primo integrale é, ovviamente, nullo; il secondo si scrive:

$$Ia^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} (1 - ikr) \sin \theta \int_0^{2\pi} \{d\phi' [-\hat{x} \sin \phi' \cos(\phi - \phi') + \hat{y} \cos \phi' \cos(\phi - \phi')]\} \tag{11.5.11}$$

Pertanto il potenziale vettore di una piccola spira percorsa da corrente monocromatica e uniforme spazialmente é, nell'ipotesi $\frac{a}{r} \ll 1$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu \hat{e}_\phi \pi a^2 I \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} (1 - ikr) \sin \theta \tag{11.5.12}$$

Pertanto il campo elettrico dato dalla (11.5.3) diventa:

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu \left(\vec{\bar{I}} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \right) \cdot \hat{e}_\phi \pi a^2 I \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} (1 - ikr) \sin \theta \tag{11.5.13}$$

Poiché:

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \hat{e}_\phi f = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{e}_\phi f \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \tag{11.5.14}$$

e poiché la funzione che compare nella (11.5.13) non dipende da ϕ , l'operatore $\vec{\nabla} \vec{\nabla}$ dá contributo nullo.

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu \hat{e}_\phi \pi a^2 I \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} (1 - ikr) \sin \theta \tag{11.5.15}$$

avendo posto $\vec{\bar{I}} \cdot \hat{e}_\phi = \hat{e}_\phi$.

La (11.5.15) si può scrivere:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{e}_\phi \omega \mu k I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \sin \theta \tag{11.5.16}$$

Calcoliamo il campo magnetico:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \hat{e}_\phi \pi a^2 I \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} (1 - ikr) \sin \theta \tag{11.5.17}$$

Data una funzione vettoriale \vec{F} , ricordiamo che in coordinate sferiche, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{e}_r + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (11.5.18)$$

Pertanto, la (11.5.17) diventa:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \pi a^2 I \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} (1 - ikr) \sin^2 \theta \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \pi a^2 I \frac{e^{ikr}}{4\pi r} (1 - ikr) \sin \theta \right] \hat{e}_\theta \quad (11.5.19)$$

Sviluppando si ottiene la formula finale per il campo magnetico:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -k^2 I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left\{ \hat{e}_r \left[\frac{i}{kr} + \left(\frac{i}{kr} \right)^2 \right] 2 \cos \theta + \hat{e}_\theta \left[1 + \frac{i}{kr} + \left(\frac{i}{kr} \right)^2 \right] \sin \theta \right\} \quad (11.5.20)$$

Se confrontiamo la (11.5.16) e la (11.5.20) con la (11.1.23) e (11.1.24) che esprimono i campi competenti ad un dipolo hertziano osserviamo che fra i due sistemi vi é un dualismo di scambio fra campo elettrico e campo magnetico; il campo magnetico generato da una piccola spira percorsa da corrente ha un andamento spaziale che é lo stesso del campo elettrico generato da un dipolo hertziano.

Per valutare il vettore di Poynting far field irradiato dalla spira, scriviamo le espressioni far field dei campi.

Il campo elettrico far field irradiato dalla spira in approssimazione $\frac{a}{\lambda} \ll 1$ é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{e}_\phi \omega \mu k I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta \quad (11.5.21)$$

Il campo magnetico ad esso associato é:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\hat{e}_\theta k^2 I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta \quad (11.5.22)$$

Il vettore di Poynting complesso é:

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \hat{e}_r \frac{1}{2} \omega \mu k^3 (I \pi a^2)^2 \frac{1}{(4\pi r)^2} \sin^2 \theta \quad (11.5.23)$$

Poiché:

$$\omega \mu k^3 = \omega \mu \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 = c \mu \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \quad (11.5.24)$$

si ha:

$$\vec{S}_c = \hat{e}_r \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I^2 \pi^4}{16r^2} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^4 \sin^2 \theta \quad (11.5.25)$$

Ne segue che:

$$\langle \vec{S} \rangle = \hat{e}_r \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I^2 \pi^4}{16r^2} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^4 \sin^2 \theta \quad (11.5.26)$$

La densit  di potenza irradiata  , quindi:

$$\mathcal{P} = \left| \langle \vec{S} \cdot \hat{e}_r \rangle \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I^2 \pi^4}{16r^2} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^4 \sin^2 \theta \quad (11.5.27)$$

La potenza totale irradiata  :

$$\begin{aligned} P_{sfera} &= \oint_{sfera} \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} d^2r = \oint_{sfera} \langle \vec{S} \rangle r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= Z \frac{I^2 \pi^4}{32} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^4 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = Z \frac{I^2 \pi^4}{32} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^4 2\pi \frac{4}{3} = Z \frac{I^2 \pi^5}{12} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^4 \end{aligned} \quad (11.5.28)$$

11.6 - Teoria di Rayleigh sull'azzurro del cielo

Come applicazione del problema relativo alla sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme, trattiamo la teoria della diffusione della luce da parte delle molecole di gas, discussa quantitativamente per la prima volta da **Lord Rayleigh**† nel 1871 e nel 1899, per spiegare il fenomeno dell'azzurro del cielo. È importante ricordare che anche **Leonardo da Vinci** aveva capito gli aspetti essenziali di tale fenomeno nel 1500, effettuando esperimenti sulla diffusione della luce da parte di fumo di legna, anticipando così gli analoghi esperimenti effettuati da **Tyndall** intorno al 1870.

Consideriamo una molecola come una piccola sfera dielettrica di raggio a e costante dielettrica ϵ , e supponiamo che essa venga irradiata da un'onda elettromagnetica piana il cui vettore campo elettrico é:

$$\vec{E}_i = E_0 \hat{z} e^{iky - i\omega t} \quad (11.6.1)$$

essendo:

$$ky = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} y = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r} y \quad (\mu_r \simeq 1, -a \leq y \leq a) \quad (11.6.2)$$

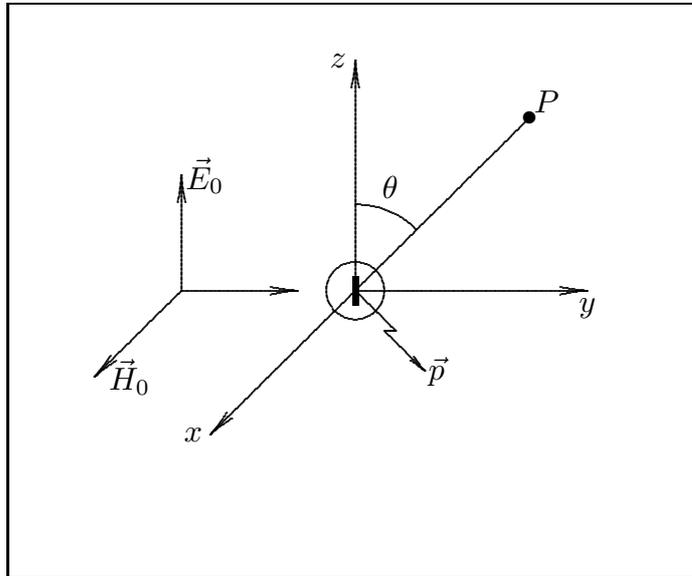


fig.11.6-1

Nell'ipotesi che il raggio a della sfera sia molto piú piccolo della lunghezza d'onda della luce incidente, la fase dell'onda elettromagnetica $e^{ik_{sfera}y}$ non varia in modo importante nei punti interni della sfera, ossia nella (11.6.1) si può porre:

$$e^{iky} \simeq 1 \quad (11.6.3)$$

† John William Strutt, third Baron Rayleigh, (Maldon, Regno Unito, 12 Novembre 1842 - Witham, Regno Unito, 30 Giugno 1919): fisico inglese, insignito, nel 1904, del premio Nobel per la fisica per le sue ricerche sulla densità dei gas piú importanti e per la scoperta dell'argon.

Si può, pertanto, ritenere che la sfera stessa sia sottoposta ad un campo elettrico uniforme spazialmente, ma variabile nel tempo con legge $e^{-i\omega t}$.

Si dimostra nel capitolo 19 che la funzione potenziale nei punti esterni alla sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme, data dalla (19.5.17) é:

$$\Phi_{ext} = cost - E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 r^{-2} \cos \theta \quad (11.6.4)$$

Da questa formula si evince che il potenziale del campo elettrico che si stabilisce fuori della sfera é la somma del potenziale competente al campo uniforme preesistente e **di un potenziale di tipo dipolare** come si deduce dal terzo termine del secondo membro della (11.6.4).

Pertanto, segue che, una sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme si comporta come un dipolo elettrico statico.

Per calcolare tale momento di dipolo indotto basta eguagliare il terzo termine del secondo membro della (11.6.4) all'espressione generale del potenziale di un dipolo dato da:

$$\Phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (11.6.5)$$

Segue, pertanto, che il modulo del momento di dipolo indotto sulla sfera si ricava dalla equazione:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_{sfera} \cos \theta}{r^2} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 r^{-2} \cos \theta \quad (11.6.6)$$

da cui:

$$p_{sfera} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \quad (11.6.7)$$

Pertanto, nell'ipotesi che il centro della particella sferica si trovi nell'origine delle coordinate e, ponendo, in virtù dell'ipotesi $a \ll \lambda$, $y = 0$ nella (11.6.1), si ha per il momento di dipolo indotto da un'onda piana su una particella dielettrica di raggio molto piccolo rispetto alla lunghezza d'onda, la seguente espressione:

$$\vec{p}_{sfera} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \hat{z} e^{-i\omega t} \quad (11.6.8)$$

La sfera dielettrica, irradiata da un'onda piana, si comporterà, pertanto, come un dipolo hertziano irradiante nello spazio un campo elettromagnetico che si sovrapporrà al campo dell'onda piana incidente.

Tale campo di radiazione sarà calcolato con le formule della teoria del dipolo hertziano, dopo aver legato la quantità Il che figura nell'espressione del campo elettrico emesso dal dipolo hertziano con il momento di dipolo della sferetta dato dalla (11.6.8).

Si ha l'equivalenza:

$$\vec{p}_{sfera} = ql\hat{z} \quad (11.6.9)$$

da cui

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dq}{dt} l\hat{z} \quad (11.6.10)$$

cioé

$$-i\omega\vec{p} = Il\hat{z} \quad (11.6.11)$$

Pertanto il campo emesso dalla sfera nella **far zone** é:

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\hat{e}_\theta \omega^2 p \mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta = -\hat{e}_\theta \omega^2 \mu_0 4\pi \epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta = \\ -\hat{e}_\theta k^2 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \frac{e^{ikr}}{r} \sin \theta \end{aligned} \quad (11.6.12)$$

Il campo magnetico diffuso dalla sfera dielettrica nella far zone é:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\hat{e}_\phi k \omega p \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta = -\hat{e}_\phi k^2 c p \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin \theta = -\hat{e}_\phi k^2 c a^3 \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \frac{e^{ikr}}{r} \sin \theta \quad (11.6.13)$$

Il vettore di Poynting, mediato in un periodo, é reale ed é dato da:

$$\langle \vec{S} \rangle = \hat{e}_r \frac{k^4 c a^6 \epsilon_0}{2r^2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 E_0^2 \sin^2 \theta \quad (11.6.14)$$

La potenza totale diffusa dalla sfera é:

$$P_{diff} = \frac{4}{3} \pi \frac{k^4}{Z} a^6 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 E_0^2 \quad (11.6.15)$$

É importante calcolare il rapporto fra la potenza totale diffusa dalla sfera e la densità di potenza dell'onda incidente; questo rapporto, che indichiamo con σ_d prende il nome di **sezione totale di diffusione** e si misura in m^2 . Poiché:

$$\langle \mathcal{P}_i \rangle = \frac{1}{2Z} E_0^2 \quad (11.6.16)$$

é la densità di potenza, mediata in un periodo, dell'onda incidente, si ha:

$$\sigma_d = \frac{8}{3} \pi k^4 a^6 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 \quad (11.6.17)$$

Esprimendo la σ_d in funzione della lunghezza d'onda, si ha:

$$\boxed{\sigma_d = \frac{128}{3} \pi^4 (\pi a^2) \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 \frac{a^4}{\lambda^4}} \quad \text{Legge di Rayleigh} \quad (11.6.18)$$

La formula (11.6.18) costituisce la **legge di Rayleigh sull'azzurro del cielo**.

La dipendenza $\frac{1}{\lambda^4}$ significa evidentemente che nel campo della luce visibile il rosso é la componente meno diffusa e il violetto la componente piú diffusa. La luce che si osserva in direzione diversa da quella del fascio incidente contiene una percentuale piú alta di componenti di alta frequenza (blu) rispetto alla composizione spettrale del fascio incidente, mentre il fascio trasmesso si arricchisce progressivamente di componenti rosse, e contemporaneamente la sua intensità complessiva diminuisce. Il colore azzurro del cielo, il rosso del sole al tramonto, la fiocchezza del sole d'inverno e la facilitá delle scottature d'estate sono tutte conseguenze della diffusione di Rayleigh della luce nell'atmosfera.

Infatti, la sezione di diffusione (11.6.18) rappresenta la potenza diffusa per molecola con un flusso unitario di energia incidente; nell'attraversare uno spessore dy del gas, la perdita percentuale di potenza é $-N\sigma_d dy$, essendo N il numero di molecole per unitá di volume. Pertanto, l'intensitá del fascio incidente diventa:

$$I(y) = I_0 e^{-N\sigma_d y} \quad (11.6.19)$$

Poiché l'indice di rifrazione dell'aria nel campo della luce visibile ($4100 \div 6500$) Å a T.P.N. é $(n - 1) = 2.78 \cdot 10^{-4}$, nell'ipotesi di un numero di molecole $N = 2.69 \cdot 10^{19}$ molecole/cm³, valori tipici di coefficienti di attenuazione sono:

Colore	$N\sigma_d$ (cm ⁻¹)
Luce violetta ($\lambda = 4100 \text{ \AA}$)	$2.29 \cdot 10^{-11}$
Luce verde ($\lambda = 5200 \text{ \AA}$)	$8.86 \cdot 10^{-12}$
Luce rossa ($\lambda = 6500 \text{ \AA}$)	$3.63 \cdot 10^{-12}$

Sebbene i valori sopra riportati sono certamente molto approssimati, si vede subito come il coefficiente di attenuazione competente alla radiazione violetta é piú grande di un fattore 10 rispetto alla radiazione rossa. Questo perché, ripetiamo, la luce violetta viene diffusa.

Usando un modello di atmosfera isoterma in cui la densitá varia esponenzialmente con l'altezza (vedi profilo della ionosfera), si possono calcolare i seguenti rapporti fra l'intensitá luminosa alla superficie della terra e quella incidente sull'atmosfera, con il sole allo zenith oppure all'alba o tramonto, per le tre lunghezze d'onda.

Colore	Zenith	Alba-tramonto
Rosso ($\lambda = 6500 \text{ \AA}$)	0.96	0.21
Verde ($\lambda = 5200 \text{ \AA}$)	0.90	0.024
Violetto ($\lambda = 4100 \text{ \AA}$)	0.76	0.000065

Questi numeri mettono in clamoroso rilievo lo spostamento verso il rosso della luce solare residua all'alba e al tramonto.

11.7 - Campi di radiazione

Quando il punto di osservazione é molto lontano dalla sorgente, possono essere introdotte delle approssimazioni, come peraltro abbiamo già fatto, per la valutazione dei campi irradiati che, in questo caso, prendono il nome di **campi di radiazione o far fields**.

Vogliamo generalizzare le formule per il calcolo di questi campi, in vista dello studio di altri sistemi radianti meno elementari.

L'approssimazione **campi di radiazione o zona di radiazione** consiste nel porre le seguenti due condizioni:

$$r \gg r' \quad e \quad kr \gg 1 \quad (11.7.1)$$

dove $r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ e $r' = \sqrt{\vec{r}' \cdot \vec{r}'}$.

Consideriamo, adesso, la distanza $|\vec{r} - \vec{r}'|$.

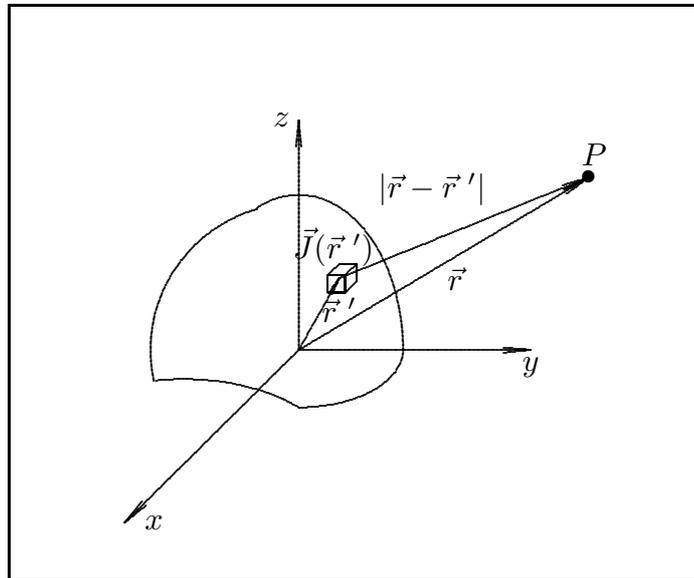


fig.11.7-1

Dalla figura (11.7-1), applicando il teorema di Carnot, si ha:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{r}} \quad (11.7.2)$$

avendo posto: $\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$.

Sviluppando in serie la radice quadrata e trascurando il termine $\frac{r'^2}{r^2}$ si ha, ricordando che $\sqrt{1 \pm \delta} \simeq 1 \pm \frac{1}{2}\delta$, $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}'$.

Consideriamo, ora, l'espressione generale del campo elettrico (10.4.12) unitamente alla (10.2.36) cioè l'espressione:

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu \left(\vec{I} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \right) \cdot \int_V d^3r' \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (11.7.3)$$

e sostituiamo al posto di $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$ l'espressione $e^{ik(r-\hat{e}_r \cdot \vec{r}')}$ e al posto di $\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$ il termine $\frac{1}{4\pi r}$.

É da notare che nell'esponenziale non si può trascurare il termine $k\hat{e}_r \cdot \vec{r}'$ perché il suo contributo alla variazione di fase può essere significativo quando esso é dell'ordine, o più grande, di π .

Con queste approssimazioni, la (11.7.3) si riduce a:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = i\omega\mu \left(\vec{I} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \right) \cdot \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_V d^3r' \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} \quad (11.7.4)$$

e per il potenziale vettore si ha:

$$\vec{A}_{rad}(\vec{r}) = \mu \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_V d^3r' \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} \quad (11.7.5)$$

La funzione integranda che figura nella (11.7.4) é funzione soltanto di \vec{r}' ; pertanto l'integrale risulterà funzione di θ e ϕ soltanto, indipendente dalla distanza dell'osservatore dall'origine.

Poniamo:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \int_V d^3r' \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} \quad (11.7.6)$$

A questa quantità si dá il nome di **vettore di radiazione** \vec{N} .

La quantità

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{N} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (11.7.7)$$

che figura nella (11.7.4) può essere notevolmente semplificata se prendiamo in considerazione la seconda equazione (11.7.1) cioè $kr \gg 1$; questa infatti ci consentirà di trascurare tutti i termini dell'ordine o più alti di $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ che compaiono nell'applicazione dell'operatore $\vec{\nabla} \vec{\nabla}$.

Anche se é molto tedioso, riteniamo utile sviluppare questo calcolo:

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \vec{N} = \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \frac{e^{ikr}}{4\pi r} (N_r \hat{e}_r + N_\theta \hat{e}_\theta + N_\phi \hat{e}_\phi) \right] \quad (11.7.8)$$

Ricordando che, in coordinate sferiche, la quantità $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ (dove \vec{F} é una arbitraria funzione vettoriale) si può esprimere come:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (11.7.9)$$

si ha:

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \vec{N} = \\ & = \vec{\nabla} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} N_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{e^{ikr}}{4\pi r} N_\theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} N_\phi \right) \right] = \\ & = \vec{\nabla} \left[\frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} N_r (1 + ikr) + \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta N_\theta) + \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2 \sin \theta} \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (11.7.10)$$

Ricordando che, in coordinate sferiche, la quantità $\vec{\nabla} \Phi$ (dove Φ é una arbitraria funzione scalare) si può esprimere come:

$$\vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (11.7.11)$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \vec{N} &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left[\left(-k^2 - \frac{2}{r^2} \right) N_r + \frac{1}{r} \frac{\partial N_r}{\partial r} \left(ik - \frac{2}{r} + 1 + ikr \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 N_r}{\partial r^2} \right] \hat{e}_r + \\ &+ \frac{1}{\sin \theta} \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} \left(ik - \frac{2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta N_\theta) \hat{e}_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} \left(ik - \frac{2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} N_\phi \hat{e}_r + \\ &+ \frac{e^{ikr}}{4\pi r^3} (1 + ikr) \frac{\partial N_r}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial N_r}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta + \frac{e^{ikr}}{4\pi r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta N_\theta) \right] \hat{e}_\theta + \\ &+ \frac{e^{ikr}}{4\pi r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{e^{ikr}}{4\pi r^3} (1 + ikr) \frac{\partial N_r}{\partial \phi} \hat{e}_\phi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial N_r}{\partial r} \right) \hat{e}_\phi + \\ &+ \frac{e^{ikr}}{4\pi r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta N_\theta) \right] \hat{e}_\phi + \frac{e^{ikr}}{4\pi r^3} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 N_\phi}{\partial \phi^2} \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (11.7.12)$$

Le condizioni (11.7.1) ci consentono di lasciare in questa espressione solo il termine contenente $\frac{1}{r}$ e trascurare tutti gli altri. Scriviamo pertanto:

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \vec{N} \simeq -k^2 N_r \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \hat{e}_r \quad (11.7.13)$$

Ne segue, quindi, che la (11.7.4) si può ancora approssimare scrivendo:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = i\omega\mu \left(\vec{I} - \hat{e}_r \hat{e}_r \right) \cdot \vec{N} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} = i\omega\mu \frac{e^{ikr}}{4\pi r} (\hat{e}_\theta N_\theta + \hat{e}_\phi N_\phi) \quad (11.7.14)$$

Per il **calcolo del campo magnetico** di radiazione esprimiamo $\vec{\nabla} \times \vec{A}_{rad}$ in coordinate sferiche, ricordando che:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{e}_r + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (11.7.15)$$

Per la (11.7.5) e (11.7.6) si ha:

$$\vec{A}_{rad}(\vec{r}) = \mu \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \vec{N} \quad (11.7.16)$$

che sostituita nell'espressione (11.7.15) comporta:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A}_{rad} = & \frac{\mu}{r \sin \theta} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta N_\phi) - \frac{\partial N_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{e}_r + \\ & + \frac{\mu}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{\partial N_r}{\partial \phi} - N_\phi \frac{ik}{4\pi} e^{ikr} \right] \hat{e}_\theta + \frac{\mu}{r} \left[N_\theta \frac{ik}{4\pi} e^{ikr} - \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{\partial N_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (11.7.17)$$

Trascurando i termini di ordine superiore ad $\frac{1}{r}$, possiamo scrivere in definitiva:

$$\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = \frac{ik}{4\pi r} e^{ikr} (N_\theta \hat{e}_\phi - N_\phi \hat{e}_\theta) \quad (11.7.18)$$

Calcoliamo, adesso, la densità superficiale media di potenza in approssimazione di campi di radiazione:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left(\vec{E} \times \vec{H}^* \right) = \frac{1}{2} \Re \left[i\omega\mu \frac{e^{ikr}}{4\pi r} (\hat{e}_\theta N_\theta + \hat{e}_\phi N_\phi) \times \left(-\frac{ik}{4\pi r} \right) e^{-ikr} (N_\theta^* \hat{e}_\phi - N_\phi^* \hat{e}_\theta) \right] \quad (11.7.19)$$

Ricordando che, in coordinate sferiche, il prodotto vettoriale fra due vettori \vec{A} e \vec{B} si scrive:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_\theta B_\phi - A_\phi B_\theta) \hat{e}_r + (A_\phi B_r - A_r B_\phi) \hat{e}_\theta + (A_r B_\theta - A_\theta B_r) \hat{e}_\phi \quad (11.7.20)$$

e, poiché nel nostro caso le componenti radiali sono nulle si ha:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_\theta B_\phi - A_\phi B_\theta) \hat{e}_r \quad (11.7.21)$$

Pertanto:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \left[\frac{k\omega\mu}{(4\pi r)^2} |N_\theta|^2 + \frac{k\omega\mu}{(4\pi r)^2} |N_\phi|^2 \right] \hat{e}_r \right\} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 (|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2) \hat{e}_r \quad (11.7.22)$$

dove, al solito, $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

Le formule (11.7.14), (11.7.18) e (11.7.22) ci consentiranno di calcolare i campi e la potenza nel caso di **osservatore lontano dalla sorgente e piccole lunghezze d'onda**.

É importante osservare che i campi elettrici e magnetici di radiazione sono semplicemente correlati; si ha, infatti:

$$\vec{E}_{rad} = Z \left(\vec{H}_{rad} \times \hat{e}_r \right) \quad \text{oppure} \quad \vec{H}_{rad} = \frac{1}{Z} \left(\hat{e}_r \times \vec{E}_{rad} \right) \quad (11.7.23)$$

Osserviamo, inoltre, che il vettore di Poynting é reale e diretto radialmente.