Cap. 10

La teoria della radiazione

Nei capitoli precedenti abbiamo studiato la propagazione dei campi elettromagnetici senza tener conto del modo con cui essi vengono generati. Considereremo, adesso, le sorgenti del campo e il problema fondamentale della determinazione dell'intensitá e della configurazione di un campo generato da una distribuzione di cariche e correnti.

10.1 - I potenziali elettromagnetici e trasformazioni di gauge.

Il problema della determinazione del campo generato da correnti e cariche assegnate viene affrontato, in maniera piú semplice, introducendo dei potenziali ausiliari (come nel caso statico) dai quali si possono ricavare mediante semplici operazioni di derivazione sia il campo elettrico che il campo magnetico; in questo modo le equazioni di Maxwell sono automaticamente soddisfatte ed inoltre le equazioni differenziali da risolvere sono in numero minore.

Scriviamo le equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{10.1.1}$$

$$\frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \tag{10.1.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{10.1.3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \tag{10.1.4}$$

Per la terza equazione il campo $\vec{B}$ é sempre solenoidale quindi si puó rappresentare come il rotore di un altro vettore $\vec{A}(\vec{r}, t)$ che prende il nome di potenziale vettore magnetico e si scrive:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{10.1.5}$$

Sostituendo la (10.1.5) nella prima equazione (10.1.1), si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = 0 \tag{10.1.6}$$

che si puó scrivere:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \tag{10.1.7}$$

cioé:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{10.1.8}$$

Per la (10.1.8) il vettore a rotazione nulla $\vec{E}+\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ puó essere considerato come il gradiente di una funzione scalare, cioé del potenziale scalare Φ e scriviamo:

$$\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\Phi \tag{10.1.9}$$

cioé:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{10.1.10}$$

Il segno meno nella (10.1.9) é per uniformarci al caso elettrostatico alla quale la (10.1.9) perviene imponendo l'indipendenza dal tempo di $\vec{A}$.

Le definizioni (10.1.5) e (10.1.10) di $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ mediante i potenziali Φ e $\vec{A}$ soddisfano automaticamente le due equazioni di Maxwell omogenee cioé la (10.1.1) e la (10.1.3). Il comportamento dinamico di $\vec{A}$ e di Φ é determinato dalle due equazioni di Maxwell non omogenee (la (10.1.2) e la (10.1.4)).

Supponendo il mezzo lineare, omogeneo ed isotropo, scriviamo le equazioni di Maxwell non omogenee in funzione dei potenziali elettromagnetici, ponendo:

$$\begin{aligned}\vec{D}&=-\,\epsilon\left(\vec{\nabla}\Phi+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\\ \vec{H}&=\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{A}\end{aligned} \tag{10.1.11}$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\epsilon\mu\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}&=\mu\vec{J}\\ \nabla^2\Phi+\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}&=-\,\frac{\rho}{\epsilon}\end{aligned} \tag{10.1.12}$$

Sviluppando il prodotto $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$, si ha:

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{A}-\epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\epsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)&=-\,\mu\vec{J}\\ \nabla^2\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)&=-\,\frac{\rho}{\epsilon}\end{aligned} \tag{10.1.13}$$

Abbiamo cosí ridotto il sistema delle quattro equazioni di Maxwell a due sole equazioni ma si tratta ancora di equazioni accoppiate. Ora, se guardiamo la (10.1.5), cioé la definizione di $\vec{B}$ in funzione del potenziale vettore $\vec{A}$, ci accorgiamo che quest'ultimo é definito a meno del gradiente di una funzione scalare arbitraria $\Lambda(\vec{r},t)$, nel senso che $\vec{B}$ é invariante rispetto ad una trasformazione del potenziale vettore del tipo:

$$\vec{A}\rightarrow\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda \tag{10.1.14}$$

infatti, applicando vettorialmente l'operatore $\vec{\nabla}$ alla (10.1.14) si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{10.1.15}$$

Allo stesso modo il campo elettrico rimane invariato rispetto alla trasformazione (10.1.14) se contemporaneamente si trasforma il potenziale scalare con una trasformazione del tipo:

$$\Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \tag{10.1.16}$$

Infatti, inserendo i potenziali trasformati nella (10.1.10), si ha:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{10.1.17}$$

Le trasformazioni (10.1.14) e (10.1.16) che lasciano invarianti $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ si chiamano trasformazioni di gauge e l'invarianza dei vettori del campo rispetto a trasformazioni di questo tipo é detta invarianza di gauge. Ovviamente, anche le (10.1.13) risultano invarianti. L'arbitrarietá della funzione Λ e quindi della (10.1.14) e della (10.1.16) ci permette di scegliere in maniera opportuna una coppia di potenziali $(\vec{A}, \Phi)$; in particolare una scelta conveniente é quella che disaccoppia le equazioni (10.1.13) cioé che riduca il sistema ad un'equazione contenente solo Φ e all'altra che contiene solo $\vec{A}$. Dalle (10.1.13) si deduce che questo accade se la coppia di potenziali é scelta in modo che sia soddisfatta la relazione:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{10.1.18}$$

Con questa condizione chiamata **condizione di Lorentz** le (10.1.13) si disaccoppiano e diventano:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\,\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \Phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\,\frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned} \tag{10.1.19}$$

Per vedere che é sempre possibile trovare dei potenziali che soddisfano alla condizione di Lorentz, supponiamo che i potenziali $\vec{A}$ e Φ che soddisfano alle (10.1.13) non soddisfano la (10.1.18); mediante una trasformazione di gauge passiamo allora ai potenziali $\vec{A}'$ e Φ' e imponiamo che questi soddisfino la condizione di Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\,' + \epsilon\mu \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 \tag{10.1.20}$$

Trasformando la (10.1.20) per mezzo della (10.1.14) e della (10.1.16) si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda + \epsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \tag{10.1.21}$$

che si scrive meglio:

$$\nabla^2\Lambda - \epsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = -\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \epsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \tag{10.1.22}$$

dove il secondo membro é termine noto.

Basta dunque trovare una funzione di gauge Λ che soddisfi l'equazione (10.1.22) affinché i nuovi potenziali $\vec{A}'$ e Φ' soddisfino simultaneamente la condizione di Lorentz e le equazioni d'onda (10.1.19).

É chiaro che se una coppia di potenziali $(\vec{A}, \Phi)$ soddisfa inizialmente la condizione di Lorentz, i potenziali trasformati si ottengono dalla (10.1.14) e dalla (10.1.16) imponendo che la funzione Λ soddisfi l'equazione:

$$\nabla^2\Lambda - \epsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = 0 \tag{10.1.23}$$

Tutti i potenziali appartenenti a questa piú ristretta classe vengono definiti come appartenenti alla gauge di Lorentz.

Un'altra scelta per la coppia di potenziali $(\vec{A}, \Phi)$ é quella per cui risulti:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \tag{10.1.24}$$

Le equazioni d'onda (10.1.13), in questo caso, si scrivono:

$$\begin{aligned} &\nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} + \epsilon\mu\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \\ &\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned} \tag{10.1.25}$$

Dalle (10.1.25) si vede subito che il potenziale scalare soddisfa l'equazione di Poisson la cui soluzione é, come é noto dall'elettrostatica, per una distribuzione localizzata di cariche sorgenti:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int\frac{\rho(\vec{r}\,', t)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}d^3r\,' \tag{10.1.26}$$

Il potenziale scalare (10.1.26) é il potenziale di Coulomb istantaneo dovuto alla distribuzione di cariche $\rho(\vec{r}\,', t)$ e da ció deriva il nome di **gauge di Coulomb**.

In realtá in elettrostatica sia la densitá di carica che il potenziale non dipendono dal tempo, ma la seconda equazione delle (10.1.25) non contiene alcun operatore che agisce sul tempo, pertanto la (10.1.26) é sempre valida istantaneamente.

Prima di passare alla discussione della prima equazione delle (10.1.25) dimostriamo il seguente **Teorema di Helmholtz**:

Una funzione vettoriale $\vec{C}(\vec{r})$ regolare e limitata all'infinito si puó sempre scrivere come somma di due funzioni vettoriali una a divergenza nulla (solenoidale) e l'altra a rotore nullo (irrotazionale), cioé:

$$\vec{C}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r}) \tag{10.1.27}$$

con $\vec{D}(\vec{r})$ ed $\vec{F}(\vec{r})$ tali che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \qquad e \qquad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \tag{10.1.28}$$

La dimostrazione del teorema consiste nell'esprimere $\vec{D}$ e $\vec{F}$ in funzione di $\vec{C}$.
Scriviamo $\vec{D}$ e $\vec{F}$ in funzione di due funzioni ausiliarie ϕ e $\vec{\chi}$ tali che:

$$\vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{\chi} \tag{10.1.29}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi \tag{10.1.30}$$

É chiaro che le condizioni (10.1.28) sono automaticamente soddisfatte.
Applichiamo l'operatore $\vec{\nabla}$ scalarmente alla (10.1.30) e vettorialmente alla (10.1.29), si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\chi}) \tag{10.1.31}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -\nabla^2\phi \tag{10.1.32}$$

D'altra parte per la (10.1.27) si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \tag{10.1.33}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{D} \tag{10.1.34}$$

Pertanto la (10.1.31) e la (10.1.32) diventano:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\chi}) = \vec{\nabla} \times \vec{C} \tag{10.1.35}$$

$$\nabla^2\phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{C} \tag{10.1.36}$$

La seconda di queste equazioni é simile all'equazione di Poisson in elettrostatica mentre la prima é simile all'equazione per il potenziale vettore della magnetostatica.
Le soluzioni della (10.1.35) e della (10.1.36), quindi, sono:

$$\phi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}\,' \cdot \vec{C}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r\,' \tag{10.1.37}$$

$$\vec{\chi} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}\,' \times \vec{C}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r\,' \tag{10.1.38}$$

Poiché $\vec{D}$ e $\vec{F}$ possono essere trovati da ϕ e $\vec{\chi}$, il teorema é dimostrato. É da notare che la formula $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ somiglia a quella per il calcolo del campo elettrico dal potenziale. Tale campo quando é prodotto da una sorgente puntiforme é longitudinale rispetto al raggio vettore che congiunge la carica al punto campo.
Analogamente $\vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{\chi}$ é simile alla formula per il calcolo dell'induzione magnetica dal potenziale vettore. In questo caso il campo é trasverso (ortogonale) al raggio vettore che

congiunge l'elemento di corrente al punto campo. Per queste ragioni $\vec{F}$ é spesso chiamato la parte longitudinale di $\vec{C}$ e $\vec{D}$ la parte trasversa.

Ritorniamo alla discussione della prima equazione delle formule (10.1.25); in essa il vettore densitá di corrente $\vec{J}$, in virtú del teorema di Helmholtz puó scriversi come la somma di due termini:

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t \tag{10.1.39}$$

dove $\vec{J}_l$ é la densitá di corrente longitudinale o irrotazionale ($\vec{\nabla} \times \vec{J}_l = 0$), mentre $\vec{J}_t$ é la densitá di corrente trasversale o solenoidale ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_t = 0$).

Per le (10.1.37) e (10.1.38) e le (10.1.29) e (10.1.30), si ha:

$$\vec{J}_l = -\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}\,' \cdot \vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r\,' \tag{10.1.40}$$

$$\vec{J}_t = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int \frac{\vec{\nabla}\,' \times \vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r\,' \tag{10.1.41}$$

Poiché per l'equazione di continuitá $\vec{\nabla}\,' \cdot \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho(\vec{r}\,', t)}{\partial t}$, la (10.1.40) diventa:

$$\vec{J}_l = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\rho(\vec{r}\,', t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r\,' \tag{10.1.42}$$

che per la (10.1.26) si scrive:

$$\vec{J}_l = \epsilon\vec{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{10.1.43}$$

Sostituendo questa espressione nella prima delle (10.1.25) si ha:

$$\nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}_l - \mu\vec{J}_t + \mu\vec{J}_l \tag{10.1.44}$$

cioé:

$$\nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}_t \tag{10.1.45}$$

Questa é l'origine del nome **gauge trasversale**; il potenziale vettore é determinato dalla parte solenoidale $\vec{J}_t$ della densitá di corrente mentre il potenziale scalare dalla parte irrotazionale $\vec{J}_l$.

Poiché Φ soddisfa l'equazione di Poisson, la parte di campo elettrico dovuto al termine $\vec{\nabla}\Phi$ varia spazialmente con legge come o piú veloce di $\dfrac{1}{r^2}$ cioé come un campo elettrostatico e quindi il suo contributo predomina in prossimitá delle sorgenti.

Viceversa i campi che derivano dal termine del potenziale vettore predominano nelle zone lontane; questi campi, come vedremo in seguito, sono chiamati campi di radiazione; é per questo che la gauge di Coulomb si chiama anche gauge di radiazione. Questa gauge é particolarmente utile in elettrodinamica quantistica; la descrizione quantistica in termini di fotoni richiede la quantizzazione soltanto del potenziale vettore.

10.2 - Soluzione dell'equazione d'onda non omogenea

Le equazioni d'onda (10.1.19) e (10.1.45) hanno tutte la struttura fondamentale:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -f(\vec{r}, t) \tag{10.2.1}$$

dove $f(\vec{r}, t)$ é una funzione di sorgente assegnata **localizzata** in una regione di spazio finita. La costante v é la velocitá di propagazione nel mezzo che supponiamo non dispersivo e non conduttore.

Il problema generale della radiazione é quello di risolvere la (10.2.1), cioé trovare la soluzione $\Psi(\vec{r}, t)$, in regioni limitate dello spazio, con o senza sorgenti localizzate all'interno, e con condizioni assegnate sulle superfici del contorno. Data l'enorme importanza del problema, consideriamo in primo luogo sorgenti monocromatiche. Per questo eseguiamo una trasformazione di Fourier rispetto alla frequenza (dominio della frequenza) rappresentando $\Psi(\vec{r}, t)$ e $f(\vec{r}, t)$ con gli integrali di Fourier:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{10.2.2}$$

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{10.2.3}$$

con le trasformazioni inverse:

$$\Psi(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \tag{10.2.4}$$

$$f(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \tag{10.2.5}$$

Inserendo le trasformazioni integrali (10.2.2) e (10.2.3) nella (10.2.1) si trova che la trasformata di Fourier $\Psi(\vec{r}, \omega)$ soddisfa l'equazione d'onda non omogenea di Helmholtz, per ogni valore di ω:

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\vec{r}, \omega) = -f(\vec{r}, \omega) \tag{10.2.6}$$

avendo posto:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \omega^2 \epsilon\mu \tag{10.2.7}$$

Se imponiamo, a priori, la monocromaticitá della sorgente cioé

$$f(\vec{r}, t) = f(\vec{r}) e^{-i\omega t} \tag{10.2.8}$$

e quindi:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} \tag{10.2.9}$$

la dipendenza da ω nella (10.2.6) scompare e l'equazione di Helmholtz si scrive:

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\vec{r}) = -f(\vec{r}) \tag{10.2.10}$$

Individuando in $\Psi(\vec{r})$ il potenziale scalare ed il potenziale vettore, le equazioni da risolvere sono:

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) + k^2\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon} \tag{10.2.11}$$

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{r}) + k^2\vec{A}(\vec{r}) = -\mu\vec{J}(\vec{r}) \tag{10.2.12}$$

Consideriamo la (10.2.11) e cerchiamo una soluzione particolare, disinteressandoci per il momento di eventuali condizioni al contorno.

A causa della linearitá della (10.2.11), in analogia con l'equazione di Poisson in elettrostatica, una soluzione particolare della (10.2.11), che come vedremo dopo corrisponde alla soluzione generale nel caso di sorgenti localizzate e mezzo illimitato, é:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon}\int_V \rho(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,')d^3r\,' \tag{10.2.13}$$

dove $\mathbf{G}(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}\,')$ é una funzione delle coordinate del punto-campo $\vec{r}$ e del punto sorgente $\vec{r}\,'$ e prende il nome di **funzione di Green**. L'integrazione rispetto alle coordinate apicate é estesa a tutto il volume V occupato da ρ.

Per meglio capire il significato fisico della (10.2.13), osserviamo che la equazione (10.2.11) é una equazione alle derivate parziali di **tipo ellittico** simile alla equazione di Poisson (a cui si riduce per k=0); in questo ultimo caso la funzione di Green $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ é $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ cioé il potenziale di una carica statica e puntiforme. Nel nostro caso la funzione $G(\vec{r},\vec{r}\,')$, che ha lo stesso significato fisico del caso elettrostatico, é sconosciuta e va determinata mediante sostituzione della (10.2.13) nella (10.2.11), ottenendo:

$$\int_V \rho(\vec{r}\,')\left(\nabla^2 + k^2\right)G(\vec{r},\vec{r}\,')d^3r\,' = -\rho(\vec{r}) \tag{10.2.14}$$

dove l'operatore laplaciano opera sulle coordinate non apicate.

Con l'aiuto della 'funzione' δ di Dirac, possiamo rappresentare la densitá $\rho(\vec{r})$ che figura al secondo membro della (10.2.14) come un integrale di volume:

$$\rho(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')d^3r\,' \qquad (\vec{r}\ in\ V) \tag{10.2.15}$$

Ricordiamo le proprietá della funzione δ. Essa é cosí definita:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \begin{cases} 0 & \text{per } \vec{r} \neq \vec{r}\,' \\ \infty & \text{per } \vec{r} = \vec{r}\,' \end{cases} \tag{10.2.16}$$

Inoltre:

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')d^3r = f(\vec{r}\,') \tag{10.2.17}$$

per ogni $\vec{r}\,'$ in V ed é nullo per $\vec{r}\,'$ fuori dal volume V.

In virtú della (10.2.15), l'equazione (10.2.14) si puó scrivere:

$$\int_V \rho(\vec{r}\,')\left[\left(\nabla^2 + k^2\right) G(\vec{r},\vec{r}\,') + \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right] d^3r\,' = 0 \tag{10.2.18}$$

Dalla (10.2.18) segue che la funzione $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ deve soddisfare l'equazione scalare di Helmholtz:

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') + k^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{10.2.19}$$

Cosí la funzione $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ soddisfa l'equazione (10.2.11) con il termine di sorgente sostituito dalla funzione δ; la funzione $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ prende il nome di **funzione di Green dell'equazione (10.2.11)**.

Cerchiamo, adesso, una soluzione della (10.2.19).

Poiché la sorgente nell'equazione (10.2.19) é puntiforme, la funzione di Green deve essere sfericamente simmetrica cioé deve essere una funzione di $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$. Scrivendo il Laplaciano in coordinate sferiche e considerando, quindi, soltanto la parte radiale, l'equazione (10.2.19) diventa:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dG(r)}{dr}\right) + k^2 G(r) = -\delta(r) \tag{10.2.20}$$

avendo posto $r = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$.

La (10.2.20) si puó anche scrivere:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rG) + k^2 G = -\delta(r) \tag{10.2.21}$$

In ogni punto, eccetto che per $r=0$, la funzione $rG(r)$ soddisfa l'equazione omogenea:

$$\frac{d^2}{dr^2}(rG) + k^2(rG) = 0 \tag{10.2.22}$$

che ammette la soluzione:

$$rG = Ae^{+ikr} + Be^{-ikr} \tag{10.2.23}$$

cioé:

$$G(r) = A\frac{e^{ikr}}{r} + B\frac{e^{-ikr}}{r} \tag{10.2.24}$$

Con la convenzione usata nelle (10.2.2) e (10.2.3) per la dipendenza dal tempo, il primo termine della (10.2.24) rappresenta un'onda sferica divergente dall'origine, il secondo un'onda sferica convergente; assumiamo di considerare solo onde divergenti. Cosí la soluzione é:

$$G(r) = A\frac{e^{ikr}}{r} \tag{10.2.25}$$

Vogliamo ora vedere se é possibile soddisfare l'equazione (10.2.19) anche nell'origine mediante un'opportuna scelta della costante A.

Procediamo nella seguente maniera: consideriamo un piccolo volume ΔV contenente l'origine e sia S_0 la superficie sferica che circonda ΔV; integriamo l'equazione (10.2.19) sul volume ΔV, si ha:

$$\int_{\Delta V} \nabla^2 G d^3r + k^2 \int_{\Delta V} G d^3r = -\int_{\Delta V} \delta(r) d^3r \tag{10.2.26}$$

Poiché $\nabla^2 G$ si puó scrivere come $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} G$, applicando il teorema della divergenza al primo termine della (10.2.26), si ha:

$$\oint_{S_0} \vec{\nabla} G \cdot \widehat{n} d^2r + k^2 \int_{\Delta V} G d^3r = -1 \tag{10.2.27}$$

Poiché:

$$\vec{\nabla} G = \left(\frac{d}{dr} \frac{Ae^{ikr}}{r} \right)_{(r=r_0)} \widehat{n} = A \left(-\frac{1}{r_0^2} e^{ikr_0} + \frac{ik}{r_0} e^{ikr_0} \right) \widehat{n} \tag{10.2.28}$$

Sostituendo nella (10.2.27), si ottiene:

$$A \oint_{S_0} \left(-\frac{1}{r_0^2} + \frac{ik}{r_0} \right) e^{ikr_0} d^2r + k^2 A \int_0^{r_0} \frac{e^{ikr}}{r} 4\pi r^2 dr = -1 \tag{10.2.29}$$

essendo r_0 il raggio della superficie sferica S_0.

La (10.2.29) comporta:

$$A \left(-\frac{1}{r_0^2} + \frac{ik}{r_0} \right) e^{ikr_0} 4\pi r_0^2 + k^2 A \int_0^{r_0} \frac{e^{ikr}}{r} 4\pi r^2 dr = -1 \tag{10.2.30}$$

Ancora:

$$-4\pi A e^{ikr_0} + ikA 4\pi r_0 e^{ikr_0} + k^2 A \int_0^{r_0} e^{ikr} 4\pi r dr = -1 \tag{10.2.31}$$

Passando al limite per r_0 che tende a zero, si ha:

$$-4\pi A = -1 \tag{10.2.32}$$

da cui:

$$A = \frac{1}{4\pi} \tag{10.2.33}$$

Quindi la funzione di Green che soddisfa la (10.2.19), anche per $\vec{r} = \vec{r}\,'$ é:

$$\mathbf{G}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}\,') = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{ik}|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'|}}{\mathbf{4\pi}|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'|} \tag{10.2.34}$$

Ne segue che **la soluzione dell'equazione di Helmholtz** é:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r\,' \tag{10.2.35}$$

Se ripetiamo quanto abbiamo detto per il potenziale vettore $\vec{A}$, troviamo:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \vec{J}(\vec{r}\,')\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r\,' \tag{10.2.36}$$

La (10.2.35) e la (10.2.36) rappresentano le soluzioni delle equazioni di Helmholtz corrispondenti, come vedremo fra breve, alla situazione fisica di sorgenti localizzate in un mezzo illimitato.

10.3 - La soluzione generale delle equazioni di Helmholtz

La generalizzazione del problema della radiazione consiste nel cercare soluzioni delle equazioni di Helmholtz, per i potenziali scalari e vettori definite in una regione V, nello interno di un mezzo isotropo omogeneo, limitata da una superficie regolare, chiusa S sulla quale esse soddisfano ad opportune condizioni al contorno. Per fare questo dobbiamo dimostrare una importante relazione che va sotto il nome di teorema di Green.

Sia V una regione chiusa dello spazio limitata da una superficie regolare S, e siano ϕ e ψ due funzioni scalari del posto, continue in tutto V e sulla superficie S insieme con le loro derivate prime e seconde.

Consideriamo il vettore $\phi\vec{\nabla}\psi$ ed applichiamo ad esso il teorema della divergenza:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi)d^3r = \oint_S (\phi\vec{\nabla}\psi)\cdot\widehat{n}d^2r \tag{10.3.1}$$

Per una formula di analisi vettoriale, si ha:

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi) = \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi + \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi + \phi\nabla^2\psi \tag{10.3.2}$$

Con la sostituzione della (10.3.2), la (10.3.1) diventa:

$$\int_V \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi d^3r + \int_V \phi\nabla^2\psi d^3r = \oint_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}d^2r \tag{10.3.3}$$

avendo posto $\vec{\nabla}\psi\cdot\widehat{n} = \dfrac{\partial\psi}{\partial n}$; la (10.3.3) prende il nome di **prima identitá di Green**. Si scambi, ora, la funzione ψ con la funzione ϕ; cioé si applichi il teorema della divergenza al vettore $\psi\vec{\nabla}\phi$, ottenendo:

$$\int_V \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\phi d^3r + \int_V \psi\nabla^2\phi d^3r = \oint_S \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}d^2r \tag{10.3.4}$$

Sottraendo la (10.3.4) dalla (10.3.3) si ottiene una relazione fra integrale di volume e di superficie:

$$\int_V \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) d^3r = \oint_S \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) d^2r \tag{10.3.5}$$

conosciuta come **seconda identitá di Green** o anche spesso come teorema di Green.

Applichiamo la (10.3.5) al nostro problema e sia ϕ la soluzione della equazione di Helmholtz Φ. Come funzione ψ, data la sua arbitrarietá, scegliamo la funzione di Green dello spazio infinito che descrive onde uscenti $\psi = G(r) = \dfrac{e^{ikr}}{4\pi r}$.

L'integrale di volume della (10.3.5) si puó cosí scrivere:

$$\begin{aligned}&\int_V \left(\Phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\Phi\right) d^3r = \int_V \left[\Phi\left(\nabla^2 G + k^2 G\right) - G\left(\nabla^2\Phi + k^2\Phi\right)\right] d^3r = \\ &= -\int_V \Phi\delta(r) d^3r + \int_V G\frac{\rho}{\epsilon} d^3r = -\Phi + \int_V G\frac{\rho}{\epsilon} d^3r\end{aligned} \tag{10.3.6}$$

avendo aggiunto e sottratto nel secondo membro della (10.3.6) la quantitá $\Phi k^2 G$.

La (10.3.5), quindi, diventa:

$$-\Phi + \int_V G\frac{\rho}{\epsilon} d^3r = \oint_S \left(\Phi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) d^2r \tag{10.3.7}$$

Posto $G(r) = \dfrac{e^{ikr}}{4\pi r}$ si ha:

$$\frac{dG}{dn} = \frac{dG}{dr} = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} + ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \tag{10.3.8}$$

La (10.3.7) si scrive:

$$\Phi = \int_V \frac{\rho}{4\pi\epsilon}\frac{e^{ikr}}{r} d^3r + \oint_S \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \left(-ik + \frac{1}{r}\right)\Phi\right] d^2r \tag{10.3.9}$$

Posto $d^2r = r^2 d\Omega$, si ha:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_V \rho\frac{e^{ikr}}{r} d^3r + \int_0^{4\pi} \frac{1}{4\pi} e^{ikr}\left\{r\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n} - ik\Phi\right] + \Phi\right\} d\Omega \tag{10.3.10}$$

Ripristinando $r = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ si ottiene la soluzione generale dell'equazione di Helmholtz:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r\,' + \int_0^{4\pi} \frac{1}{4\pi} e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\left\{|\vec{r}-\vec{r}\,'|\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n} - ik\Phi\right] + \Phi\right\} d\Omega \tag{10.3.11}$$

10.4 - Derivazione del campo elettrico e del campo magnetico dai potenziali elettromagnetici

Dopo aver calcolato i potenziali Φ ed $\vec{A}$ possiamo scrivere i campi elettrici e magnetici per mezzo della (10.1.10) e della (10.1.5):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{10.4.1}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{10.4.2}$$

É conveniente eliminare Φ da queste relazioni e quindi esprimere $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ in funzione soltanto di $\vec{A}$. Questo é possibile utilizzando la condizione di Lorentz (10.1.18); infatti, applicando ad essa l'operatore $\vec{\nabla}$, si ha:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) + \epsilon\mu\vec{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{10.4.3}$$

che nel caso di **radiazioni monocromatiche**, si scrive:

$$-\vec{\nabla}\Phi = \frac{i}{\omega\epsilon\mu}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) \tag{10.4.4}$$

Sostituendo la (10.4.4) nella (10.4.1), i campi $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ assumono la forma:

$$\vec{E} = i\omega\left[\vec{A} + \frac{1}{k^2}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)\right] \tag{10.4.5}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{10.4.6}$$

Ci proponiamo, adesso, di scrivere il termine dentro parentesi quadra sottoforma di operatore tensoriale. Per questo introduciamo la diade unitaria $\bar{\bar{I}}$ e la diade doppio gradiente $\vec{\nabla}\vec{\nabla}$ che in un sistema di coordinate cartesiane sono espresse da:

$$\bar{\bar{I}} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\widehat{e}_m\widehat{e}_n\delta_{mn} \tag{10.4.7}$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\widehat{e}_m\widehat{e}_n\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{10.4.8}$$

dove $x_i (i = 1, 2, 3)$ sono le coordinate cartesiane x, y, z, $\widehat{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sono i versori degli assi coordinati $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, $\widehat{z}$, e il simbolo δ_{mn} é la delta di Kronecker che vale 1 per $m = n$ e 0 per $m \neq n$. Le proprietá di $\bar{\bar{I}}$ e $\vec{\nabla}\vec{\nabla}$ che ci interessano sono:

$$\bar{\bar{I}} \cdot \vec{C} = \vec{C} \qquad e \qquad (\vec{\nabla}\vec{\nabla}) \cdot \vec{C} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) \tag{10.4.9}$$

dove $\vec{C}$ é una qualunque funzione vettoriale. Queste proprietá possono essere dimostrate scrivendo $\vec{C}$ in componenti e sviluppando i calcoli:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{I}}\cdot\vec{C} &= \left(\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\widehat{e}_m\widehat{e}_n\delta_{mn}\right)\cdot\left(\sum_{p=1}^{3}\widehat{e}_pC_p\right) = \sum_m\sum_n\sum_p\widehat{e}_m\widehat{e}_n\cdot\widehat{e}_pC_p\delta_{mn} = \\ &= \sum_m\sum_n\sum_p\widehat{e}_m\delta_{np}C_p\delta_{mn} = \sum_p\widehat{e}_pC_p = \vec{C}\end{aligned} \tag{10.4.10}$$

dove: $\widehat{e}_n\cdot\widehat{e}_p = \delta_{np}$

Analogamente:

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{C} &= \left[\sum_m\sum_n\widehat{e}_m\widehat{e}_n\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_n}\right]\cdot\left(\sum_p\widehat{e}_pC_p\right) = \sum_m\sum_n\sum_p\widehat{e}_m\widehat{e}_n\cdot\widehat{e}_p\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_n}C_p = \\ &= \sum_m\sum_n\sum_p\widehat{e}_m\delta_{np}\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_n}C_p = \sum_m\widehat{e}_m\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\sum_p\frac{\partial}{\partial x_p}C_p\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right)\end{aligned} \tag{10.4.11}$$

Con l'aiuto di questi risultati, le relazioni (10.4.5) e (10.4.6) diventano:

$$\vec{E} = i\omega\left(\bar{\bar{I}} + \frac{1}{k^2}\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{A} \tag{10.4.12}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{10.4.13}$$

dove $\vec{A}$ é dato dalla (10.2.36).

Fine del Cap.10